Дискретная математика. Основной поток **Промежуточный экзамен, 22.12.15**

Время экзамена: 2 часа 40 минут. Все ответы и утверждения должны быть строго обоснованы. При использовании утверждений из курса их необходимо указывать явно.

1. Может ли для целых чисел k, N выполняться сравнение $2^k \equiv 1 \pmod{2N}$?

2. Про множества A, B, C известно, что $A \cap B \subseteq C \setminus (A \cup B)$. Верно ли, что тогда $A \subseteq A \triangle B$? ($\triangle$ обозначает симметрическую разность множеств.)

3. О событиях A и B вероятностного пространства U известно, что

$$0 < \Pr[A] < 1 \quad \text{и} \quad 0 < \Pr[B] < 1.$$

Могут ли при этом события $A \cup B$ и B быть независимыми?

4. Найдите количество сюръективных функций $f\colon \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$, которые удовлетворяют следующему свойству: если $x_1 \le x_2$, то $f(x_1) \le f(x_2)$. (Напоминание: по нашим соглашениям сюръекция всюду определена.)

5. Рёбра неориентированного графа G можно разбить на два непересекающихся множества так, что каждое из этих множеств рёбер образует граф без циклов нечётной длины на множестве вершин исходного графа G. Верно ли, что вершины графа G можно правильно раскрасить в 4 цвета?

6. Подмножества S_1, S_2, $\ldots$, S_{11} конечного множества U разделяют все его элементы: для любых $v \ne w$ из U найдется такое множество S_j, что либо $v \in S_j$, $w \notin S_j$; либо $v \notin S_j$, $w \in S_j$.

Может ли так случиться, что множество U содержит 2015 элементов?

7. Функция f сопоставляет остатку x по модулю 41 остаток x^{11} по модулю 41. Является ли эта функция биекцией на множестве остатков по модулю 41?

8. Вероятностное пространство: пары (u, v) вершин 23-мерного булева куба. Все исходы равновозможны. Найдите вероятность события «длина любого пути с началом u и концом v не меньше 20». Ответ должен быть числом.

Группа	ФИО						
1	2	3	4	5	6	7	8