Неделя 24. Выполнимость

1. Докажите, что задача проверки по данным графу G и данному числу k наличия в G независимого множества размера k эффективно сводится к задаче выполнимости КНФ.

2. Рассмотрим следующую задачу: по данным числам $a_1, \ldots, a_n$ и числу b (все в двоичной записи) проверить, существует ли подмножество $S \subseteq \{1, \ldots, n\}$, такое что $\sum_{i \in S} a_i = b$. Докажите, что эта задача эффективно сводится к задаче о выполнимости булевой схемы.

3. Рассмотрим следующую модифицированную задачу проверки выполнимости: по данной 3-КНФ проверить, есть ли набор значений ее переменных, такой что в каждом дизъюнкте ровно один литерал принимает значение 1. **а)** Докажите, что эта задача эффективно сводится к задаче о выполнимости 3-КНФ. **б)** Докажите, что и наоборот, стандартная задача о выполнимости 3-КНФ эффективно сводится к модифицированной.

4. Придумайте алгоритм, проверяющий выполнимость 2-КНФ за полиномиальное время.

5. Рассмотрим следующую модифицированную задачу проверки выполнимости: по данной 3-КНФ проверить, есть ли набор значений ее переменных, такой что в каждом дизъюнкте не все литералы принимают одинаковое значение (другими словами, в каждом дизъюнкте встречается и 0, и 1). **а)** Докажите, что эта задача эффективно сводится к задаче о выполнимости 3-КНФ. **б)** Докажите, что и наоборот, стандартная задача о выполнимости 3-КНФ эффективно сводится к модифицированной.

6. Докажите, что задача о выполнимости 3-КНФ эффективно сводится к задаче о независимом множестве (см. задачу 1).

Дискретная математика **Пилотный поток**

Домашнее задание 24

Важно. Это задание не будет проверяться и не будет учитываться в итоговой оценке по курсу. Задание предназначено для подготовки к экзамену, решения задач будут обсуждаться на лекциях и семинарах.

1. Найдите максимальное количество рёбер в ациклических ориентированных графах на n вершинах. (Напомним, что по использованному в курсе определению параллельных рёбер в графе нет.)

2. Рассмотрим полное двоичное дерево глубины n (то есть с 2^n листьями). Рассмотрим следующий процесс покраски вершин. Изначально покрашен только корень дерева. На каждом шаге, каждая непокрашенная вершина, соседняя с какой-то уже покрашенной, красится с вероятностью $1/2$ (независимо от других вершин). Найдите математическое ожидание числа покрашенных листьев после $2n-1$ шагов.

3. В множестве из n элементов выбрано $2^{n-1}+1$ подмножество. Докажите, что среди этих подмножеств есть два непересекающихся.

4. Булева функция $U_2(x_1, \ldots, x_n)$ равна 1 тогда и только тогда, когда среди значений $x_1, \ldots, x_n$ есть ровно 2 единицы. Постройте схему размера $O(n)$, вычисляющую функцию U_2.

5. Известно, что функция $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ невычислима. Верно ли, что множество её значений

$$f(\mathbb{N}) = \{y : y = f(x) \text{ для некоторого } x\}$$

неразрешимо?

6. Пусть $U(p, x)$ — универсальная вычислимая функция. Докажите, что перечислимо множество тех программ, которые вычисляют функцию, не равную 0 на всей области определения. (Формально это множество таких чисел p, что $U(p, x)$ определена для некоторого x и ее значение $U(p, x) \neq 0$.)

7. Множество $\mathbb{R}$ действительных чисел разбито на два множества A и B, то есть $A \cup B = \mathbb{R}$, $A \cap B = \varnothing$. Докажите, что хотя бы одно из множеств A или B имеет мощность континуум.

8. Рассмотрим вход функции $\mathrm{Tree}\colon \{0,1\}^{\binom{n}{2}} \to \{0,1\}$ как неориентированный граф на n вершинах и положим $\mathrm{Tree}(G) = 1$ тогда и только тогда, когда G дерево. Найдите сложность вычисления функции Tree в модели разрешающих деревьев.

9. Про случайную неотрицательную величину X известно, что $\mathrm{E}[X] = 1$, $\mathrm{E}[X^2] = 2$. Докажите, что $\mathrm{E}[X^3] \geqslant 4$. ($\mathrm{E}[A]$ — математическое ожидание случайной величины A.)