Дискретная математика **Пилотный поток**

Неделя 23. Неразрешимость

1. Пусть граф на множестве слов в алфавите $\{0,1\}$ задан набором правил подстановки

$$\{010 \to 101,\ 101 \to 010\}.$$

Докажите, что задача достижимости для такого графа разрешима.

2. Разрешима ли задача достижимости для графов, заданных правилами подстановки вида $u \to a$, где где a — символ алфавита, u — слово длины не меньше 2?

3. Докажите, что алгоритмически неразрешима задача достижимости для графов, заданных правилами подстановки в алфавите из двух символов.

4. Пусть граф на множестве слов в алфавите $\{a,b,c\}$ задан набором правил подстановки

$$\{ab \to ba,\ ac \to ca,\ bc \to cb\}.$$

Существует ли в этом графе цикл?

5. Граф, заданный на множестве слов набором правил подстановки, назовём универсальным, если в этом графе любое слово достижимо из пустого. Разрешима ли задача о проверке на универсальность графа, заданного правилами подстановки?

6. Определим функцию $S\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ следующим образом: $S(n)$ равно максимальному числу шагов, которое делает на пустом входе какая-либо останавливающаяся машина Тьюринга с не более чем n состояниями над алфавитом $\{0,1,\text{␣}\}$. Докажите, что функция S невычислима.

7. Дайте прямое доказательство невычислимости функции S. Для этого предположите, что S вычислима и для достаточно большого n постройте машину Тьюринга с n состояниями над алфавитом $\{0,1,\text{␣}\}$, которая заканчивает работу, но делает больше $S(n)$ шагов на пустом входе.

8. Докажите, что $S(n)$ растет быстрее любой вычислимой функции. То есть, для любой вычислимой функции $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ верно $S(n) > f(n)$ для всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$.

Дискретная математика **Пилотный поток**

Домашнее задание 23

1. Разрешима ли задача достижимости для графов, заданных правилами подстановки вида $u \to a$, где где a — символ алфавита, u — непустое слово?

2. Разрешима ли задача достижимости для графов, заданных правилами подстановки, в которых левые и правые части всех правил либо пусты, либо имеют вид au, где a — некоторый фиксированный символ алфавита?

3. Граф, заданный на множестве слов набором правил подстановки, назовём универсальным, если в этом графе любое слово достижимо из пустого. Перечислимо ли множество описаний универсальных графов, заданных набором правил подстановки?

4. В системе односторонних правил подстановки в алфавите $\{a, b\}$ всякое правило имеет вид $a^k b \to b a^l$, где k и l положительны, а a^k обозначает последовательность из букв a длины k. При этом числа k и l для разных правил могут быть разными. Разрешима ли задача проверки достижимости для графа, заданного конечным множеством таких правил подстановки?

5. Разрешима ли проверка ацикличности графа, заданного правилами подстановки? (Ацикличность графа означает, что в графе нет ориентированных циклов.)