

## Неделя 18. Вычислимость

1. Докажите, что проекция перечислимого множества  $A \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  на первую координату перечислима. (Проекция  $A$  на первую координату определяется как  $\{x \in \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N} (x, y) \in A\}$ .)
2. Докажите, что если множества  $A$  и  $B$  перечислимы, то и множества  $A \cup B$ ,  $A \cap B$  перечислимы.
3. Докажите, что если  $A$ ,  $B$  — перечислимые множества, то и множество  $A \times B$  перечислимо.
4. Перечислимо ли множество таких натуральных  $n$ , что уравнение  $x^n + y^{n+1} = z^{n+2}$  имеет решение в положительных целых числах?
5. Докажите, что если всюду определенная функция  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  вычислима и множество  $A \subset \mathbb{N}$  разрешимо, то прообраз  $\{x \mid f(x) \in A\}$  множества  $A$  разрешим.
6. Докажите, что если существует алгоритм перечисления элементов множества  $S$  в возрастающем порядке, то это множество разрешимо.
7. Пусть  $S$  — это множество таких  $n$ , что десятичная запись числа  $e$  содержит по крайней мере  $n$  девяток подряд. Докажите, что множество  $S$  разрешимо.
8. Всюду определенная функция  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  невозрастающая. Верно ли, что  $f$  вычислима?
9. Докажите, что если существует алгоритм перечисления элементов некоторого множества, то существует также и алгоритм, который перечисляет элементы множества без повторений.
10. Докажите, что функция

$$c : (x, y) \mapsto \binom{x + y + 1}{2} + y$$

является вычислимой вместе с обратной биекцией между множествами  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  и  $\mathbb{N}$  (натуральные числа начинаются с 0).

11. Диофантово уравнение — это уравнение вида  $P(x_1, \dots, x_n) = 0$ , где  $P$  — многочлен с целыми коэффициентами. Докажите перечислимость множества диофантовых уравнений, у которых есть целочисленные решения.
12. Докажите, что не существует универсальной вычислимой функции для класса вычислимых всюду определенных функций, то есть не существует такой всюду определенной вычислимой функции  $U : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , что для любой вычислимой всюду определённой функции  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  найдется такое  $p$ , что  $U(p, x) = f(x)$  для всех  $x$ .
13. Докажите, что любое бесконечное перечислимое множество содержит бесконечное разрешимое подмножество.

## Домашнее задание 18

1. Докажите, что множество рациональных чисел, меньших  $e$ , разрешимо.
2. Вычислима ли следующая функция?

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{если существует бесконечно много пар простых чисел } p, p+2, \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

3. Всяду определенная функция  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  строго возрастает и множество ее значений содержит все натуральные числа за исключением конечного множества. Докажите, что  $f$  вычислима.
4. Докажите, что если частичная функция  $f$  из  $\mathbb{N}$  в  $\mathbb{N}$  вычислима и  $A \subset \mathbb{N}$  — перечислимое множество то и образ  $\{f(x) \mid x \in A\}$ , и прообраз  $\{x \mid f(x) \in A\}$  множества  $A$  перечислимы.
5. Докажите, что бесконечное подмножество  $\mathbb{N}$  разрешимо тогда и только тогда, когда оно является областью значений всюду определенной возрастающей вычислимой функции из  $\mathbb{N}$  в  $\mathbb{N}$ .
6. Существуют ли такие множества  $X, Y \subseteq \mathbb{N}$ , что  $X$  разрешимо,  $X \cup Y$  разрешимо, а  $Y$  не разрешимо?