Неделя 11. Вероятность-2

1. Приведите примеры, в которых условная вероятность $\Pr[A \mid B]$ больше вероятности $\Pr[A]$, меньше её, а также равна ей.

2. Есть три внешне одинаковых мешочка. В одном лежит две золотых монеты, во втором — одна золотая и одна серебряная монета, в третьем — две серебряные.

Вы выбрали случайно и равновозможно один из мешочков и наугад достали из него монету. Она оказалась золотой. Какова вероятность, что и вторая монета в выбранном мешочке золотая?

3. Четыре человека А, Б, В, Г становятся в очередь в случайном порядке. Найдите **а)** условную вероятность того, что А первый, если Б последний; **б)** условную вероятность того, что А первый, если А не последний; **в)** условную вероятность того, что А первый, если Б не последний; **г)** условную вероятность того, что А первый, если Б стоит в очереди позже А; **д)** условную вероятность того, что А стоит в очереди раньше Б, если известно, что А раньше В.

4. Бросают кубик. Независимы ли события «выпало чётное число очков» и «выпало число очков, кратное 3»?

5. Выбирается случайная перестановка $x_1, x_2, \ldots, x_{49}$ чисел от 1 до 49 (все перестановки равновозможны). Независимы ли события

а) «$x_{24} > x_{25}$» и «$x_{25} > x_{26}$»?

б) «x_{24} больше всех последующих» и «x_{25} больше всех последующих»?

6. Пять человек независимо друг от друга выбирают случайно и равновозможно одно из чисел от 0 до 9. Какое из событий более вероятно: «все выбранные числа различны» или «все выбранные числа делятся на 2»?

7. Пусть события A и B независимы, и вероятность события $\overline{B}$ положительна. Докажите, что события A и $\overline{B}$ независимы.

8. Пусть A и B — события положительной вероятности, отличной от 1. Докажите, что по любым трём из величин $\Pr[A \,|\, B]$, $\Pr[A \,|\, \bar{B}]$, $\Pr[B]$, $\Pr[B \,|\, A]$ можно найти четвёртую.

9. В суперфинале телешоу вам предлагается угадать в какой из трёх коробок лежит суперприз (приз лежит только в одной коробке). После того как вы выбираете коробку, ведущий открывает одну из других коробок, в которой приз не лежит, и предлагает вам выбрать из двух оставшихся коробок, то есть либо указать на ту же коробку, что и в начале, либо изменить свой выбор. Какой вариант выгоднее?

10. Двое играют в такую игру: каждый ставит на свою последовательность орлов и решек (т.е. выбирает слово в алфавите $\{\text{О}, \text{Р}\}$), после чего подбрасывается монета. Выигрывает тот из игроков, чья ставка появилась раньше.

Игрок А ставит на РРО, Б ставит на ОРР, В ставит на ООР, Г ставит на РОО. Докажите, что вероятность выигрыша игрока А у игрока Б равна 1/4, вероятность выигрыша игрока Б у игрока В равна 1/3, вероятность выигрыша игрока В у игрока Г равна 1/4, вероятность выигрыша игрока Г у игрока А равна 1/3.

Дискретная математика **Пилотный поток**

Домашнее задание 11

1. Во сколько раз доля блондинов среди голубоглазых больше доли голубоглазых среди блондинов, если всего голубоглазых вдвое больше, чем блондинов?

2. Заранее известно, что пациент болен тяжелой болезнью с вероятностью 10^{-5}. Ему сделали тест на эту болезнь, который дает правильный результат с вероятностью 99% (независимо от того, здоров пациент или нет). Найдите отношение вероятностей событий «пациент болен этой болезнью» и «пациент не болен этой болезнью» при условии, что результат теста положительный.

3. Равновероятно выбирается случайная перестановка на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$. Независимы ли события «число 1 остается на месте» и «число 2 остается на месте»?

4. Какова вероятность того, что случайно взятое число от 1 до 100 делится на 3, при условии, что оно делится на 2?

5. Жюри из трех человек нужно принять одно из двух возможных решений, одно из которых правильное. Два члена жюри независимо друг от друга принимают правильное решение с вероятностью p, а третий случайно выбирает одно из двух возможных решений с равными вероятностями. Окончательное решение жюри выносится большинством голосов. Какова вероятность, что жюри примет правильное решение? (Сравните ее с вероятностью p правильного решения, принимаемого одним добросовестным членом жюри.)

6. Король предлагает узнику разложить десять белых и десять чёрных шаров по двум одинаковым коробкам (надо использовать все шары; в каждой коробке должен быть хотя бы один шар). После этого сначала король выбирает случайно одну из коробок, каждую с вероятностью $1/2$, а затем из выбранной коробки выбирает случайный шар, все с равными вероятностями. Если шар чёрный, то узника казнят, если белый — отпускают. Как нужно разложить шары, чтобы вероятность выжить была максимальной?

7. Двое играют в бой яиц. Перед ними стоит корзина с яйцами. Они наугад берут по яйцу и ударяют их носами. Разбитое яйцо выбрасывается и побеждённый берёт новое, а победитель раунда сохраняет своё яйцо для следующего раунда (предполагается, что победившее яйцо сохранило свою прочность и что исход каждого раунда зависит только от относительного качества яиц). Какова вероятность победы в $(n + 1)$-м раунде после победы в предыдущих?

8. (**Задача с прошлого раза**) Прямоугольная таблица заполнена нулями и единицами. В таблице $3n$ столбцов, в каждой строке ровно n единиц, все строки различны. Известно, что для любых двух строк найдется такой столбец, в котором в данных строках стоят единицы.

а) Докажите, что вероятность того, что случайно выбранная строка из n единиц и $2n$ нулей входит в такую таблицу, не больше $1/3$.

б) Докажите, что количество строк в такой таблице не больше $\binom{3n-1}{n-1}$.

Замечание: если вы не решили пункт а), но умеете решать пункт б) с использованием пункта а), запишите это рассуждение.