

Неделя 7. Порядки

1. Изоморфны ли линейные порядки $\mathbb{N} + \mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$?
2. Докажите, что любые два отрезка действительных чисел изоморфны как порядки, индуцированные сравнением чисел.
3. Изоморфны ли $(0, 1)$ и \mathbb{Q} как порядки, индуцированные сравнением чисел?
4. Докажите изоморфизм порядков, заданных отношением сравнения чисел на множествах

$$A = \{x : x \in \mathbb{Q}, 0 < x < 1\} \quad \text{и} \quad B = \{x : x \in \mathbb{Q}, 0 < x < \sqrt{2}\}.$$

5. Изоморфны ли линейные порядки $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ и $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$?
6. Является ли фундированным множество всех конечных двоичных слов с отношением лексикографического порядка?
7. Шеренга новобранцев стоит перед старшиной. Старшина командует: нале-ВО! По неопытности часть солдат поворачивается неправильно. После этого каждую секунду происходит следующее: солдаты, оказавшиеся лицом друг к другу, понимают, что произошла ошибка, и оба поворачиваются кругом. Докажите, что рано или поздно повороты прекратятся.
8. Имеется конечная последовательность нулей и единиц. За один шаг разрешается любую группу 01 заменить на 10...0 (произвольное количество нулей). Докажите, что такие шаги нельзя выполнить бесконечное количество раз.
9. Докажите, что любые два счетных плотных линейных порядка без минимального и максимального элемента изоморфны.
10. Сколько есть линейных порядков, согласованных с порядком покоординатного произведения цепи длины 2 и цепи длины n ?
11. Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — два многочлена с натуральными (целыми неотрицательными) коэффициентами. Будем говорить, что P меньше Q , если $P(x) < Q(x)$ для всех достаточно больших x . Существует ли бесконечная последовательность многочленов P_1, P_2, \dots , в которой каждый следующий меньше предыдущего?

Домашнее задание 7

1. Пусть \leq — рефлексивное и транзитивное бинарное отношение (не обязательно антисимметричное). Определим отношение \sim следующим правилом: $x \sim y$ тогда и только тогда, когда $x \leq y$ и $y \leq x$. Докажите, что \sim — отношение эквивалентности.
2. Сколько пар несравнимых элементов может быть в частичном порядке на четырёх элементах?
3. Рассмотрим два порядка: делители числа 42 (положительные целые числа, на которые 42 делится нацело) с отношением делимости ($x|y$ по определению означает, что y делится на x нацело) и подмножества множества $\{1, 2, 3\}$ с порядком по включению $x \subseteq y$. Изоморфны ли эти порядки?
4. Изоморфны ли линейные порядки $\mathbb{Z} + \mathbb{N}$ и $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$?
5. Изоморфны ли линейные порядки $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$?
6. Изоморфны ли линейные порядки \mathbb{Q} и $\mathbb{N} \times \mathbb{Q}$?
7. Рассмотрим множество невозрастающих бесконечных последовательностей натуральных чисел с лексикографическим порядком. Является ли это множество фундированным?
8. Рассмотрим для произвольного k множество \mathbb{N}^k с отношением покоординатного порядка. Существует ли в нем бесконечное подмножество, любые два элемента которого не сравнимы?