Дискретная математика **Пилотный поток**

Неделя 2. Перечислительная комбинаторика

1. 4 человека должны унести 9 различных предметов. Сколькими способами это можно сделать, если каждый способен унести любое количество имеющихся предметов?

2. 4 человека должны взять по одному предмету из имеющихся 9 различных предметов. Сколькими способами это можно сделать?

3. 2 человека равновероятно и случайно делят 8 различных предметов. Какова вероятность того, что каждому достанется 4 предмета?

4. Сколько есть 6-значных чисел, в записи которых есть хотя бы одна чётная цифра?

5. Восемь человек равновероятно и случайно выстраиваются в очередь. Какова вероятность того, что Иванов, Петров и Сидоров стоят рядом?

6. Сколько имеется 4-значных чисел, у которых каждая следующая (слева направо) цифра больше предыдущей?

7. Сколькими способами можно образовать 6 пар из 12 человек?

8. Сколькими способами можно разделить 15 одинаковых монет между 7 нумизматами так, чтобы каждому досталось хотя бы по монете?

9. Среди чисел от 1 до 15 равновероятно и случайно выбирается 6 различных чисел. Какова вероятность того, что среди них нет двух, отличающихся на единицу?

10. Докажите равенства (предпочтительнее комбинаторное доказательство)

а) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i} = n2^{n-1}$;

б) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{d+k}{d} = \binom{d+1+n}{d+1}$.

11. Докажите, что число последовательностей из нулей и единиц длины n, в которых не встречается двух нулей подряд равно $(n+1)$-ому *числу Фибоначчи* F_n, где $F_0 = F_1 = 1$ и $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$.

12. Докажите, что количество способов разбить прямоугольник $n \times 2$ на прямоугольники размера 1×2 равно F_n.

13. *Разложением* числа n называется такая последовательность положительных целых чисел x_1, x_2, $\ldots$, x_k, что $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$. Найдите количество разложений n на нечетные слагаемые.

14. *Разбиением* числа N на k частей называется такая невозрастающая последовательность положительных целых чисел $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_k$, что $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k = N$. Чего больше, разбиений числа N на не более чем k слагаемых, или разбиений числа $N + k$ на ровно k слагаемых?

15. Чего больше, разбиений N на слагаемые, не превосходящие k, или разбиений N на не более чем k слагаемых?

16. Чего больше, разбиений n на различные слагаемые или на нечетные слагаемые?

17. Сколькими способами можно разрезать правильный n-угольник на треугольники, проводя диагонали?

18. Сколько есть таких последовательностей целых чисел a_1, $\ldots$, a_n, что $a_1 = 0$ и $0 \leqslant a_{i+1} \leqslant a_i + 1$ для $1 \leqslant i < n$?

19. Рассмотрим правильный $2n$-угольник. Сколькими способами можно разбить его вершины на пары так, чтобы отрезки, соединяющие парные вершины, не пересекались?

Дискретная математика **Пилотный поток**

Домашнее задание 2

1. Сколькими способами можно выписать в ряд цифры от 0 до 9 так, чтобы четные цифры шли в порядке возрастания, а нечетные — в порядке убывания?

2. Из 36-карточной колоды карт на стол равновероятно и случайно выкладывается последовательность из 4 карт. Какова вероятность того, что две из них красные, а две черные?

3. Сколько существует 7-значных чисел, в которых ровно две четные цифры и перед каждой четной цифрой обязательно стоит нечетная?

4. Студсовет из 8 человек выбирает из своего состава председателя путем тайного голосования. Каждый может отдать один голос за любого члена студсовета. Результат голосования – число голосов, отданных за каждого кандидата. Сколько существует различных результатов голосования?

5. На Новом Году в детском саду 9 детей равновероятно и случайно разбиваются на 3 группы для хороводов вокруг трех различных елок. Если в каком-то хороводе оказывается не более 2 человек, то хоровод не получается. Какова вероятность того, что вокруг хотя бы одной елки хоровод не получится?

6. Для всех $n \geqslant 0$ докажите равенство $\binom{n}{0}+\binom{n-1}{1}+\binom{n-2}{2}+\ldots = F_n$. Более строго равенство записывается в следующем виде:

$$\sum_{0 \leqslant k \leqslant n/2} \binom{n-k}{k} = F_n.$$

7. Какие строки в треугольнике Паскаля состоят только из нечетных чисел?

8. На доске размера 100×100 ведется игра шахматного типа. В игре участвуют 20 фигур, каждая из которых ходит и бьет другие фигуры по своим правилам. Известно, что любая фигура с любого поля бьет не более 20 полей. Больше о правилах не известно ничего, в частности, множество битых фигурой полей может неизвестным нам образом зависеть от поля расположения фигуры. Докажите, что все 20 фигур можно расставить на доске так, чтобы ни одна фигура не била другую.