Дискретная математика **Пилотный поток**

Неделя 1. Индукция

1. Докажите, что для любого целого положительного n выполняется

а) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$;

б) $1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + n \cdot 2^n = (n - 1) \cdot 2^{n+1} + 2$;

в) $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{2^n} \geqslant \dfrac{n}{2} + 1.$

2. Докажите, что 1 можно представить в виде суммы 2017 различных обыкновенных дробей с числителем 1 и положительным знаменателем.

3. На доске написаны сто цифр — нули и единицы (в любой комбинации). Разрешается выполнять два действия:

1) заменять первую цифру (нуль на единицу и наоборот);

2) заменять цифру, стоящую после первой единицы.

Докажите, что после нескольких таких замен можно получить любую комбинацию из 100 нулей и единиц.

4. На краю пустыни имеется большой запас бензина и машина, которая при полной заправке может проехать 50 километров. Имеются (в неограниченном количестве) канистры, в которые можно сливать бензин из бензобака машины и оставлять на хранение (в любой точке пустыни). Доказать, что машина может проехать любое расстояние. (Канистры с бензином возить не разрешается, пустые можно возить в любом количестве.)

5. Из целых чисел от 1 до $2n$ выбрано $n + 1$ число. Докажите, что среди выбранных чисел найдутся два, одно из которых делится на другое.

6. а) Докажите, что любой квадрат $2^n \times 2^n$, из которого вырезана угловая клетка, можно разрезать на уголки из трех клеток.

б) Докажите, что на уголки можно разрезать любой квадрат $2^n \times 2^n$, из которого вырезана любая (не обязательно угловая) клетка.

7. В конечной последовательности из нулей и единиц разрешается заменить подпоследовательность 01 на 100. **а)** Докажите, что рано или поздно получится слово, к которому нельзя применить эту операцию. **б)** Зависит ли число операций от порядка, в котором они применяются, или только от начального слова? **в)** Разрешим теперь заменять 01 на $100\ldots00$ (единицу с произвольным числом нулей). Может ли теперь получиться бесконечная последовательность операций (начальная последовательность конечна)?

8. Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — два многочлена с натуральными коэффициентами. Будем говорить, что P меньше Q, если $P(x) < Q(x)$ для всех достаточно больших x. Существует ли бесконечная последовательность многочленов $P_1, P_2, \ldots$, в которой каждый следующий меньше предыдущего?

9. Лабиринтом называется клетчатый квадрат 10×10, некоторые пары соседних узлов в котором соединены отрезком — «стеной» — таким образом, что переходя из клетки в соседнюю по стороне клетку и не проходя через стены, можно посетить все клетки квадрата. Границу квадрата будем также считать обнесенной стеной. В некоторой клетке некоторого лабиринта стоит робот. Он понимает 4 команды — Л, П, В, Н, по которым соответственно идет влево, вправо, вверх и вниз, а если перед ним «стена», то стоит на месте. Как написать программу для робота, выполняя которую он обойдет все клетки независимо от лабиринта и от своего начального положения?

10. На бесконечном клетчатом листе бумаги n клеток покрашены в черный цвет, остальные клетки белые. Каждый ход всякая клетка листа перекрашивается по следующему правилу. Для каждой клетки рассмотрим ее саму, соседнюю клетку сверху и соседнюю клетку справа. На следующем ходу клетка будет черной, если хотя бы две из этих трех клеток были черными на предыдущем ходу. Иначе клетка на следующем ходу будет белой. **а)** Докажите, что рано или поздно весь лист станет белым. **б)** Докажите, что это произойдет через не более чем n шагов.

Дискретная математика **Пилотный поток**

Домашнее задание 1

1. Докажите равенство

$$1 \cdot (n-1) + 2 \cdot (n-2) + \dots + (n-1) \cdot 1 = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}.$$

2. Докажите неравенство для всех $n > 1$

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > 13/24.$$

3. Докажите, что если сумма неотрицательных чисел $x_1, \ldots, x_n$ равна $1/2$, то

$$\frac{1-x_1}{1+x_1} \cdot \frac{1-x_2}{1+x_2} \cdot \ldots \cdot \frac{1-x_n}{1+x_n} \geqslant \frac{1}{3}.$$

4. Докажите неравенство для всех $n > 1$

$$\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{\ldots\sqrt{(n-1)\sqrt{n}}}}} < 3.$$

5. Отрезок длиной 3^n разбивается на три равные части. Первая и третья из них называются отмеченными. Каждый из отмеченных отрезков разбивается на три части, из которых первая и третья снова называются отмеченными и так далее до тех пор, пока не получатся отрезки длиной 1. Концы всех отмеченных отрезков называются отмеченными точками. Доказать, что для любого целого k от 1 до 3^n можно найти две отмеченные точки, расстояние между которыми равно k.

6. Кузнечик прыгает по целым точкам числовой прямой бесконечное число раз начиная из точки 0. Длина первого прыжка равна 3, длина второго прыжка равна 5, длина k-го прыжка равна $2^k + 1$. Направление прыжка кузнечик выбирает каждый раз заново. Докажите, что кузнечик может прыгать так, чтобы рано или поздно побывать в каждой неотрицательной целой точке числовой прямой.

7. В условиях предыдущей задачи, может ли кузнечик прыгать так, чтобы рано или поздно побывать в каждой целой точке числовой прямой?

8. Целые положительные числа a_1, a_2, $\ldots$, a_n таковы, что $a_k \leqslant k$ и сумма всех этих чисел четна и равна $2S$. Докажите, что эти числа можно разбить на две группы, сумма по каждой из которых равна S.