

Программа коллоквиума по дискретной математике на пилотном потоке

В начале коллоквиума Вы получите билет, в котором будет три вопроса: контрольный вопрос на понимание определения, задача на понимание теорем и доказательств, вопрос на знание доказательств (нужно будет доказать теорему из курса). На подготовку ответа у Вас будет около часа. Коллоквиум Вы сдаете устно одному из преподавателей.

Оценка за коллоквиум формируется следующим образом. Вы получаете свой первый балл как только приходите на коллоквиум, еще 2 балла — за полный ответ на контрольный вопрос на понимание определений, 3 балла — за правильное решение задачи, ну и последние 4 балла — за полный ответ на вопрос на знание доказательств.

По правилам НИУ ВШЭ при обнаружении факта списывания за коллоквиум ставится 0 баллов.

1. Список определений

Контрольный вопрос на понимание определений включает в себя формулировку одного определения из списка ниже и контрольный вопрос по этому определению. Пример: «Функции (как частный случай отношений). Образы и прообразы множеств. Обратная функция. Пусть $f(x) = x^2$ — функция из \mathbb{Z} в \mathbb{Z} . Найдите полный прообраз множества $\{1, 2, 3, 4\}$.»

- 1) Принцип математической индукции. Принцип полной математической индукции (на шаге используются все предыдущие утверждения).
- 2) Правила суммы и произведения в комбинаторике. Задачи о подсчете путей.
- 3) Конечные слова в алфавите. Соответствие между двоичными словами, подмножествами множества и характеристическими функциями.
- 4) Биномиальные коэффициенты.
- 5) Треугольник Паскаля. Рекуррентное соотношение.
- 6) Множества, теоретико-множественные операции.
- 7) Логические значения и логические связки. Задание булевых функций таблицами истинности.
- 8) Взаимосвязь множеств и булевой логики.
- 9) ДНФ. Многочлены Жегалкина.
- 10) Формула включений–исключений.
- 11) Бинарные отношения.
- 12) Отношения эквивалентности. Классы эквивалентности.
- 13) Функции (как частный случай отношений). Образы и прообразы множеств. Обратная функция.
- 14) Виды функций: инъекции, сюръекции и биекции.
- 15) Композиция отношений.
- 16) Частичный порядок.
- 17) Изоморфизм порядков.
- 18) Минимальные и максимальные элементы в частичных порядках. Наибольшие и наименьшие элементы.
- 19) Бесконечно убывающие цепи. Фундированные множества.
- 20) Принцип математической индукции для фундированных множеств.
- 21) Равномощные множества.

- 22) Счетные мощности. Множества мощности континуум.
- 23) Ориентированные и неориентированные графы. Степени вершин.
- 24) Подграфы. Циклы и пути. Клики и независимые множества.
- 25) Отношение достижимости и компоненты связности графа.
- 26) Деревья.
- 27) Полное двоичное дерево.
- 28) Двудольные графы. Булев куб.
- 29) Вероятностное пространство, вероятностная мера: равновероятная и неравновероятная модель. События, из вероятность. Несовместные события.
- 30) Условные вероятности, независимые события.
- 31) Случайная величина. Математическое ожидание случайной величины.

2. Примерные задачи на понимание материала курса

На коллоквиуме Вам может попасться похожая по уровню сложности задача не из этого списка.

1. Остается ли принцип математической индукции (на натуральных числах) верным, если из него убрать базу? Если да, то докажите его, если нет, приведите пример.
2. Для каких n и h неравенство Бернулли обращается в равенство?
3. Сколько есть двоичных слов длины n , содержащих k единиц?
4. Сколько есть путей по целым точкам прямой, которые начинаются в 0 ; заканчиваются в n ; каждый шаг направлен вправо и имеет целую положительную длину?
5. Сколько есть путей, состоящих из k шагов, которые идут по целым точкам прямой, которые начинаются в 0 ; заканчиваются в n ; каждый шаг направлен вправо и имеет целую положительную длину?
6. Существует ли такое множество A , что для любого множества X выполняется $A \times X = A$?
7. Приведите пример таких множеств A, B , для которых $A \setminus B = B \setminus A$.
8. Полна ли система связей “конъюнкции” и “дизъюнкции”?
9. Верно ли, что $f: A \rightarrow A$ биекция, тогда и только тогда, когда существует $g: A \rightarrow A$, такая что $f \circ g = id_A$?
10. Пусть f — функция из множества A в множество B , $X, Y \subseteq A$, $U, V \subseteq B$. Верны ли для любых множеств f, A, B, X, Y, U, V следующие утверждения
 - а) $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$;
 - б) из равенства $f(X) = f(Y)$ следует $X \cap Y \neq \emptyset$;
 - в) $f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$;
 - г) из равенства $f^{-1}(U) = f^{-1}(V)$ следует $U = V$.
11. Приведите пример рефлексивного и транзитивного отношения, не являющегося ни симметричным, ни антисимметричным.
12. Пусть $f: A \rightarrow B$ — некоторая функция. Будут ли следующие отношения отношениями эквивалентности на множестве A :
 - а) $R_f(x, y) \iff f(x) = f(y)$;
 - б) $R_{\bar{f}}(x, y) \iff f(x) \neq f(y)$?В случае положительного ответа на вопрос, опишите классы эквивалентности для соответствующего отношения.
13. Верно ли, что композиция отношений нестрогого частичного порядка является отношением нестрогого частичного порядка?
14. Приведите пример частично упорядоченного множества, не являющегося линейно упорядоченным.
15. Приведите пример частично упорядоченного множества, не являющегося фундированным.
16. Сколько существует неизоморфных нестрогих частичных порядков на множестве $V = \{0, 1, 2\}$?
17. В графе степени всех вершин не меньше 2. Докажите, что в нем есть цикл.
18. Верно ли, что если между двумя вершинами неориентированного графа есть путь, то есть и простой путь?
19. Для каких n в булевом кубе размерности n есть эйлеров цикл?
20. Приведите пример дерева на 2017 вершинах, к которому нельзя добавить ребро так, чтобы получился 2-раскрашиваемый граф.
21. Приведите пример ациклического ориентированного графа, к которому нельзя добавить ребро так, чтобы граф остался ациклическим.
22. Вероятностное пространство: последовательности (x_1, x_2, x_3, x_4) длины 4, состоящие из целых чисел в диапазоне от 1 до 6. Все исходы равновозможны. Найдите вероятность события « $x_1 x_2 x_3 x_4$ чётно».
23. Приведите пример вероятностного пространства и таких событий A, B в этом пространстве, что

$$\Pr[A | B] = \frac{1}{3} \Pr[A].$$

24. Существуют ли такие события A и B , что $\Pr[A] = \Pr[B] = \Pr[A | B] = 1/2$, а $\Pr[B | A] = 1/3$?

25. О событиях A и B вероятностного пространства U известно, что $\Pr[A] = \Pr[B] = 4/5$. Могут ли при этом события $A \cup B$ и B быть независимыми?

26. Вероятностное пространство: последовательности (x_1, x_2, x_3, x_4) длины 4, состоящие из целых чисел в диапазоне от 1 до 6. Все исходы равновозможны. Найдите математическое ожидание случайной величины $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$.

3. Вопрос на знание доказательств

- 1) Существование 2-цветной раскраски областей на плоскости.
- 2) Неравенство Бернулли.
- 3) Сумма обратных квадратов меньше 2.
- 4) Число слов из n букв в алфавите размера k . Число списков длины k из n объектов без повторений.
- 5) Формула для числа k -элементных подмножеств в n -элементном множестве.
- 6) Бином Ньютона. Сумма биномиальных коэффициентов. Знакопеременная сумма биномиальных коэффициентов.
- 7) Числа Каталана: число правильных скобочных структур, рекуррентная формула.
- 8) Числа Каталана: формула через биномиальные коэффициенты.
- 9) Количество решений уравнения $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ в неотрицательных целых числах.
- 10) Полнота системы связок «отрицание» и «конъюнкция».
- 11) Формула включений–исключений.
- 12) Теорема о классах эквивалентности для отношения эквивалентности.
- 13) Композиция отношений. Композиция функций является функцией. Композиция биекций является биекцией.
- 14) Критерий существования функции, обратной к данной.
- 15) Подмножество счетного множества конечно или счетно. Во всяком бесконечном множестве есть счетное подмножество.
- 16) Объединение конечного или счётного числа конечных или счётных множеств конечно или счётно.
- 17) Счетность множества конечных последовательностей натуральных чисел.
- 18) Если множество A бесконечно, а множество B конечно или счётно, то множество $A \cup B$ равно-мощно A .
- 19) Теорема Кантора – Бернштейна.
- 20) Равномощность отрезка и квадрата.
- 21) Несчетность множества бесконечных двоичных последовательностей.
- 22) Существование множеств, более мощных чем континуум.
- 23) Связь строгих и нестрогих частичных порядков.

- 24) Доказательство неизоморфности порядков $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z} + \mathbb{N}$.
- 25) Доказательство эквивалентности трех определений фундированных множеств.
- 26) Доказательство того, что достижимость в неориентированном графе является отношением эквивалентности и что всякий граф можно разбить на компоненты связности.
- 27) Доказательство формулы для суммы степеней вершин в графе. Оценка числа компонент связности.
- 28) Эквивалентность различных определений деревьев: число вершин и число ребер, минимально связные графы, графы без простых циклов, графы с единственностью простых путей.
- 29) Двудольные графы — это в точности графы без циклов нечетной длины.
- 30) Лемма о степенях вершин в ориентированных графах. Понятие сильной связности. Компоненты сильной связности.
- 31) Критерий существования эйлера цикла в графе: неориентированные и ориентированные графы.
- 32) Теорема Рамсея. Верхняя оценка чисел Рамсея.
- 33) Оценка вероятности объединения событий. Формула включений-исключений для вероятностей.
- 34) Задача о беспорядках.
- 35) Вероятностный метод. Нижняя оценка на диагональные числа Рамсея.
- 36) Формула полной вероятности. Формула Байеса.
- 37) Задача о днях рождения.