Дискретная математика **Пилотный поток**

Неделя 23. Машины Тьюринга-2

1. Упорядочим слова в алфавите $\{0,1\}$ по правилу: более короткое слово меньше более длинного, а слова одинаковой длины упорядочиваются лексикографически. Докажите, что существует МТ, которая по слову в алфавите $\{0,1\}$ находит следующее слово в указанном порядке.

2. Докажите существование МТ, которая по входу $\langle M\rangle\#\langle x\rangle\#1^t$ проверяет, останавливается ли машина M на входе x за t шагов.

3. Пусть $T(\langle M\rangle,\langle w\rangle)$ — номер того такта работы машины Тьюринга M на входе w, на котором каретка в последний раз оказывается над пустым символом. (Если каретка никогда не оказывается над пустым символом или оказывается над ним бесконечно много раз, $T(\langle M\rangle,\langle w\rangle)$ не определена.) Вычислима ли функция $T(\langle M\rangle,\langle w\rangle)$?

4. Докажите существование МТ, которая вставляет «много» пробелов. Более точно это означает, что машина преобразует конфигурацию $\ldots[u\#wq_0\#v]\ldots$ в конфигурацию $\ldots[u\#wq_1\#\Lambda\ldots\Lambda\#v]\ldots$. Здесь Λ — пустой символ, q_0, q_1 состояния, символы $\#$, $[$, $]$ — разделители, слова u,v,w не содержат разделителей, а количество добавленных пустых символов равно длине слова w.

5. Докажите, что для каждой МТ M существует МТ M_{all}, которая исполняет работу M на всех входах. Это означает, что M_{all} работает по стадиям: первая стадия состоит в исполнении первого такта на первом входе, вторая — второго такта на первом входе и первого такта на втором входе и т.д.: на N-й стадии исполняется N-й такт на первом входе, $(N-1)$-й такт на втором входе, $\ldots$, первый такт на N-м входе. Порядок на входах такой же, как в задаче 1.

6. Пусть имеется МТ M, которая вычисляет функцию $V(n,x)$ от двух переменных. Докажите, что существует такая МТ S, которая по входу n выдаёт как результат описание МТ M_n, вычисляющей функцию $f_n(x)=V(n,x)$.

7. Выведите неразрешимость проблемы остановки МТ напрямую из тезиса Чёрча–Тьюринга, не ссылаясь на существование универсальной машины или абстрактную теорию алгоритмов.

8. Разрешима ли проблема остановки для машин Тьюринга с «хрупкой» лентой? Если такая машина меняет символ одной из ячеек ленты второй раз, то она останавливается («лента рвётся»).

9. Разрешима ли проблема остановки для машин Тьюринга с засорившейся кареткой? Это такие машины, которые могут записать на ленту только один символ $*$ («кляксу»). Формально это означает, что таблица переходов удовлетворяет условию если $\delta(a,q)=(a',q',d)$, то $a'\in\{a,*\}$.

Дискретная математика **Пилотный поток**

Домашнее задание 23

1. Пусть машины M_1 и M_2 вычисляют функции $f_1\colon B^* \to \{0,1\}$ и $f_2\colon B^* \to \{0,1\}$. Докажите, что существует МТ M, которая вычисляет дизъюнкцию $f_1 \vee f_2$ этих функций.

2. Разрешимо ли множество описаний МТ, которые при работе на пустом входе не изменяют положение каретки на ленте? (Здесь разрешимость можно обосновывать неформально, не обязательно строить машину Тьюринга.)

3. Разрешимо ли множество описаний МТ, которые на любом входном слове работают не дольше 2017 тактов? (Здесь разрешимость можно обосновывать неформально, не обязательно строить машину Тьюринга.)

4. Докажите, что неразрешима проблема остановки МТ на пустом входе. Формально: не существует машины Тьюринга, которая получает на вход описание машины Тьюринга M и даёт результат 1, если M останавливается на пустом входе, и результат 0 в противном случае.

5. Пусть $T_a(\langle M\rangle, \langle w\rangle)$ — номер того такта работы машины Тьюринга M на входе w, на котором каретка в первый раз оказывается над символом a. (Если каретка никогда не оказывается над символом a, функция $T_a(\langle M\rangle, \langle w\rangle)$ не определена.) Вычислима ли функция $T_a(\langle M\rangle, \langle w\rangle)$?