

Занятие 20. Вычислимые функции, разрешимые и перечислимые множества

1. Будет ли разрешимым (перечислимым) множество простых чисел?
2. Вычислима ли следующая функция?

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{если существует бесконечно много пар простых чисел } p, p+2, \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

3. Докажите, что множество $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ перечислимо.
4. Докажите, что если A, B — перечислимые множества, то и множества $A \cup B, A \cap B$ перечислимы.
5. Перечислимо ли множество таких натуральных n , что уравнение $x^n + y^{n+1} = z^{n+2}$ имеет решение в положительных целых числах?
6. Докажите, что если существует алгоритм перечисления элементов некоторого множества, то существует также и алгоритм, который перечисляет элементы этого множества без повторений.
7. Докажите, что алгоритм перечисления элементов множества $S \subseteq \mathbb{N}$ в возрастающем порядке существует тогда и только тогда, когда множество S разрешимо.
8. Всюду определенная функция $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ невозрастающая. Верно ли, что f вычислима?
9. Докажите, что множество конечных наборов натуральных чисел перечислимо.
10. а) Докажите, что множество многочленов с целыми коэффициентами, имеющие целые корни, перечислимо.
б) Будет ли оно разрешимо?
11. Докажите, что множество булевых функций, имеющих схемную сложность $> 2^{n/2}$ в стандартном базисе (т.е. не выражающихся схемой меньшего размера), разрешимо. Здесь n — количество переменных функции. Считайте, что алгоритм разрешения получает на вход булеву функцию в виде таблицы значений.
12. Пусть S — это множество таких n , что десятичная запись числа e содержит по крайней мере n девяток подряд. Докажите, что множество S разрешимо. (Разрешается использовать тот факт, что e — иррациональное число.)
13. Докажите, что множество таких программ на языке C размером меньше 1Gb, которые никогда не останавливаются, разрешимо. (Считайте, что программа исполняется на идеализированном компьютере, имеющем потенциально бесконечную память.)

Домашнее задание 20

1. Верно ли, что множество наборов подряд идущих цифр длины 5, входящих в десятичную запись числа π **а)** перечислимо; **б)** разрешимо? Можно считать, что любая цифра числа π вычислима.
2. Пусть множество X натуральных чисел перечислимо. Перечислимо ли множество $Y \subseteq X$ тех чисел из X , у которых сумма цифр равна 10?
3. Докажите, что если A, B — перечислимые множества, то и множество $A \times B$ перечислимо.
4. Всюду определенная функция $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ строго возрастает и множество ее значений содержит все натуральные числа за исключением конечного множества. Докажите, что f вычислима.
5. Существуют ли такие множества $X, Y \subseteq \mathbb{N}$, что X разрешимо, $X \cup Y$ разрешимо, а Y не разрешимо?
6. Пусть S — разрешимое множество натуральных чисел. Множество D состоит из всех простых делителей множества S . Верно ли, что D перечислимо?
7. Пусть f — вычислимая биекция между \mathbb{N} и \mathbb{N} . Докажите, что обратная биекция f^{-1} также вычислима.