Занятие 15. Равномощные множества. Счетные множества

1. Докажите, что множество простых чисел счетно.

2. Докажите, что множество конечных подмножеств рациональных чисел счетно.

3. Пусть множество A конечно, а множество B счетно. Докажите, что множество всюду определённых функций $f\colon A \to B$ счетно.

4. Пусть множество A счетно, а B — конечно. При каких условиях $A \times B$ счетно?

5. Пусть A равномощно B, а C равномощно D. Верно ли, что

а) $A \times C$ равномощно $B \times D$;

б) $A \cap C$ равномощно $B \cap D$?

6. Пусть A бесконечно, а B счетно. Верно ли, что множество $A \cup B$ равномощно множеству A?

7. Постройте явные биекции между

а) множеством двоичных слов и натуральными числами;

б) парами натуральных чисел и натуральными числами;

в) конечными последовательностями натуральных чисел и натуральными числами.

Пояснение. Слово «явная» не имеет точного формального смысла. Понимать его нужно так, что биекция должна быть задана правилом, которое применимо к любому элементу области определения и для применения этого правила «нам придется только механически следовать предписаниям, как если бы мы были роботами: от нас не потребуется ни понимания, ни искусства, ни изобретательности» (С. Клини). Такие правила в дальнейшем мы будем называть алгоритмами.

8. Постройте биекции между

а) Двумя отрезками разной длины;

б) Двумя кругами на плоскости;

в) интервалом, лучом, отрезком и прямой (в любой последовательности). В каких случаях эта биекция может быть непрерывной?

Дискретная математика **Основной поток**

Домашнее задание 15

1. Верно ли, что если $A \setminus B$ бесконечно, а B счетно, то $A \setminus B$ равномощно A?

2. Верно ли, что если A бесконечно, а B счетно, то $A \triangle B$ равномощно A?

3. Верно ли что если A бесконечно, а B — конечно, то то $A \setminus B$ равномощно A?

4. Докажите, что любое множество непересекающихся интервалов на прямой конечно или счетно.

5. Докажите, что всякое бесконечное множество содержит бесконечное число непересекающихся счетных подмножеств.

6. Функция называется периодической, если для некоторого числа T и любого x выполняется $f(x+T) = f(x)$. Докажите, что множество периодических функций $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ счетно.

7. Постройте явную биекцию между конечными строго возрастающими последовательностями натуральных чисел и конечными последовательностями натуральных чисел. (По определению, последовательности длины 0 и 1 являются возрастающими.)