Дискретная математика **Пилотный поток**

Неделя 14. Числа-1

1. Известно, что a, b, c, d — положительные целые числа, $ab = cd$ и a делится на c. Докажите, что d делится на b.

2. При делении некоторого числа m на 13 и 15 получили одинаковые частные, но первое деление было с остатком 8, а второе без остатка. Найдите число m.

3. Какой остаток даёт число 100^{100} при делении на 99?

4. а) Докажите, что число $a^3 - a$ делится на 3 при любом целом a. **б)** Пусть p — простое число, большее 3. Докажите, что $p^2 - 1$ делится на 24.

5. Докажите, что если $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$, то $ac \equiv bd \pmod{m}$.

6. Найдите наибольший общий делитель 238 и 39.

7. Найдите решения уравнения $45x - 37y = 25$ в целых числах.

8. Сколько положительных делителей имеет число $2^{10} \cdot 3^5 \cdot 5^3$?

9. Докажите, что $(p-1)!$ дает остаток -1 по модулю p для любого простого числа p.

10. Докажите, что для любого целого числа $n \geqslant 2$ между n и $n!$ есть простое число.

11. Пусть НОД$(a, b) = 1$. Найдите возможные значения НОД$(a + b, a^2 + b^2)$.

12. Формулы включения – исключения для НОК и НОД. Докажите, что для положительных x, y, z выполняются равенства

а) $\text{НОК}(x, y) = \dfrac{xy}{\text{НОД}(x, y)}$;

б) $\text{НОК}(x, y, z) = \dfrac{xyz \cdot \text{НОД}(x, y, z)}{\text{НОД}(x, y) \cdot \text{НОД}(x, z) \cdot \text{НОД}(y, z)}$;

в) попробуйте выразить НОК$(x_1, \ldots, x_n)$ аналогичным образом.

13. а) Верно ли, что для всякого n существует такая арифметическая прогрессия $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, что числа $a_1, \ldots, a_n$ попарно взаимно просты?

б) Верно ли, что существует такая арифметическая прогрессия $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, что для всякого n числа $a_1, \ldots, a_n$ попарно взаимно просты?

14. Делимость биномиальных коэффициентов. В этой задаче p — некоторое простое число.

а) $\dbinom{p}{k}$ делится на p.

б) Разделим числа n и k на p с остатком: $n = n'p + n_0$, $k = k'p + k_0$. Тогда

$$\binom{n}{k} \equiv \binom{n'}{k'}\binom{n_0}{k_0} \pmod{p}.$$

в) Запишем n и k в p-ичной системе счисления: $n = n_0 + n_1 p + \ldots n_d p^d$, $k = k_0 + k_1 p + \cdots + k_d p^d$. Биномиальный коэффициент $\dbinom{n}{k}$ делится на p тогда и только тогда, когда в одном из разрядов $k_i > n_i$.

г) Максимальная степень p, на которую делится $\dbinom{x+y}{y}$, равна количеству переносов при сложении столбиком чисел x, y, записанных в p-ичной системе счисления.

Дискретная математика **Пилотный поток**

Домашнее задание 14

1. Найдите остаток при делении 99^{1000} на 100.

2. Докажите, что число $x + 10y$ делится на 13 тогда и только тогда, когда $y + 4x$ делится на 13.

3. Решите сравнение $53x \equiv 1 \pmod{42}$.

4. Существует ли решение уравнения $74x + 47y = 2900$ в неотрицательных целых числах?

5. Докажите, что дробь $\dfrac{n^2 - n + 1}{n^2 + 1}$ несократима при всех положительных целых n.

6. Найдите НОД$(3^{133} - 1, 3^{101} - 1)$.

7. Докажите, что числитель несократимой дроби, равной $\dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{2} + \dots + \dfrac{1}{p-1}$, делится на p для любого простого $p > 2$.

8. Докажите, что число $2^{2^n} - 1$ имеет по крайней мере n различных простых делителей.