Дискретная математика **Основной поток**

Занятие 14. Случайные величины и математическое ожидание

1. Про неотрицательную случайную величину X известно, что $\Pr[X < 5] = 1/2$ и $\Pr[X > 5] = 1/2$. Найдите возможные значения математического ожидания $\mathrm{E}[X]$.

2. Каждый элемент n-элементного множества с вероятностью p независимо от других включается в множество S_p. Найдите математическое ожидание числа элементов в множестве S_p.

3. По 15 мальчиков и девочек стоят в шеренге в случайном порядке. Сколько в среднем девочек стоянит левее всех мальчиков?

4. Выбирается случайно и равновозможно 10 чисел из множества целых чисел от 0 до 29. Найдите математическое ожидание суммы этих чисел.

5. Подбрасывается «честная» монета (вероятности выпадения орла и решки равны) вплоть до выпадения первого орла. Найдите математическое ожидание количества бросков.

6. Студент за выполнение домашней работы получает оценку от 1 до 10. Средняя оценка за серию домашних работ оказалась равной 6. Докажите, что доля работ, оценка за которые меньше 4, не превосходит 4/7.

7. (Неравенство Чебышева.) Для случайной величины X обозначим $M = \mathrm{E}[X]$, $D = \mathrm{E}[X^2] - (\mathrm{E}[X])^2$. Докажите, что

$$\Pr\left[|X - M| \geqslant a\right] \leqslant \frac{D}{a^2}\ .$$

8. Вероятностное пространство состоит из двоичных строк длины n, все строки равновозможны. Докажите, что вероятность события «количество единиц в строке отличается от $n/2$ не меньше, чем на $\sqrt{n}$» не превосходит 1/4.

9. В неориентированном графе без петель и кратных ребер n вершин и $nd/2$ ребер (то есть средняя степень вершины равна d), $d \geqslant 1$. Докажите, что найдется такой циклический обход вершин графа $(v_1 v_2 \dots v_n)$, в котором каждая вершина встречается ровно один раз и более $d/2$ из n пар (v_1, v_2), (v_2, v_3), $\dots$, (v_{n-1}, v_n), (v_n, v_1) являются ребрами графа.

10. Рассмотрим последовательность $a_0, a_1, \dots, a_n$, где каждое $a_i \in \{0,1\}^n$ — последовательность нулей и единиц длины n. Последовательность строится следующим образом. Первый член последовательности $a_0 = (0, 0, \dots, 0)$ — последовательность из одних нулей. Каждый следующий член a_{i+1} получается из a_i заменой значения одной случайно выбранной координаты на противоположное. Рассмотрим случайную величину X — количество единиц в последовательности a_n. Найдите $\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}[X]/n$.

Дискретная математика **Основной поток**

Домашнее задание 14

1. В лотерее на выигрыши уходит 40% от стоимости проданных билетов. Каждый билет стоит 100 рублей. Докажите, что вероятность выиграть 5000 рублей (или больше) меньше 1%.

2. По таблицам смертности, составленным в 1693 г. Э. Галлеем, средняя продолжительность жизни была 26 лет. При этом вероятность прожить не больше 8 лет была 1/2. Какова была средняя продолжительность жизни тех людей, которые прожили не меньше 8 лет? (Укажите интервал возможных при данных условиях значений, учитываются только полные годы.)

3. Первый игрок кидает кость 2 раза. Его выигрыш — произведение выпавших чисел. Второй кидает ту же кость один раз. Его выигрыш — квадрат выпавшего числа.

а) У кого из них больше средний выигрыш?

б) А о том, что кость — честная, никто не говорил.

4. Выбирается случайное слово длины 20 в алфавите $\{a, b\}$ (все слова равновозможны). Найдите математическое ожидание числа подслов ab в этом слове.

5. Проректор по работе со студентами Академии народного хозяйства завтракает в кафе "Мама, я на паре"каждое утро. В меню 10 вариантов завтрака, из которых он равновероятно и независимо выбирает один. Сколько в среднем различных завтраков прорекор попробует за 3 рабочие недели (15 дней)?.

6. *Инверсией* в перестановке $a_1 a_2 \ldots a_n$ называется такая пара индексов $i < j$, что $a_i > a_j$. Пусть π — случайная перестановка (все перестановки равновозможны). Найдите математическое ожидание $\mathrm{E}[I(\pi)]$ количества инверсий $I(\pi)$.

7. Пусть X — неотрицательная случайная величина. Известно, что $\mathrm{E}[2^X] = 5$. Докажите, что

$$\Pr[X \geqslant 6] < 1/10.$$

8. В каждую жвачку вложен один из n вкладышей, причем каждый вкладыш встречается с вероятностью $1/n$. Сколько в среднем надо купить жвачек, чтобы собрать полную коллекцию вкладышей?

9. В неориентированном графе без петель и кратных ребер графе n вершин и $nd/2$ рёбер (то есть средняя степень вершины равна d), $d \geqslant 1$. Докажите, что в графе есть независимое множество размера не меньше $n/2d$.

Подсказка. В решении этой задачи поможет случайное множество V_p, в которое каждая вершина входит с вероятностью p независимо от других вершин. (При подходящем значении параметра p.)