Дискретная математика **Основной поток**

Неделя 11. Соответствия и функции.

Note: Мы называем функцией любое функциональное соответстие и не предполагаем, что оно всюду определено.

1. Рассмотрим функцию $f : A \to B$. Определите понятия "область определения"и "область значений"в терминах образов и прообразов f.

2. Каким свойствам удовлетворяет соответствие

а) производная;

б) неопределенный интеграл,

сопоставляющее функциям из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ их же.

в) Будут ли эти соответствия обратными друг другу? Правыми или левыми?

3. Тот же вопрос для функций **а)** A^{-1}, **б)** A^T, **в)** $\det A$, где A — квадратная матрица $n \times n$.

4. Пусть $|X| = 3$, $|Y| = 4$. Существует ли между X и Y

а) функциональное, всюду определенное и сюрьективное;

б) инъективное, всюду определенное и сюрьективное;

в) инъективное, сюрьективное, но не всюду определенное

соответствие?

5. Пусть f — функция из множества A в множество B, $X, Y \subseteq A$, $U, V \subseteq B$. Верны ли для любых множеств f, A, B, X, Y, U, V следующие утверждения

а) $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$;

б) из равенства $f(X) = f(Y)$ следует $X \cap Y \neq \varnothing$;

в) $f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$;

г) из равенства $f^{-1}(U) = f^{-1}(V)$ следует $U = V$.

6. Функция f определена на множестве X и принимает значения в множестве Y, при этом $B \subseteq Y$. Какой знак сравнения можно поставить вместо ?, чтобы утверждение $f(f^{-1}(B))\ ?\ B$ стало верным?

7. Постройте биекцию между конечными подмножествами множества положительных целых чисел и конечными строго возрастающими последовательностями положительных целых чисел.

8. Верно ли, что

а) композиция $f \circ g$ инъекции f и инъекции g является инъекцией?

б) композиция $f \circ g$ сюръекции f и сюръекции g является сюръекцией?

в) композиция $f \circ g$ сюръекции f и инъекции g является сюръекцией?

г) композиция $f \circ g$ инъекции f и сюръекции g является инъекцией?

9. Функции в этой задаче предполагаются всюду определенными. Говорят, что $g\colon B \to A$ является *левой обратной* (соответственно *правой обратной*) к f, если $g \circ f = \mathrm{id}_A$ (соответственно $f \circ g = \mathrm{id}_B$).

а) Приведите примеры, когда левая обратная не является правой обратной и когда правая обратная не является левой.

б) Может ли такое случиться для конечных множеств?

в) Может ли быть так, что у одной функции есть и левая, и правая обратные, но они различны?

г) Для каких функций существует левая обратная?

д) Для каких функций существует правая обратная?

Дискретная математика **Основной поток**

Домашнее задание 11

1. При каких условиях **а)** объединение **б)** пересечение двух всюду определенных функций будет функцией. (Указание: главное — понять, что такое объединение и пересечение функций. Вспомните определение функции и подумайте.)

2. Пусть f — функция из множества X в множество Y, при этом $A \subseteq X$. Какой знак сравнения можно поставить вместо ?, чтобы утверждение

$$f^{-1}(f(A)) \ ? \ A$$

стало верным? (Возможные знаки сравнения в этой и двух следующих задачах: $\subseteq$, $\supseteq$, $=$. Нужно учесть все варианты.)

3. Пусть f — функция из множества $A \cup B$ в множество Y. Какой знак сравнения можно поставить вместо ?, чтобы утверждение

$$f(A \setminus B) \ ? \ f(A) \setminus f(B)$$

стало верным?

4. Пусть f — функция из множества X в множество Y, при этом $A \cup B \subseteq Y$. Какой знак сравнения можно поставить вместо ?, чтобы утверждение

$$f^{-1}(A \setminus B) \ ? \ f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$$

стало верным?

5. Пусть $|A| = a$, $|B| = b$. Найдите число.

а) функций;

б) инъективных функций

из A в B.

6. Постройте биекцию между

а) отрезками $[0, 1]$ и $[a, b]$;

б) интервалом $(0, 1)$ и лучом $(0, +\infty)$;

в) полуинтервалом $[0, 1)$ и интервалом $(0, 1)$.

7. О всюду определенных функциях f, g из множества A в себя известно, что $f \circ g \circ f = \mathrm{id}_A$. Верно ли, что f — биекция? (Множество A не обязательно конечное.)

8. О функциях f из множества A в множество B и g из множества B в множество A (не обязательно всюду определенных) известно, что $g \circ f = \mathrm{id}_A$. Верно ли, что g всюду определена? (Множество A не обязательно конечное.)