Неделя 9. Графы-1

Если не оговорено противное, под словом «граф» далее понимается неориентированный граф без петель и кратных рёбер.

1. Докажите, что не существует графа с пятью вершинами, степени которых равны 4, 4, 4, 4, 2.

2. В графе 100 вершин и 800 рёбер.

а) Докажите, что в этом графе есть хотя бы одна вершина степени не меньше 16.

б) Может ли так случиться, что все степени этого графа имеют степень 16?

3. Докажите, что если в графе есть хотя бы две вершины, то есть две вершины одинаковой степени.

4. Докажите, что в дереве из не менее чем двух вершин всегда есть вершина степени 1.

5. Существует ли дерево на 9 вершинах, в котором 2 вершины имеют степень 5?

6. В дереве нет вершин степени 2. Докажите, что количество висячих вершин (т.е. вершин степени 1) больше половины общего количества вершин.

7. Существует ли выпуклый многогранник, у которого 15 граней и все грани являются треугольниками?

8. *Дополнением* $\bar{G}$ графа G называется такой граф на том же множестве вершин, что и у графа G, в котором пара вершин связана ребром тогда и только тогда, когда в G эта пара вершин ребром не связана.

Докажите, что граф или его дополнение связны (возможно оба связны).

9. В гости придут либо 5, либо 7 человек. На какое минимальное число кусков нужно порезать торт, чтобы гарантированно можно было раздать всем поровну?

10. Вершинным покрытием в графе называется подмножество вершин, содержащее хотя бы один конец каждого ребра. Придумайте алгоритм, работающий за полиномиальное время, и находящий в графе вершинное покрытие, которое по размеру превышает минимальное не более чем в два раза.

Домашнее задание 9

1. Существует ли граф на 8 вершинах, в котором 23 ребра и есть вершина степени 1?

2. В связном графе на 10 вершинах есть три вершины степени 4. Может ли этот граф быть деревом?

3. В некоторой стране 17 городов, каждый из которых соединён дорогами не менее, чем с 8 другими. Докажите, что из любого города можно добраться до любого другого (возможно, проезжая через другие города).

4. Простой путь наибольшей длины в дереве назовем *диаметром*. Найдите количество диаметров в полном бинарном дереве глубины n (расстояние от корня до листьев равно n).

5. Куб со стороной $n \geqslant 3$ разбит перегородками на единичные кубики. Какое минимальное число перегородок между единичными кубиками нужно удалить, чтобы из каждого кубика можно было добраться до границы куба?

6. В графе $2n + 1$ вершина, степень каждой равна n. Докажите, что после удаления любого подмножества из менее чем n рёбер получается связный граф.

7. В графе на n вершинах для любой пары вершин u и v есть ровно две вершины, с которыми соединена и u, и v. Докажите, что степени всех вершин в этом графе одинаковы.