

Неделя 9. Бинарные отношения. Отношения эквивалентности

Обозначения: xPy сокращение для $(x, y) \in P$. По аналогии с отношениями типа "больше". P^{-1} — обратное отношение, содержит такие пары (x, y) , что $(y, x) \in P$. \bar{P} — дополнительное отношение, содержит пары, не содержащиеся в P . $P \circ Q$ — композиция отношений P и Q .

- Найдите результат операций над отношениями, определенными на множестве действительных чисел.
 - $(>)$; б) $(>)^{-1}$; в) $(\geq)\Delta(\leq)$; г) $(>) \cap (<)$; д) $(=) \circ (>)$; е) $(<) \circ (<)$; ж) $(<) \circ (>)$.
- Найдите $R \circ R$, где $R(x, y)$ — бинарное отношение на множестве \mathbb{R} , означающее, что
 - $y = x + 1$; б) $x + y = 1$.
- Выразите отношение "племянник" через отношения "отец" и "мать".
- На множестве A — задана функция полезности $u : A \rightarrow \mathbb{R}_+$, Бинарное отношение P определим так, что $xPy \Leftrightarrow u(x) > u(y)$. Какими свойствами обладает P ?
- Пусть бинарные отношения P_1 и P_2 а) рефлексивны; б) симметричны; в) антисимметричны. Будут ли \bar{P}_1 , P_1^{-1} , $P_1 \cap P_2$, $P_1 \cup P_2$, $P_1 \setminus P_2$, $P_1 \circ P_2$ обладать теми же свойствами?
- Граф транзитивного бинарного отношения содержит цикл. Может ли оно быть антирефлексивным?
- Докажите, что операция умножения бинарных отношений дистрибутивна относительно объединения:

$$(P_1 \cup P_2) \circ Q = (P_1 \circ Q) \cup (P_2 \circ Q),$$

$$Q \circ (P_1 \cup P_2) = (Q \circ P_1) \cup (Q \circ P_2).$$

- Укажите, какие из следующих отношений будут отношениями эквивалентности. Если ответ положительный, укажите, какими будут классы эквивалентности:
 - отношение равенства остатков целых чисел при делении на m ;
 - отношение взаимной простоты целых чисел;
 - отношение параллельности прямых (ответ зависит от того, по какому учебнику Вы учили геометию);
 - отношение перпендикулярности прямых?
- Пусть P_1 и P_2 — отношения эквивалентности. Докажите, что следующие условия равносильны:
 - Если классы эквивалентности P_1 и P_2 пересекаются, то один из них содержится в другом.
 - $P_1 \cup P_2$ — отношение эквивалентности.
 - $P_1 \cup P_2 = P_2 \circ P_1$.
- Отношение P симметрично и обладает свойством $\forall x, y, z (xPy \text{ и } y\bar{P}z) \Rightarrow x\bar{P}z$. Словами — "враг моего друга — мой враг". Верно ли, что P — отношение эквивалентности?

Домашнее задание 9

1. Для каких бинарных отношений P справедливо $\overline{P} = P^{-1}$?
2. Пусть бинарные отношения P_1 и P_2 транзитивны; Будут ли $\overline{P_1}$, $P_1 \cap P_2$, $P_1 \cup P_2$, $P_1 \circ P_2$ обладать теми же свойствами?
3. В колоде из 36 карт определено бинарное отношение "одна из карт старше 10-ки, другая младше". Будет ли оно симметричным? рефлексивным? транзитивным? Сколько пар входит в это отношение?
4. Бинарное отношение на множестве из 6 элементов содержит 33 пары. Может ли оно быть **а)** симметричным; **б)** транзитивным?
5. Пусть $|A| = n$. Найдите число **а)** всех; **б)** рефлексивных; **в)** симметричных; **г)** антисимметричных бинарных отношений на A .
6. Отношение эквивалентности P определено на множестве $A = \{a, b, c, d, e, f\}$. Известно, что aPb , bPc , $c\overline{P}d$, dPe , $e\overline{P}f$.
 - а) Найдите все такие отношения.
 - б) Как изменится ответ, если в A содержится дополнительно элемент g , про который не известно ничего?
7. Докажите рекуррентное соотношение для числа отношений эквивалентности на множестве из n элементов (p_n).

$$p_{n+1} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} p_i.$$

- 7.3'. Сколько решений может иметь уравнение $ax \equiv b \pmod{15}$ среди остатков при делении на 15? (x — неизвестная, a и b — некоторые целые числа).
- 7.6'. Найдите все остатки a по модулю 97, для которых уравнение $x^{48} \equiv a \pmod{97}$ имеет решения.