Дискретная математика **Основной поток**

Неделя 6. Графы — 3

1. Найдите все попарно неизоморфные деревья на 6 вершинах.

2. Пусть G — граф с n вершинами ($n \geq 3$), такой, что каждый граф, получающийся из него удалением одной вершины — дерево. Что это за граф?

3. Существует ли дерево на 2016 вершинах, в котором 4 вершины имеют степень 555?

4. Волейбольная сетка имеет вид прямоугольника размером 50×600 клеток. Какое наибольшее число веревочек можно перерезать так, чтобы сетка не распалась на куски?

5. В связном графе n вершин ($n > 2$). Докажите, что существует маршрут, проходящий по всем вершинам графа длиной не более **а)** $2n - 2$; **б)** $2n - 4$.

6. Вершины ориентированного графа — целые числа от 0 до 9. Ребро идет из вершины x в вершину y если $y - x = 3$ или $x - y = 5$. Найдите количество компонент сильной связности в этом графе.

7. Ориентированный граф называется турниром, если любые две вершины соединены ровно одним ребром (в каком-то из направлений). Докажите, что в турнире можно изменить ориентацию не более, чем одного ребра так, что он станет сильно связным.

8. Найдите максимальное количество простых путей с заданными концами в ориентированном ациклическом графе на n вершинах.

9. Известно, что в ориентированном графе на $\geqslant 2$ вершинах из любой вершины в любую другую идет ровно один простой путь. Верно ли, что выходные (они же исходящие) степени вершин в этом графе равны 1?

10. Докажите, что в K_n при $n \geqslant 2$ существует n^{n-2} остовных деревьев (формула Кэли). Вершины графа занумерованы от 1 до n и считаются различными.

Дискретная математика **Основной поток**

Домашнее задание 6

1. Докажите, что в дереве на $2n$ вершинах можно выбрать n вершин так, что ни одна пара выбранных вершин не соединена ребром (такие множества вершин называются *независимыми*).

2. В дереве нет вершин степени 2. Докажите, что число листьев больше половины общего числа вершин.

3. Граф G — дерево с $2n$ листьями. Докажите, что к G можно добавить n ребер так, чтобы он стал двусвязным, т.е. не распадался при удалении любого из ребер.

4. Куб со стороной $n \geqslant 3$ разбит перегородками на единичные кубики. Какое минимальное число перегородок между единичными кубиками нужно удалить, чтобы из каждого кубика можно было добраться до границы куба?

5. Найдите наибольшее целое положительное число, в котором все цифры разные, а любые две подряд идущие цифры образуют двузначное число, делящееся на 7.

6. Докажите, что на ребрах связного графа можно так ввести ориентацию, что некоторая вершина останется достижима из любой другой.

7. Докажите, что в турнире существует гамильтонов путь, т.е. путь, включающий в себя все вершины.

8. Выходная (она же исходящая) степень каждой вершины в ориентированном графе на n вершинах равна $n - 2$. Какое количество компонент сильной связности может быть в этом графе? Укажите все возможные значения.