

## Неделя 5. Графы — 2

1. Сколько правильных 2-раскрасок у двудольного графа?
2. Вершины графа —  $k$ -элементные подмножества 2016-элементного множества. Вершины соединены ребром, если соответствующие множества не пересекаются. При каких  $k$  граф  $G$  будет двураскрашиваемым?
3. На первом заседании парламента каждый из 450 депутатов парламента оскорбил ровно одного своего коллегу (и тот, разумеется, не остался в долгу). Докажите, что можно избрать парламентскую комиссию из 150 человек, среди членов которой никто никого не оскорблял.
4. Докажите или опровергните следующие утверждения:
  - а) каждый эйлеров двудольный граф имеет четное число ребер;
  - б) каждый эйлеров граф с четным числом вершин имеет четное число ребер.
5. На плоскости нарисовано несколько многоугольников, любые два из которых пересекаются не более, чем в двух точках. Докажите, что если картинка связна, то ее можно обвести, не отрывая карандаша от бумаги и не проходя по каждому участку ребра ровно один раз.
6. а) Доска имеет форму креста, который получается, если из квадратной доски  $4 \times 4$  выкинуть угловые клетки. Можно ли обойти ее ходом шахматного коня и вернуться на исходное поле, побывав на всех полях ровно по разу?  
б) Тот же вопрос, если выкинуто не 4, а 3 угловых клетки.
7. Ребро называется мостом (а вершина — шарниром), если с их удалением из графа он становится несвязным. Докажите, что
  - а) если в графе есть мост, в нем не может быть ни эйлерова ни гамильтонова цикла;
  - б) если в графе есть шарнир, в нем не может быть гамильтонова цикла, но может быть эйлеров.
8. Существует ли связный граф на 10 вершинах, такой, что
  - все степени вершин не меньше 4;
  - в нем нет гамильтонова цикла.

## Домашнее задание 5

1. Граф получен из цикла на  $2n$  вершинах добавлением рёбер, соединяющих противоположные вершины.
  - а) При каких  $n$  этот граф 2-раскрашиваемый?
  - б) При каких  $n$  вершины этого графа можно правильно раскрасить в 3 цвета?
2. При каких  $m$  и  $n$  и  $k$  а) путь б) цикл длины  $k$  будет подграфом графа  $K_{m,n}$ ?
3. Приведите пример негамильтонова графа, степени вершин которого равны  $(3,3,3,3,4,4,4,4)$ .
4. Докажите, что в связном регулярном графе типа  $(8,3)$  есть гамильтонов цикл.
5. При каких  $m$  и  $n$  в графе  $K_{m,n}$  существует
  - а) эйлеров цикл;
  - б) гамильтонов цикл?
  - в) Постройте оба цикла для графа  $K_{6,6}$ .
6. Верно ли, что в любом связном графе существует маршрут, проходящий по всем ребрам графа ровно 2 раза?
7. Рассмотрим граф на множестве  $S_n$  перестановок  $n$  элементов. Ребро графа соединяет две перестановки тогда и только тогда, когда перестановки отличаются транспозицией (т.е. перестановкой двух соседних элементов). При каких  $n$  в этом графе есть гамильтонов цикл?