Дискретная математика **Основной поток**

Неделя 4. Графы — 1

1. Докажите, что число людей, когда-либо живших на Земле и сделавших нечетное число рукопожатий, четно.

2. а) В графе n вершин. Сколько в нем может быть ребер? **б)** В графе n ребер. Сколько в нем может быть вершин?

3. Докажите, что

а) не существует графа, степени вершин которого попарно различны;

б) существует граф с $2n$ вершинами, степени которых равны $1, 1, 2, 2, \dots, n, n$.

4. Приведите пример графа (или докажите, что его не существует), степени вершин которого равны

а) (1,1,1,2,3,3,4);

б) (1,1,1,2,3,3,3);

в) (1,2,2,2,5,5,5).

5. Вершинами графа, который называется *булев куб размерности n* и обозначается B_n, являются двоичные слова длины n, а соседями являются пары слов, отличающихся в одной позиции.

а) Сколько вершин в булевом кубе B_n?

б) Сколько ребер в булевом кубе B_n?

в) Сколько в булевом кубе B_n подграфов, которые являются графами–путями длины 2 (вершин в таком графе 3)?

6. Докажите, что граф или его дополнение связны (возможно оба).

7. Граф с 100 вершинами имеет 98 вершин степени 30, и по одной вершине степеней 25 и 15.

а) Докажите, что вершины степеней 25 и 15 лежат в одной компоненте связности.

б) Обязательно ли этот граф связен?

8. Из графа K_n выкинули k ребер.

а) При каких k можно гарантировать, граф останется связным?

б) Тот же вопрос для $K_{m,n}$.

в) Приведите пример регулярного графа, для которого полученная в предыдущих пунктах оценка не выполняется.

9. В связном графе степени всех вершин четные. Докажите, что граф останется связным и после удаления любого из ребер.

10. Степень каждой из 20 вершин графа G не меньше 14. Докажите, что найдется 4 вершины, попарно соединенные между собой. (Научно: в G есть подграф, изоморфный K_4.)

11. Приведите 5 попарно неизоморфных регулярных графов типа (8,3).

Дискретная математика **Основной поток**

Домашнее задание 4

1. В компании у каждых двух людей ровно пять общих знакомых. Докажите, что количество пар знакомых делится на 3.

2. **а)** В связном графе n вершин. Сколько в нем может быть ребер? **б)** В связном графе n ребер. Сколько в нем может быть вершин?

3. В графе $2n$ вершин, степень каждой не менее n. Обязательно ли в этом графе есть цикл длины **а)** 3; **б)** 4?

4. Докажите, что регулярный граф типа n, k существует, если и только если $k \leq n-1$ и nk четно.

5. Докажите, что из связного графа можно удалить одну из вершин (со всеми исходящими из нее ребрами), так, чтобы граф остался связен.

6. Докажите, что если в графе больше 5 вершин, либо сам граф, либо его дополнение содержат цикл длины 3.

а) Приведите пример графа на 5 вершинах, для которого утверждение предыдущего пункта неверно.

б) Сколько вершин должно быть в графе, чтобы либо он сам, либо его дополнение обязательно содержали хоть какой-нибудь цикл?

7. В простом связном графе n вершин, $n \geqslant 7$, и степени всех вершин равны 3. Докажите, что в этом графе есть простой путь длины 6.

8. **а)** В связном графе степени восьми вершин равны 3, а степени остальных — 4. Докажите, что нельзя удалить ребро так, чтобы граф распался на две изоморфные компоненты связности.

б) Тот же вопрос для 10 вершин степени 3.

9. Найдите все попарно неизоморфные графы со степенями вершин (3,3,3,3,3,3).