

Неделя 3. Комбинаторика и множества

1. Докажите тождества

а) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$;

б) $B \cup (A \setminus B) = A \cup B$;

в) $(A \setminus B) \cap ((A \cup B) \setminus (A \cap B)) = A \setminus B$;

г) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$.

2. Докажите, что

$$(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \Delta (B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n) \subseteq (A_1 \Delta B_1) \cup (A_2 \Delta B_2) \cup \dots \cup (A_n \Delta B_n)$$

для любых множеств A_i, B_i .

3. Докажите, что если какое-то равенство, содержащее переменные для множеств и операции \cap, \cup, \setminus , неверно, то можно найти контрпример к нему, в котором множества пусты или состоят из одного элемента.

4. В группе студентов есть один, который знает C++, java, python, huskell. Каждые три из этих языков знают два студента. Каждые два — 6 студентов. Каждый из этих языков знают по 15 студентов. Каково наименьшее количество студентов в такой группе?

5. При изготовлении пирожные — колечки трех сортов: шоколадные, с корицей и с орехами — упаковываются в стандартные коробки по 18 колечек в каждой. Каждая коробка может содержать колечки всех видов. Порядок колечек в коробке не существен. Сколько можно составить различных наборов колечек при условии, что в коробке шоколадных колечек не более 9, колечек с корицей не более 3, а ореховых не более 9?

6. Сколькими способами можно разрезать правильный n -угольник на треугольники, проводя диагонали?

7. Рассмотрим правильный $2n$ -угольник. Сколькими способами можно разбить его вершины на пары так, чтобы отрезки, соединяющие парные вершины, не пересекались?

8. Сколько есть таких последовательностей целых чисел a_1, \dots, a_n , что $a_1 = 0$ и $0 \leq a_{i+1} \leq a_i + 1$ для $1 \leq i < n$?

9. *Разложением* числа n называется такая последовательность положительных целых чисел x_1, x_2, \dots, x_k , что $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$. Найдите количество разложений n на нечетные слагаемые.

10. *Разбиением* числа N на k частей называется такая невозрастающая последовательность положительных целых чисел $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k$, что $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = N$. Чего больше, разбиений числа N на не более чем k слагаемых, или разбиений числа $N + k$ на ровно k слагаемых?

11. Чего больше, разбиений N на слагаемые, не превосходящие k , или разбиений N на не более чем k слагаемых?

12. Чего больше, разбиений n на различные слагаемые или на нечетные слагаемые?

Домашнее задание 3

1. Верно ли, что для любых множеств A , B и C выполняется равенство $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$?
2. Верно ли, что для любых множеств A , B и C выполняется равенство

$$((A \setminus B) \cup C) \cap (A \setminus (B \cap C)) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)?$$

3. Верно ли, что для любых множеств A и B выполняется равенство $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$?
4. Есть по 20 монет достоинством 1, 2 и 5 рублей (все монеты одного достоинства одинаковы). Сколькими способами из них можно выбрать 19 монет?
5. Клуб по “Что, где, когда” из 10 человек хочет отправить команду на соревнование. При этом в команде может быть любое число участников от 1 до 9. Чтобы отправить сильнейшую команду клуб хочет провести ряд отборочных игр команда на команду так, чтобы каждое подмножество членов клуба поучаствовало в играх в качестве команды ровно один раз. Докажите, что в таких играх каждая команда обязательно должна играть с командой в точности всех остальных членов клуба.
6. Три студента вместе решили 100 задач. Каждый из них при этом решил 60 задач. Задача называется легкой, если ее решили все, и трудной – если ее решил только один человек. На сколько число трудных задач отличается от числа легких задач и в какую сторону?
7. Сколькими способами можно разложить 8 различных предметов по 4 различным ящикам так, чтобы никакой ящик не оказался пустым?
8. Сколькими способами можно расставить числа от 1 до $2n$ в таблицу с двумя строками и n столбцами, чтобы числа в каждой строке и в каждом столбце возрастали?