Дискретная математика **Основной поток**

Неделя 3. Комбинаторика — 2

1. Докажите, что $\binom{n}{k} < \binom{n}{k+1}$ при $k < (n-1)/2$, и $\binom{n}{k} > \binom{n}{k+1}$ при $k > (n-1)/2$, т.е. последовательность биномиальных коэффициентов возрастает до середины, а потом убывает.

2. Найдите коэффициент при

а) x^3y^7 в разложении $(2x-y)^{10}$;

б) $x_1^3x_2x_4^5x_5$ в разложении $(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)^{10}$.

3. Докажите, что

$$\binom{n+k+1}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \ldots + \binom{n+k}{k}.$$

Предпочтительно комбинаторное рассуждение.

4. Сколькими способами можно составить букет из 17 цветов, если в продаже имеются гвоздики, розы, гладиолусы, ирисы, тюльпаны и васильки?

5. Сколькими способами можно выбрать 10 чисел от 1 до 100, чтобы среди них не было двух, отличающихся на единицу?

6. Ладья стоит на левом поле клетчатой полоски 1×30 и за ход может сдвинуться на любое количество клеток вправо.

а) Сколькими способами она может добраться до крайнего правого поля?

б) Сколькими способами она может добраться до крайнего правого поля ровно за 7 ходов?

7. В группе каждый из 4 языков знают 15 человек, каждые 2 — 6, каждые 3 языка — двое, все языки — один. Какое минимальное число людей может быть в группе?

8. Найдите число целых положительных чисел, не превосходящих 210 и не делящихся ни на 2, ни на 3, ни на 5, ни на 7;

9. Сколькими способами можно представить 1000000 в виде произведения трех множителей, если произведения, отличающиеся порядком множителей, считаются

а) разными;

б) одинаковыми.

10. В в аудитории n человек и столько же мест за партами. Студенты, рассчитывая написать следующую контрольную лучше, чем предыдущую, хотят сидеть не на том же месте, на котором писали первую. Но в суете перед второй контрольной все садятся на случайные места. Найдите вероятность того, что никто из студентов не окажется на "старом"месте.

Дискретная математика **Основной поток**

Домашнее задание 3

1. Какое слагаемое в разложении $(1+2)^n$ по формуле бинома Ньютона будет наибольшим?

2. Сколькими способами можно поселить 18 студентов в шесть комнат общежития: 2 двухместных, 2 трехместных и 2 четырехместных?

3. Докажите тождества:

а) $\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$;

б) $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$;

Предпочтительно комбинаторное рассуждение.

4. Сколькими способами можно разделить 100 одинаковых акций между пятью людьми так, чтобы каждому досталось не менее одной акции?

5. С понедельника по пятницу доктор должен принять 6 человек. Ежедневно он может принимать любое количество пациентов. Сколькими способами он может составить расписание приема? (Порядок приема пациентов в течение дня существенен.)

6. Общество из n членов выбирает из своего состава одного представителя.

а) Сколькими способами может произойти открытое голосование, если каждый голосует за одного человека (быть может, и за себя)?

б) Решите ту же задачу, если голосование тайное, т.е. учитывается лишь число голосов, поданных за каждого кандидата, и не учитывается, кто за кого голосовал персонально.

7. На дискотеке 80% времени был выключен свет, 90% времени играла музыка и 50% времени шел дождь. Какую наименьшую долю времени все это обязано было происходить одновременно?

8. Найдите число решений уравнения $x+y+z=n$, где x, y, z — *различные* неотрицательные целые числа.

9. Сколько решений (в целых неотрицательных числах) у уравнения $x_1+x_2+x_3+x_4=10$ при условии, что **а)** $x_1 \leqslant 3$; **б)** $x_1 \leqslant 3$, $x_2 \leqslant 3$; **в)** $x_1 \leqslant 3$, $x_2 \leqslant 3$, $x_3 \leqslant 3$; **г)** $x_1 \leqslant 3$, $x_2 \leqslant 3$, $x_3 \leqslant 3$, $x_4 \leqslant 3$?

10. При каких значениях n все числа в n-й строке треугольника Паскаля нечетны?