Программа "весеннего"коллоквиума по дискретной математике (основной поток)

В начале коллоквиума Вы получите билет, в котором будет три вопроса: вопрос на знание определений, задача, вопрос на знание доказательств. На подготовку ответа у Вас будет около часа. Коллоквиум Вы сдаете устно одному из преподавателей.

Оценка за коллоквиум формируется следующим образом. Вы получаете свой первый балл как только приходите на коллоквиум, еще 2 балла — за полный ответ на вопрос на знание определений, 3 балла — за правильное решение задачи, и последние 4 балла — за полный ответ на вопрос на знание доказательств.

По правилам НИУ ВШЭ при обнаружении факта списывания за коллоквиум ставится 0 баллов.

1. Вопросы на знание определений

1. Основные определения элементарной теории вероятностей: исходы, события, вероятность события.

2. Случайные графы. Конструкция и примеры использования.

3. Условная вероятность.

4. Независимые события. Основные свойства независимых событий.

5. Случайная величина и математическое ожидание.

6. Определение равномощных множеств. Основные свойства равномощности.

7. Определение счетного множества. Примеры.

8. Основные свойства счетных множеств.

9. Определение множества мощности континуум. Примеры.

10. Основные свойства континуальных множеств.

11. Булевы функции. Задание булевых функций таблицами истинности.

12. Определение полного базиса. Примеры полных и неполных базисов.

13. Разложение Рида.

14. ДНФ, СДНФ и СКНФ.

15. Полином Жегалкина.

16. Определение схемы в некотором функциональном базисе. Представление схем графами.

17. Определение схемной сложности функции.

18. Основные свойства вычислимых функций.

19. Определение разрешимого множества.

20. Определение перечислимого множества.

21. Свойства перечислимых множеств.

22. Определение универсальной вычислимой функции.

23. Определение отладочной функции.

24. Определение главной универсальной вычислимой функции.

25. Формулировка теоремы Успенского—Райса.

26. Формулировка теоремы о неподвижной точке.

27. Определение машины Тьюринга (с одной лентой и несколькими лентами).

28. Определение функции, вычислимой на машине Тьюринга.

2. Примерные задачи на понимание определений

На коллоквиуме Вам может попасться похожая по уровню задача не из этого списка.

1. Вероятностное пространство: последовательности (x_1, x_2, x_3, x_4) длины 4, состоящие из целых чисел в диапазоне от 1 до 6. Все исходы равновозможны. Найдите вероятность события «$x_1x_2x_3x_4$ чётно».

2. Приведите пример вероятностного пространства и таких событий A, B в этом пространстве, что $\Pr[A \mid B] = \frac{1}{3}\Pr[A]$.

3. Существуют ли такие события A и B, что $\Pr[A] = \Pr[B] = \Pr[A \mid B] = 1/2$, а $\Pr[B \mid A] = 1/3$?

4. О событиях A и B вероятностного пространства U известно, что $\Pr[A] = \Pr[B] = 4/5$. Могут ли при этом события $A \cup B$ и B быть независимыми?

5. Вероятностное пространство: последовательности (x_1, x_2, x_3, x_4) длины 4, состоящие из целых чисел в диапазоне от 1 до 6. Все исходы равновозможны. Найдите математическое ожидание случайной величины $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$.

6. Докажите, что множество непересекающихся отрезков на прямой конечно или счетно.

7. Докажите, что всякое бесконечное множество содержит бесконечное число непересекающихся счетных подмножеств.

8. Докажите, что биекций на множестве натуральных чисел континуум.

9. Докажите, что множество непрерывных функций $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ имеет мощность континуум.

10. Докажите, что множество биекций между двумя отрезками не равномощно континууму.

11. Докажите полноту базиса, состоящего из функций $x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$, x_1x_2, 1.

12. Постройте базис, состоящий из одной функции, существенно зависящей от 5 переменных.

13. Найдите полином Жегалкина для функции $\mathrm{MAJ}_4(x, y, z, t)$.

14. Рассматриваем схемы в стандартном базисе. Пусть схемная сложность функции f не больше A, а схемная сложность функции g не больше B. Докажите, что схемная сложность функции $f \oplus g$ не больше $A + B + 5$.

15. Постройте схему полиномиального размера, вычисляющую функцию MAJ_n.

16. Треугольником в графе называется тройка вершин, попарно соединенных между собой. Постройте схему полиномиального размера для функции $f\colon \{0,1\}^{\binom{n}{2}} \to \{0,1\}$, равной единице, тогда и только тогда, когда в данном на вход графе нет треугольников.

17. Докажите, что любую монотонную функцию от n переменных можно вычислить схемой размера $O(n2^n)$, используя только дизъюнкцию и конъюнкцию.

18. Постройте вычислимую биекцию между множествами $\mathbb{N}$ и $\mathbb{N} \setminus \{p^2 \mid p \in \mathbb{N}\}$.

19. Постройте вычислимую биекцию между множеством двоичных слов и натуральными числами.

20. Пусть f — вычислимая биекция между $\mathbb{N}$ и $\mathbb{N}$. Докажите, что обратная биекция f^{-1} также вычислима.

21. Докажите, что если функция f вычислима и $A \subset \mathbb{N}$ — перечислимое множество то и образ и прообраз множества A перечислимы.

22. Найдите разрешимое множество A и вычислимую функцию f такие, что прообраз $f^{-1}(A)$ неразрешим.

23. Пусть A — разрешимое множество, а B — перечислимое. Верно ли, что $B \setminus A$ — перечислимое?

24. Докажите, что декартово произведение перечислимых множеств перечислимо.

25. Постройте пример универсальной вычислимой функции U, для которой множество $\{U(p^2, p) : p \in \mathbb{N}\} = \{0\}$.

26. Пусть U — универсальная. Положим $V(n, x) = U(n-1, x)$, если $n > 0$, и $V(n, x) = 0$ иначе. Будет ли V универсальной?

27. Пусть $U(n,x)$ — главная универсальная вычислимая функция. Всегда ли будет ли универсальной функция $V(n,x) = U(p_n, x)$, где p_n — n-е простое число.

28. Пусть $U(p,x)$ — главная универсальная вычислимая функция. Докажите, что найдется бесконечно много таких p, что $U(p,x) = x$ для любого x.

29. Приведите пример машины Тьюринга, вычисляющей нигде неопределенную функцию.

30. Постройте машину Тьюринга, находящую неполное частное от деления на 3 в унарной системе.

3. Вопрос на знание доказательств

1. Формулировка и доказательство формулы включений и исключений для вероятностей.

2. Формула Байеса.

3. Формула полной вероятности.

4. Линейность математического ожидания случайных величин.

5. Формулировка и доказательство неравенства Маркова.

6. Подмножество счетного множества конечно или счетно. Любое бесконечное множество содержит счетное подмножество.

7. Счетное объединение конечных или счетных множеств конечно или счетно.

8. Счетность декартова произведения счетных множеств.

9. Несчетность множества мощности континуум.

10. Теорема Кантора—Бернштейна: формулировка и доказательство.

11. Полнота стандартного базиса.

12. Существование и единственность полинома Жегалкина.

13. Существование булевых функций от n переменных схемной сложности $\Omega(2^n/n)$.

14. Верхняя оценка $O(n2^n)$ схемной сложности булевой функции от n переменных.

15. Схема умножения n-битовых чисел сложности $O(n^2)$.

16. Схема проверки связности графа на n вершинах полиномиального размера.

17. Разрешимые множества перечислимы.

18. Теорема Поста (о разрешимых и перечислимых множествах): формулировка и доказательство.

19. Перечислимые множества являются множествами значений вычислимых функций.

20. Перечислимые множества являются множествами значений всюду определенных вычислимых функций.

21. Множества значений всюду определенных функций перечислимы.

22. Множество значений всюду определенной вычислимой функции является областью определения вычислимой функции.

23. Область определения вычислимой функции является множеством значений вычислимой функции.

24. Непустое множество значений вычислимой функции является множеством значений всюду определенной вычислимой функции.

25. Пример перечислимого неразрешимого множества.

26. Невозможность универсальной нумерации всюду определенных вычислимых функций: формулировка и доказательство.

27. Функция вычислима тогда и только тогда, когда ее график перечислим.

28. Пример вычислимой функции без всюду определенного вычислимого продолжения.

29. Доказательство теоремы Успенского–Райса.

30. Доказательство теоремы о неподвижной точке.