Об элементарных теориях систем ординальных обозначений на основе схем рефлексии

Ф.Н. Пахомов*
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН,
Москва
pakhfn@mi.ras.ru

Март 2015

Аннотация

Мы рассматриваем конструктивную систему ординальных обозначений до ординала ε_0, введенную Л.Д. Беклемишевым, и ее фрагменты, составляющие системы обозначений для меньших ординалов ω_n (башни из ω-экспонент высотой n). Эти системы основываются на известной полимодальной логике доказуемости Джапаридзе. Они тесно связаны с техникой ординального анализа арифметики Пеано **PA** и ее фрагментов на основе итерированных схем рефлексии. Системы ординальных обозначений могут рассматриваться как модели языка первого порядка. Мы доказываем, что полная система обозначений и ее фрагменты для ординалов $\geq \omega_4$ обладают неразрешимыми элементарными теориями. В тоже время фрагменты, соответствующие ординалам $\leq \omega_3$, обладают разрешимыми элементарными теориями. Также мы получаем результаты о разрешимости элементарных теорий для этих систем ординальных обозначений с обедненными сигнатурами.

1 Введение

Одним из центральных вопросов в теории доказательств является вопрос о характеризации формальных теорий ординалами. Исследования такого рода восходят к Г. Генцену [10], который доказал непротиворечивость формальной арифметики Пеано **PA** с помощью трансфинитной индукции до ординала $\varepsilon_0 = \sup\{\underbrace{\omega^{\omega^{\cdots^{\omega}}}}_{n \text{ раз}} \mid n \in \omega\}$. Г. Генцен также доказал, что ординал ε_0 является точной верхней гранью ординалов, для которых в **PA** доказуема трансфинитная индукция (см. обзоры [26, 16, 17]).

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-50-00005).

Ординалы, возникающие в теории доказательств, описываются в терминах конструктивных систем ординальных обозначений. Рассмотрение таких систем восходит к А. Черчу и С.К. Клини [13, 7, 18].

Системы ординальных обозначений S, возникающие в теории доказательств, как правило, порождаются некоторым набором многоместных операций $f_0, f_1, \ldots$ из ординалов в ординалы. Замкнутые термы, составленные из функций $f_0, f_1, \ldots$, играют роль ординальных обозначений. На элементах множества $\boldsymbol{T}_S$ всех замкнутых термов рассматривается бинарный предикат $<_S$ сравнения значений замкнутых термов. При этом, предикат $<_S$ должен быть рекурсивным.

Для любой системы функций S имеется максимальный ординал α_S такой, что всякий ординал $\beta < \alpha_S$ равен значению некоторого терма из $\boldsymbol{T}_S$. В этом случае мы говорим, что S является системой ординальных обозначний для ординала α_S. Из рекурсивности отношения $<_S$ следует рекурсивность предиката равенства значений термов $=_S$ и разрешимость множества $\boldsymbol{D}_S$ всех термов, значение которых меньше α_S. Тем самым упорядоченное множество $(\boldsymbol{D}_S/{=_S}; <_S)$ изоморфно множеству $(\alpha_S; <)$. Во всех рассматриваемых нами случаях $\boldsymbol{D}_S$ совпадает с $\boldsymbol{T}_S$. Поэтому, такую систему ординальных обозначений мы рассматриваем, как рекурсивную модель $(\boldsymbol{T}_S/{=_S}; <_S, f_0, f_1, \ldots)$.

Для одного ординала могут иметься неэквивалентные системы ординальных обозначений. Отсюда возникают вопросы об определении наиболее простых систем ординальных обозначений и о сравнении свойств имеющихся систем (см. [23, 14]).

Наиболее известной из таких систем для ординала ε_0 является система ординальных обозначений, основанная на теореме Кантора о нормальной форме ординалов. Эта теорема утверждает, что каждый ординал $\alpha > 0$ может быть единственным образом представлен в виде

$$\alpha = \omega^{\alpha_1} + \omega^{\alpha_2} + \ldots + \omega^{\alpha_n}, \text{ для некоторых ординалов } \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \ldots \geq \alpha_n.$$

Отсюда вытекает, что любой ординал $< \varepsilon_0$ равен значению некоторого замкнутого терма, составленного из константы 0, функции $+$ и функции $f\colon x \longmapsto \omega^x$. Канторовская система может рассматриваться как модель $(\varepsilon_0; <, 0, +, f)$. Неразрешимость элементарной теории этой модели является, по-видимому, фольклорным результатом.

В этой статье мы рассматриваем проблему разрешимости элементарных теорий для некоторых альтернативных систем ординальных обозначений для ординалов $\leq \varepsilon_0$.

Для ординалов без дополнительной структуры этот вопрос был исследован А.Тарским и А. Мостовским [20, 8]. Ими было доказано, что для каждого ординала α элементарная теория $\mathbf{Th}(\alpha; <)$ разрешима. Позднее этот результат был усилен Ю.Р. Бюхи, который показал, что для каждого ординала α слабая монадическая теория структуры $(\alpha; <)$ разрешима [5]. Также им была построена интерпретация элементарной теории $\mathbf{Th}(2^\alpha; <, +)$ в слабой монадической теории модели $(\alpha; <)$, из чего следует разрешимость первой.

Кофинальной последовательностью для счетного, предельного ординала α называется последовательность ординалов $\beta_0, \beta_1, \ldots$ такая, что каждый $\beta_i < \alpha$ и $\sup\{\beta_i \mid i \in \omega\} = \alpha$. Определение стандартной системы кофинальных последовательностей для ординала ε_0 может быть найдено в [16] и на странице 22.

Л. Бро [4] для всякого $\alpha < \varepsilon_0$ установил разрешимость монадической теории $(\alpha; <, \mathsf{Cs})$, где $\mathsf{Cs}(x, y)$ — это предикат, выполняющийся на паре (β, γ) тогда и только тогда, когда γ является членом стандартной кофинальной последовательности для β.

Для ординала ε_0 имеется несколько различных «естественных» систем ординальных обозначений (см. [15]). Одна из таких систем была недавно предложена Л.Д. Беклемишевым [1, 2]. Сейчас мы опишем эту систему, опустив некоторые технические детали. Пусть $\boldsymbol{W}_\omega$ — множество всех слов над алфавитом всех натуральных чисел. В [1] была дана естественная сюръекция o_0 из $\boldsymbol{W}_\omega$ в ε_0, мы приводим ее определение на странице 16. Рассмотрим отношение эквивалентности $\sim$ на $\boldsymbol{W}_\omega$ и отношение линейного предпорядка $\prec$ на $\boldsymbol{W}_\omega$ такие, что для любых слов $A, B \in \boldsymbol{W}_\omega$:

$$A \sim B \iff o_0(A) = o_0(B) \quad \text{и} \quad A \prec B \iff o_0(A) < o_0(B).$$

В разделе 2 мы даем комбинаторные определения $\sim$ и $\prec$. Для пустого слова $\Lambda \in \boldsymbol{W}_\omega$ значение $o_0(\Lambda) = 0$. Функции $a_i \colon \boldsymbol{W}_\omega \to \boldsymbol{W}_\omega$, $a_i \colon A \longmapsto Ai$ согласованы с отношением эквивалентности $\sim$. Тем самым модель $(\boldsymbol{W}_\omega/{\sim}; \prec, \Lambda, a_0, a_1, \ldots)$ может рассматриваться, как система ординальных обозначений для ε_0.

Для каждого n определим ординалы ω_n:

$$\omega_0 = 1; \;\; \omega_{n+1} = \omega^{\omega_n}; \;\; \omega_\omega = \varepsilon_0 = \sup\{\omega_n \mid n \in \omega\}.$$

Для каждого n мы обозначаем через $\boldsymbol{W}_n$ множество всех слов из алфавита $\{0, \ldots, n\}$. Для каждого n модели $(\boldsymbol{W}_n/{\sim}; \prec, \Lambda, a_0, \ldots, a_n)$ является системой ординальных обозначений для ординала ω_{n+1}.

Основным результатом нашей работы является доказательство неразрешимости элементарной теории $\mathbf{Th}(\boldsymbol{W}_\omega/{\sim}; \prec, \Lambda, a_0, a_1, \ldots)$. Фактически мы доказываем, что для каждого ординала $\alpha \in [3, \omega]$ элементарная теория $\mathbf{Th}(\boldsymbol{W}_\alpha/{\sim}; \prec, a_1, a_3)$ неразрешима. Кроме того, мы показываем, что для каждого $\alpha \in [2, \omega]$ элементарная теория $\mathbf{Th}(\boldsymbol{W}_\alpha/{\sim}; \prec, \Lambda, a_0, a_1, a_2)$ разрешима.

На множестве $\boldsymbol{W}_\omega$ рассматривалась естественная, согласованная с отношением эквивалентности $\sim$ бинарная операция $\wedge \colon \boldsymbol{W}_\omega \times \boldsymbol{W}_\omega \to \boldsymbol{W}_\omega$ (см. [1]). Для каждого ординала $\alpha \le \omega$ множество $\boldsymbol{W}_\alpha$ замкнуто относительно $\wedge$. В [25] было показано, что элементарная теория $\mathbf{Th}(\boldsymbol{W}_\alpha/{\sim}; \wedge)$ неразрешима при каждом $\alpha \in [2, \omega]$. Там же было показано, что элементарная теория $\mathbf{Th}(\boldsymbol{W}_\alpha/{\sim}; \wedge)$ разрешима при $\alpha \in \{0, 1\}$ и то, что при всех $\alpha \le \omega$ отношение $\prec$ и функции a_i определимы в структуре $(\boldsymbol{W}_\alpha/{\sim}; \wedge)$. В настоящей статье мы рассматриваем структуры с той же предметной областью, что и в [25], но наша сигнатура менее выразительна, чем сигнатура из [25], что существенно влияет на разрешимость. Элементарная теория $\mathbf{Th}(\boldsymbol{W}_2/{\sim}; \wedge)$ неразрешима, в то время как элементарная теория $\mathbf{Th}(\boldsymbol{W}_2/{\sim}; \prec, \Lambda, a_0, a_1, a_2)$ разрешима.

1.1 Алгебры рефлексии

В этом параграфе мы кратко описываем происхождение изучаемой нами системы ординальных обозначений Беклемишева (подробнее см. [1, 2, 21]). В работах [6, 15] была установлена связь между этой системой и системой, введенной К. Шютте и С. Симпсоном ранее в [19].

Будем называть *геделевыми теориями* рекурсивно аксиоматизируемые теории в языке формальной арифметики $(0, S, +, \cdot)$, снабженные алгоритмом перечисляющим их нелогические аксиомы. Фиксируем некоторую геделеву теорию $\mathbf{T}_0$.

Для натурального n определим класс арифметических формул Σ_n, как состоящий из всех формул вида

$$\exists x_1 \ldots \exists x_{m_1} \forall x_{m_1+1} \ldots \forall x_{m_2} \ldots \mathrm{Q}_n x_{m_{n-1}} \ldots \mathrm{Q}_n x_{m_n} \mathsf{A},$$

где A является формулой с ограниченными кванторами, $\mathrm{Q}_n = \forall$, если n четно и $\mathrm{Q}_n = \exists$, если n нечетно.

Для каждого натурального числа n и геделевой теории $\mathbf{T}$ определим предложение $\mathsf{RFN}_{\Sigma_n}(\mathbf{T})$, являющееся формализацией утверждения «для всякой $\mathsf{A}(x) \in \Sigma_n$, если $\mathsf{A}(k)$ доказуема в $\mathbf{T}$ для каждого числа k, то $\forall x \mathsf{A}(x)$ истинна». Отметим, что предложение $\mathsf{RFN}_{\Sigma_0}(\mathbf{T})$ эквивалентно предложению, выражающему непротиворечивость геделевой теории $\mathbf{T}$.

Бинарное отношение $<_0$ на множестве геделевых теорий задается следующим образом:

$$\mathbf{U}_1 <_0 \mathbf{U}_2 \overset{\mathrm{def}}{\iff} \mathbf{U}_2 \vdash \mathsf{RFN}_{\Sigma_0}(\mathbf{U}_1).$$

Операторы $\mathcal{R}_0$,$\mathcal{R}_1$,..., действующие на множестве геделевых теорий, определяются следующим образом:

$$\mathcal{R}_n \colon \mathbf{U} \longmapsto \mathbf{T}_0 + \mathsf{RFN}_{\Sigma_n}(\mathbf{U}).$$

Если $\mathbf{T}$ и $\mathbf{U}$ рекурсивно аксиоматизируемые теории, у которых совпадают множества теорем, то мы пишем $\mathbf{T} \equiv \mathbf{U}$.

Мы рассматриваем $\mathfrak{S}_\omega$ — множество геделевых теорий, полученное в результате замыкания множества $\{\mathbf{T}_0\}$ относительно применений всевозможных операторов $\mathcal{R}_k$. При подходящей теории $\mathbf{T}_0$ теория, аксиоматизируемая всеми аксиомами теорий из $\mathfrak{S}_\omega$, является альтернативной аксиоматизацией первопорядковой арифметики $\mathbf{PA}$ (в частности, в качестве $\mathbf{T}_0$, подходит слабая арифметическая теория $\mathbf{I\Delta}_0 + \mathsf{Exp}$, см. определение в [11]). Отметим, что структура $(\mathfrak{S}_\omega; \mathbf{T}_0, \equiv, <_0, \mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1, \ldots)$ изоморфна описываемой ниже комбинаторным образом структуре $(\boldsymbol{W}_\omega; \Lambda, \sim, \prec, a_0, a_1, \ldots)$. Мы будем называть элементы $\boldsymbol{W}_\omega$ и $\mathfrak{S}_\omega$ *соответствующими*, если они переходят друг в друга под действием этого изоморфизма.

1.2 Логика GLP

Полимодальная логика **GLP** была введена Г.К. Джапаридзе [22]. Язык этой логики образуется из языка логики высказываний обогащением унарными связками $\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle, \ldots$. Следующие аксиомы задают аксиоматизацию этой логики в гильбертовском стиле:

0. тавтологии исчисления высказываний **PC**;

1. $\langle n \rangle (A \vee B) \to (\langle n \rangle A \vee \langle n \rangle B)$;

2. $\neg \langle n \rangle \neg \top$;

3. $\langle n\rangle A \to \langle n\rangle (A \wedge \neg\langle n\rangle A)$;

4. $\langle n\rangle A \to \langle k\rangle A$, для $k \leq n$;

5. $\langle k\rangle A \to \neg\langle n\rangle\neg\langle k\rangle A$, для $k < n$;

6. $\dfrac{A \qquad A \to B}{B}$;

7. $\dfrac{A \to B}{\langle n\rangle A \to \langle n\rangle B}$.

Арифметическая полнота логики $\mathbf{GLP}$ была доказана Джапаридзе [22]. Мы опишем другой вариант, восходящий к [12]. Назовем *арифметическими оценками* $(\cdot)^\star$ полимодальных формул функции, которые произвольно заданы на пропозициональных переменных, коммутируют со всеми пропозициональными связками и такие, что $(\langle n\rangle\varphi)^\star = \mathsf{RFN}_{\Sigma_n}(\mathbf{T}_0 + (\varphi)^\star)$. Известно, что для достаточно сильных теорий $\mathbf{T}_0$, в $\mathbf{GLP}$ доказуема формула φ если и только если $\mathbf{T}_0$ доказывает $(\varphi)^\star$ для каждой арифметической оценки $(\cdot)^\star$ [12].

Рассмотрим множество всех формул вида $\langle n_1\rangle \dots \langle n_k\rangle\top$, где $\top$ пропозициональная константа «истина». Мы обозначаем это множество через $\mathbb{W}_\omega$. Мы рассматриваем бинарное отношение $<_0$ на множестве $\mathbb{W}_\omega$:

$$\varphi <_0 \psi \stackrel{\text{def}}{\iff} \mathbf{GLP} \vdash \psi \to \langle 0\rangle\psi.$$

Для достаточно сильных, корректных теорий $\mathbf{T}_0$ из теоремы об арифметической полноте следует, что $(\mathbb{W}_\omega; \top, \leftrightarrow, <_0, \langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \dots)$ изоморфна $(\mathfrak{S}_\omega; \mathbf{T}_0, \equiv, <_0, \mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1, \dots)$. Этот изоморфизм имеет место и для весьма слабых теорий $\mathbf{T}_0$ и, в частности, для $\mathbf{I\Delta}_0 + \mathsf{Exp}$, несмотря на то, что арифметическая полнота $\mathbf{GLP}$ для этой теории, насколько известно автору, является открытым вопросом.

2 Система ординальных обозначений

Рассмотрим $\boldsymbol{W}_\omega$ — множество всех конечных слов в алфавите ω всех натуральных чисел. Мы обозначаем эти слова символами $A, B, C, D, \dots$. Для слов $A, B \in \boldsymbol{W}_\omega$ выражение AB обозначает конкатенацию слов A и B. Для слова $A \in \boldsymbol{W}_\omega$ и числа $n \in \omega$ выражение A^n обозначает слово $\underbrace{AA\dots A}_{n \text{ раз}}$. Мы обозначаем символом Λ пустое слово. Длина слова A обозначается через $|A|$.

Для всякого $k \in \omega$ множество всех слов из $\boldsymbol{W}_\omega$, содержащих лишь символы большие или равные k, обозначается через $\boldsymbol{S}_k$. Для $\alpha \leq \omega$ обозначим через $\boldsymbol{W}_\alpha$ множество всех слов из $\boldsymbol{W}_\omega$, все символы которых меньше или равны α.

Мы начинаем строить определение линейного предпорядка $\precsim$ на множестве $\boldsymbol{W}_\omega$. Также мы выражаем в терминах $\precsim$ отношение эквивалентности $\sim$ и строгое бинарное отношение $\prec$, соответствующее $\precsim$:

$$A \sim B \stackrel{\text{def}}{\iff} A \precsim B \,\&\, B \precsim A,$$

$$A \prec B \stackrel{\text{def}}{\iff} A \precsim B \,\&\, \neg B \precsim A.$$

Далее, ничего дополнительно не оговаривая, мы считаем $\precsim$ стандартным предпорядком на $\boldsymbol{W}_\omega$. Такие понятия, как минимальный элемент множества $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{W}_\omega$, слово A меньше (больше, не меньше, не больше) слова B и т.д. мы будем понимать в смысле $\precsim$. Мы говорим, что последовательность $(A_1, \dots, A_n)$ элементов $\boldsymbol{W}_\omega$ лексикографически не больше последовательности $(B_1, \dots B_m)$ элементов $\boldsymbol{W}_\omega$ тогда и только тогда, когда либо $n \leq m$ и $A_i \sim B_i$, либо существует $s < \min(m, n)$ такое, что $A_{s+1} \precsim B_{s+1}$ и при i от 1 до s мы имеем $A_i \sim B_i$. Отметим, что из того, что $\precsim$ является линейным предпорядком на некотором $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{W}_\omega$ следует, что лексикографическое сравнение будет являться линейным предпорядком на множестве $\boldsymbol{A}^{<\omega}$ всех конечных последовательностей из элементов $\boldsymbol{A}$.

По определению мы считаем, что $\Lambda \precsim \Lambda$.

Пусть r некоторое натуральное число и уже определен результат $\precsim$ сравнения для всех пар (A', B') таких, что при некотором n слово $A'B'$ лежит в $\boldsymbol{S}_{n+1} \cap \boldsymbol{W}_{n+r}$. Определим результат $\precsim$ сравнения для всех пар (A, B) таких, что $AB \in \boldsymbol{S}_n \cap \boldsymbol{W}_{n+r}$ при некотором n. Рассмотрим пару (A, B) такую, что $AB \in \boldsymbol{S}_n \cap \boldsymbol{W}_{n+r}$, где n — это минимальный символы содержащийся в слове AB. Очевидно, что мы можем единственным образом выбрать натуральное число k, слова $A_1, \dots, A_k \in \boldsymbol{S}_{n+1} \cap \boldsymbol{W}_{n+r}$, натуральное число l и слова $B_1, \dots, B_l \in \boldsymbol{S}_{n+1} \cap \boldsymbol{W}_{n+r}$ такие, что $A = A_1 n \dots n A_k$ и $B = B_1 n \dots n B_l$. Заметим, что нами уже определены все попарные $\precsim$ сравнения между элементами множества $\{A_1, \dots, A_k, B_1, \dots, B_l\}$. Пусть $(C_1, \dots, C_f)$ и $(D_1, \dots, D_g)$ являются некоторыми лексикографически максимальными подпоследовательностями последовательностей $(A_1, \dots, A_l)$ и $(B_1, \dots, B_k)$ соответственно. Положим $A \precsim B$ в том и только том случае,если последовательность $(C_1, \dots, C_f)$ лексикографически меньше или равна последовательности $(D_1, \dots, D_g)$; отметим, что в этом определение мы опираемся на предположение о том, что $\precsim$ является линейным предпорядком на $\boldsymbol{S}_{n+1} \cap \boldsymbol{W}_{n+r}$.

Одновременной индукцией по r мы доказываем для всех натуральных r, что для всех n бинарное отношение $\precsim$, ограниченное на множество $\boldsymbol{S}_n \cap \boldsymbol{W}_{n+r}$, является линейным предпорядком. Тем самым, $\precsim$ действительно является линейным предпорядком на $\boldsymbol{W}_\omega$.

Пусть теория $\mathbf{T}_0$ — теория не доказывающая предложений ложных в стандартной модели арифметики и содержащая $\mathbf{I\Delta}_0 + \mathsf{Exp}$.

Факт 1. *Для всяких $n_1, \dots, n_k$, $m_1, \dots, m_l$ имеют место эквивалентности*

1. $n_1 \dots n_k \prec m_1 \dots m_l \iff \mathbf{GLP} \vdash \langle m_l \rangle \dots \langle m_1 \rangle \top \to \langle 0 \rangle \langle n_k \rangle \dots \langle n_1 \rangle \top \iff \mathcal{R}_{n_k}(\dots(\mathcal{R}_{n_1}(\boldsymbol{T}_0))\dots) <_0 \mathcal{R}_{m_l}(\dots(\mathcal{R}_{m_1}(\boldsymbol{T}_0))\dots)$;

2. $n_1 \dots n_k \sim m_1 \dots m_l \iff \mathbf{GLP} \vdash \langle n_k \rangle \dots \langle n_1 \rangle \top \leftrightarrow \langle m_l \rangle \dots \langle m_1 \rangle \top \iff \mathcal{R}_{n_k}(\dots(\mathcal{R}_{n_1}(\boldsymbol{T}_0))\dots) \equiv \mathcal{R}_{m_l}(\dots(\mathcal{R}_{m_1}(\boldsymbol{T}_0))\dots)$.

Доказательство. Пусть $A = n_1 \dots n_k \in \boldsymbol{W}_\omega$. Мы обозначаем через $A^\star$ теорию $\mathcal{R}_{n_k}(\dots(\mathcal{R}_{n_1}(\mathbf{T}_0))\dots)$. Обозначим через $A^\#$ полимодальную формулу $\langle n_k \rangle \dots \langle n_1 \rangle \top$.

Хотя, насколько известно автору, в общем случае арифметическая полнота логики $\mathbf{GLP}$ относительно теорий $\mathbf{T}_0$, рассматриваемового нами вида, является открытым вопросом, мы можем легко доказать ее форму для интересного нам класса формул. Покажем, что для $A, B \in \boldsymbol{W}_\omega$

1. $\mathbf{GLP} \vdash A^{\#} \leftrightarrow B^{\#} \iff A^{\star} \equiv B^{\star}$,

2. $\mathbf{GLP} \vdash B^{\#} \to \langle 0 \rangle A^{\#} \iff A^{\star} <_0 B^{\star}$.

Импликации $\Rightarrow$ здесь являются следствием арифметической корректности полимодальной логики доказуемости в форме из [21, Лемма 5.3]. Обратные импликации имеют место в силу того, что:

1. в силу [3, Утверждения 3] и [3, Утверждения 4] по крайней мере одно из следующих утверждений имеет место:
   (a) $\mathbf{GLP} \vdash B^{\#} \to \langle 0 \rangle A^{\#}$,
   (b) $\mathbf{GLP} \vdash A^{\#} \leftrightarrow B^{\#}$,
   (c) $\mathbf{GLP} \vdash A^{\#} \to \langle 0 \rangle B^{\#}$;

2. в силу иррефлексивности $<_0$ на ω-корректных теориях, имеющейся в силу второй теоремы Геделя о неполноте и транзитивности $<_0$, имеющейся в силу корректности **GLP** [21, Лемма 5.3], не более чем одно из следующих утверждений имеет место:
   (a) $A^{\star} <_0 B^{\star}$,
   (b) $A^{\star} \equiv B^{\star}$,
   (c) $B^{\star} <_0 A^{\star}$.

Непосредственно из доказанной выше частичной арифметической полноты логики **GLP** следует, что для $A, B, C \in \boldsymbol{W}_\omega$ мы имеем

$$A^{\star} \equiv B^{\star} \Rightarrow (AC)^{\star} \equiv (BC)^{\star}.$$

С использованием указанной выше арифметической полноты мы эквивалентно переформулируем некоторые результаты [3]. Переформулировка [3, Лемма 1*(iv)*] состоит в том, что для $n \geq 0$, $A, B \in \boldsymbol{S}_{n+1}$ и $C \in \boldsymbol{W}_\omega$

$$A^{\star} \equiv B^{\star} \Rightarrow (CnA)^{\star} \equiv (CnB)^{\star}.$$

Переформулировка [3, Лемма 2], использующая, кроме теоремы о арифметической полноте, еще и [3, Следствие 8], состоит в том, что для всяких $n \geq 0$, $k \geq 2$ и $A_1, A_2, \ldots, A_k \in \boldsymbol{S}_{n+1}$, где $A^{\star}_{k-1} <_0 A^{\star}_k$, имеет место следующая эквивалентность теорий

$$(A_1 n \ldots n A_{k-2} n A_{k-1} n A_k)^{\star} \equiv (A_1 n \ldots n A_{k-2} n A_k)^{\star}.$$

Рассмотрим бинарное отношение R на множестве $\boldsymbol{W}_\omega$

$$B_1 \mathrel{\mathsf{R}} B_2 \overset{\text{def}}{\iff} (B^{\star}_1 \equiv B^{\star}_2) \vee (B^{\star}_1 <_0 B^{\star}_2).$$

Из [3, Утверждения 3] и [3, Утверждения 4] мы непосредственно получаем, что R линейный предпорядок на $\boldsymbol{W}_\omega$. Используя эти четыре факта мы получаем, что для всяких $n \geq 0$ и $A_1, \ldots, A_k \in \boldsymbol{S}_{n+1}$ мы имеем

$$(A_1 n \ldots n A_k)^{\star} \equiv (C_1 n \ldots n C_f)^{\star},$$

где $(C_1, \dots, C_f)$ — это лексикографически максимальная подпоследовательность последовательности $(A_1, \dots, A_k)$, относительно линейного предпорядка R.

Мы доказываем индукцией по $m-n$, что для всех $m \geq n$ и $A, B \in \boldsymbol{S}_n \cap \boldsymbol{W}_m$ мы имеем
$$A \precsim B \iff A \mathrel{\mathsf{R}} B;$$
ясно, что отсюда будет следовать доказываемый факт. База индукции очевидно имеет место. С учетом заключения предыдущего абзаца и того, что R является предпорядком, для обоснования перехода индукции нам осталось показать, что для двух R-монотонно не возрастающих последовательностей $(A_1, \dots, A_k)$ и $(B_1, \dots, B_l)$ из элементов $\boldsymbol{S}_{n+1} \cap \boldsymbol{W}_m$ мы имеем

$$\begin{gathered}(B_1, \dots, B_l) \ \mathsf{R}\text{-лексикографически не меньше } (A_1, \dots, A_k) \\ \Rightarrow \ A_1 n \dots n A_k \mathrel{\mathsf{R}} B_1 n \dots n B_l.\end{gathered}$$

Рассмотрим две такие последовательности, в предположение о том, что последовательность $(B_1, \dots, B_l)$ R-лексикографически не меньше последовательности $(A_1, \dots, A_k)$ покажем, что

$$A_1 n \dots n A_k \mathrel{\mathsf{R}} B_1 n \dots n B_l.$$

Тогда, как несложно видеть, для некоторого s от 0 до $\min(r, l)$ мы имеем $B_i^\star \equiv A_i^\star$ при i от 1 до s, для последовательности $(A_1, \dots, A_s, A_{s+1}, \dots, A_k, B_{s+1}, \dots, B_l)$ максимальной подпоследовательностью является $(A_1, \dots, A_s, B_{s+1}, \dots, B_l)$ и при условие того, что $s < \min(r, l)$ кроме того мы имеем $A_{s+1}^\star <_0 B_{s+1}^\star$. Несложно видеть, что для всяких $C, D \in \boldsymbol{W}_\omega$ мы имеем $C \mathrel{\mathsf{R}} CD$. Таким образом

$$A_1 n \dots n A_k \mathrel{\mathsf{R}} A_1 n \dots n A_s n B_{s+1} n \dots n B_l.$$

Следовательно, так как $(A_1 n \dots n A_s n B_{s+1} n \dots n B_l)^\star \equiv (B_1 n \dots n B_l)^\star$, мы имеем искомое
$$A_1 n \dots n A_k \mathrel{\mathsf{R}} B_1 n \dots n B_l.$$

Так как R является линейным предпорядком, предположение индукции для n и m следует из доказанного. $\square$

Зададим операторы a_0, $a_1, \dots$, действующие на $\boldsymbol{W}_\omega$:

$$a_n \colon A \longmapsto An.$$

Из факта 1 непосредственно следует, что структуры $(\mathfrak{S}_\omega; \mathbf{T}_0, <_0, \mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1, \dots)$ и $(\boldsymbol{W}_\omega; \Lambda, \prec, a_0, a_1, \dots)$ изоморфны.

2.1 Сравнение слов

В этом подразделе мы устанавливаем свойства $\prec$. Некоторые из них были известны ранее и устанавливались с помощью определения на основе логики доказуемости Джапаридзе. Мы приводим доказательства этих свойств, использующие лишь наше комбинаторное определение.

Для доказательств в этом подразделе нам требуется несколько технических понятий. Рассмотрим монотонно возрастающие, конечные последовательности из ненулевых натуральных чисел; будем называть их *наборами индексов*. Будем говорить, что набор индексов *n-ограничен*, если всякий его член не превосходит n. Всякому n-ограниченному набору индексов $(s_1, \dots, s_m)$ соответствует подпоследовательность последовательности $(A_1, \dots, A_n)$ — $(A_{s_1}, \dots, A_{s_m})$; отметим, что всякой подпоследовательности соответствует некоторый, возможно не единственный набор индексов. Будем говорить, что n-ограниченный набор индексов *максимален для* $(A_1, \dots, A_n)$, если ему соответствует лексикографически максимальная подпоследовательность последовательности $(A_1, \dots, A_n)$.

Лемма 1. *Пусть имеется последовательность слов $(A_1, \dots, A_n)$. Тогда существует единственный n-ограниченный набор индексов $(s_1, \dots, s_m)$ максимальный для $(A_1, \dots, A_n)$. Искомые $m, s_1, s_2, \dots, s_m$ однозначно задаются следующими соотношениями на $m, s_0, s_1, \dots$:*

1. $s_0 = 0$;
2. $s_{i+1} = \min\{f \in \omega \mid \forall l \in \omega(s_i < l \leq n \to A_l \precsim A_f)\}$, *если* $s_i \neq n$;
3. $s_{i+1} = n$, *если* $s_i = n$;
4. $m = \min\{f \geq 1 \mid s_f = n\}$.

Доказательство. Пусть числа $m, s_0, s_1, \dots$ заданы соотношениями 1, 2, 3, и 4. Заметим, что $(s_1, \dots, s_m)$ является n-ограниченным набором индексов.

Индукцией по i покажем, что единственно возможными первыми $\min(i, m)$ индексами всякого n-ограниченного набора максимального для $(A_1, \dots, A_n)$ являются $s_1, \dots, s_{\min(i,m)}$. Предположение индукции для $i = 0$ и шаг индукции для $i > m$ очевидно имеют место. Пусть предположение индукции выполнено для $i - 1$. Докажем, что для всякого индекса h от $s_{i-1} + 1$ до n такого, что $h \neq s_i$, набор индексов $(s_1, \dots, s_{i-1}, h)$ не является началом некоторого n-ограниченного набора индексов максимального для $(A_1, \dots, A_n)$; ясно, что предположение индукции для i следует от сюда. В случае $A_h \nsim A_{s_i}$ мы имеем $A_h \prec A_{s_i}$, а тем самым последовательность $(A_{s_1}, \dots, A_{s_i})$ лексикографически больше любой последовательности с началом $(A_{s_1}, \dots, A_{s_{i-1}}, A_h)$ и мы показали искомое. Рассмотрим случай $A_h \sim A_{s_i}$. Очевидно $h > s_i$. Следовательно, для каждого n-ограниченного набора индексов вида $(s_1, \dots, s_{i-1}, h, u_1, \dots, u_l)$ соответствующая ему последовательность лексикографически меньше последовательности, соответствующей набору индексов $(s_1, \dots, s_i, h, u_1, \dots, u_l)$. Тем самым, $(s_1, \dots, s_{i-1}, h)$ не является началом некоторого n-ограниченного набора индексов, максимального для $(A_1, \dots, A_n)$. □

Лемма 2. *Пусть $(A_1, \dots, A_n)$ и $(B_1, \dots, B_m)$ — это непустые последовательности слов и пусть для них максимальными наборами индексов являются n-ограниченный набор $(g_1, \dots, g_r)$ и m-ограниченный набор $(h_1, \dots, h_t)$ соответственно. Тогда $(n+m)$-ограниченный набор индексов $(g_1, \dots, g_k, n+h_1, \dots, n+h_t)$ максимален для последовательности $(A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m)$, где число $k = \max(\{0\} \cup \{i \mid 1 \leq i \leq r, B_{h_1} \precsim A_{g_i}\})$.*

Доказательство. Положим $C_1 = A_1, \ldots, C_n = A_n, C_{n+1} = B_1, \ldots, C_{n+m} = B_m$. Рассмотрим последовательность s_i заданную соотношениями из леммы 1 для последовательности $(C_1, \ldots, C_{n+m})$. Докажем, что $s_1 = g_1, \ldots, s_k = g_k, s_{k+1} = n + h_1, \ldots, s_{k+t} = n + h_{k+t}$; это утверждение, что очевидно, эквивалентно требуемому.

Положим $g_0 = 0$. Тем самым, для i от 1 до k мы имеем $g_i = \min\{f \in \omega \mid \forall l \in \omega(g_{i-1} < l \leq n \to A_l \precsim A_f)\}$. B_{h_1} максимальный элемент последовательности $(B_1, \ldots, B_m)$. Тем самым, для всех i от 1 до k и всех l от $n+1$ до $n+m$ мы имеем $C_l \precsim C_{g_i}$. Следовательно, для i от 1 до k мы имеем $s_i = \min\{f \in \omega \mid \forall l \in \omega(g_{i-1} < l \leq n \to C_l \precsim C_f)\} = g_i$.

Заметим, что если $k = r$, то $s_k = g_k = n$ и далее требуемое непосредственно следует из леммы 1. Перейдем к случаю $k < r$. Для любого i от $s_k + 1$ до n мы имеем $C_i \precsim C_{s_{k+1}}$. В силу определения k, кроме того $C_{s_{k+1}} \prec C_{n+h_1}$. Тем самым, для всякого i от $s_k + 1$ до n по транзитивности мы имеем $C_i \precsim C_{n+h_1}$. Следовательно, $s_{k+1} = n + h_1$. Далее непосредственно из леммы 1 следует, что для всех i от 1 до t мы имеем $s_{k+i} = n + h_i$. Это завершает доказательство леммы. $\square$

Лемма 3. *Пусть $k \in \omega$, $A, B \in \boldsymbol{W}_\omega$ и $A \sim B$. Тогда $Ak \sim Bk$.*

Доказательство. Докажем искомое для всех $A, B \in \boldsymbol{W}_\omega$ индукцией по длине слова AB. Для $AB = \Lambda$, т.е. базы индукции, искомое очевидно. Перейдем к обоснованию шага индукции. Пусть минимальный символ слова AB равен n. Если $k < n$, то сравнение слов Ak и Bk сводится к лексикографическому сравнению последовательностей (A, Λ) и (B, Λ), а они очевидно лексикографически эквивалентны. Далее мы предполагаем, что $k \geq n$.

Рассмотрим такие единственные $q, l \in \omega$, $A_1, \ldots, A_q \in \boldsymbol{S}_{n+1}$, $B_1, \ldots, B_l \in \boldsymbol{S}_{n+1}$, что $A = A_1 n A_2 n \ldots n A_q$, $B = B_1 n B_2 n \ldots n B_l$. Пусть максимальными наборами индексов для $(A_1, \ldots, A_l)$ и $(B_1, \ldots, B_q)$ являются наборы индексов $(s_1, \ldots, s_r)$ и $(h_1, \ldots, h_t)$ соответственно. Заметим, что в силу того, что $A \sim B$ мы имеем $r = t$ и $A_{s_i} \sim B_{h_i}$ для всех i от 1 до r

Рассмотрим случай $k = n$. Для сравнения Ak и Bk необходимо сравнить лексикографически максимальные подпоследовательности последовательностей $(A_1, \ldots, A_f, \Lambda)$ и $(B_1, \ldots, B_g, \Lambda)$, а в силу леммы 2 эти подпоследовательности равны $(A_{s_1}, \ldots, A_{s_r}, \Lambda)$ и $(B_1, \ldots, B_{h_t}, \Lambda)$ соответственно. Тем самым, эквивалентность слов A и B влечет эквивалентность слов Ak и Bk.

Теперь рассмотрим случай $k > n$. Заметим, что $s_r = q$ и $h_t = l$, а следовательно $A_q \sim B_l$. Тем самым, по предположению индукции $A_f k \sim B_g k$. Рассмотрим наборы индексов $(s_1^{'}, \ldots, s_{r'}^{'})$ и $(h_1^{'}, \ldots, h_{t'}^{'})$ максимальные для последовательностей $(A_1, \ldots, A_{q-1}, A_f k)$ и $(B_1, \ldots, B_{l-1}, B_g k)$ соответственно. Из леммы 1 следует, что $(s'_1, \ldots, s'_{r'}) = (1, \ldots, r' - 1, q)$ и $r^{'} = \max(\{0\} \cup \{i \in \{1, \ldots, r\} \mid A_q k \precsim A_{s_i}\}) + 1$. Аналогично, $(s'_1, \ldots, s'_{t'}) = (1, \ldots, t' - 1, l)$ и $t^{'} = \max(\{0\} \cup \{i \in \{1, \ldots, t\} \mid B_l k \precsim B_{h_i}\}) + 1$. Следовательно, $t^{'} = r^{'}$. Из леммы 1 мы получаем, что для каждого $i \in \{1, \ldots, r'\}$ мы имеем $A_{S_i} = A_{s'_i}$, $B_{h_i} = B_{h'_i}$ и следовательно $A_{s'_i} \sim B_{h'_i}$. По предположению индукции $A_{s^{'}_{r^{'}}} k \sim B_{h^{'}_{r^{'}}} k$. Поэтому, $Ak \sim Bk$. $\square$

Определим множество всех слов в нормальной форме $\boldsymbol{NF}$. Зададим принадлежность слов к $\boldsymbol{NF}$ индукцией по длине:

- $\Lambda \in \boldsymbol{NF}$;
- пусть n натуральное число, $k \geq 2$ и $A_1, \ldots, A_k \in \boldsymbol{S}_{n+1}$, тогда

$$A_1 n \ldots n A_k \in \boldsymbol{NF} \stackrel{\text{def}}{\iff} A_k \precsim A_{k-1} \precsim \ldots \precsim A_1 \text{ и } A_1, \ldots, A_k \in \boldsymbol{NF}.$$

Тривиальной индукцией по длине доказывается, что для каждого слова A существует единственное $B \in \boldsymbol{NF}$ такое, что $|B| \leq |A|$ и $A \sim B$. Тем самым, для каждого $A \in \boldsymbol{W}_\omega$ существует единственное $B \in \boldsymbol{NF}$ такое, что $A \sim B$.

Введем операторы $\langle n \rangle$ на множестве $\boldsymbol{NF}$. Для всякого $A \in \boldsymbol{NF}$ рассмотрим единственное B такое, что $B \sim An$ и $B \in \boldsymbol{NF}$; положим $\langle n \rangle A = B$.

Отметим, что линейный предпорядок $\precsim$, ограниченный на $\boldsymbol{NF}$, является отношением нестрогого линейного порядка, а бинарное отношение $\prec$, ограниченное на $\boldsymbol{NF}$, является отношением строгого линейного порядка.

Для всех $\alpha \in [0, \omega]$ мы обозначаем через $\boldsymbol{W}^N_\alpha$ множество $\boldsymbol{W}_\alpha \cap \boldsymbol{NF}$.

Как непосредственное следствие леммы 3 мы получаем

Утверждение 1. *Для всякого $n \in \omega$ и $A_1, A_2 \in \boldsymbol{W}_\omega$ таких, что $A_1 \sim A_2$ мы имеем $a_n(A_1) \sim a_n(A_2)$. Более того, для всех $n \in \omega$, $A_1 \in \boldsymbol{W}^N_\omega$ и $A_2 \in \boldsymbol{W}_\omega$ таких, что $A_1 \sim A_2$, мы имеем $\langle n \rangle A_1 \sim a_n(A_2)$.*

Из утверждения 1 следует, что структуры $(\boldsymbol{W}_\alpha/{\sim}, \prec, \langle a_i \mid i \in \omega, i \leq \alpha \rangle)$ и $(\boldsymbol{W}^N_\alpha, \prec, \langle \langle i \rangle \mid i \in \omega, i \leq \alpha \rangle)$ изоморфны для всех $\alpha \in [0, \omega]$.

Лемма 4. *Пусть $A, B, C, D \in \boldsymbol{W}_\omega$ таковы, что длина A совпадает с длиной B, притом, если некоторые символы c_1 и c_2 стоят на позициях с одинаковыми номерами в A и B соответственно, то $c_1 \leq c_2$. Тогда $A \precsim DBC$. Кроме того, если $C \neq \Lambda$ или последние символы A и B различны, то $A \prec DBC$.*

Доказательство. Мы доказываем лемму индукцией по длине слова DBC. Если $|DBC| = 0$, то искомое очевидно. Перейдем к обоснованию шага индукции.

Пусть минимальный символ слова DAC равен n и слово A представляется в виде $A_1 n A_2 n \ldots n A_k$, где $A_1, \ldots, A_k \in \boldsymbol{S}_{n+1}$ и слово DBC представляется в виде $B_1 n B_2 n \ldots n B_r$, где $A_1, \ldots, A_k, B_1, \ldots, B_r \in \boldsymbol{S}_{n+1}$. При этом пусть для последовательности $(A_1, \ldots, A_k)$ максимальным является набор индексов $(s_1, \ldots, s_l)$. Мы находим индексы $e_1, \ldots, e_l$, где e_i минимальные числа такие, что $|B_1 n \ldots n B_{e_i}| \geq |D| + |A_1 n \ldots n A_{s_i}|$. Очевидно, что для каждого i от 1 до l мы можем представить B_{e_i}, как $E_i F_i G_i$ таким образом, что $|B_1 n \ldots n B_{e_i - 1} n E_i| = |D| + |A_1 n \ldots n A_{s_i - 1} n|$ и $|F_i| = |A_{s_i}|$. Из предположения индукции следует, что $A_{s_i} \precsim E_i F_i G_i = B_{e_i}$ для всех i от 1 до l.

Предположим, что для какого-то i от 1 до $l-1$ мы имеем $e_i = e_{i+1}$. Тогда $|G_i| \neq 0$. Следовательно, по предположению индукции $A_{s_i} \prec B_{e_i}$. Отсюда $(A_{s_1}, \ldots, A_{s_l})$ лексикографически меньше, чем $(B_{e_1}, \ldots, B_{e_l})$. Рассматривая минимальное i с таким свойством мы заключаем, что $A \prec DBC$.

Теперь предположим, что все e_i различны. Если $C = \Lambda$, то $A \precsim DBC$ так как $(A_{s_1}, \ldots, A_{s_l})$ лексикографически эквивалентна или лексикографически меньше, чем $(B_{e_1}, \ldots, B_{e_l})$, что завершает разбор этого случая. Если $C \neq \Lambda$

и $G_l \neq \Lambda$, то $A_{s_l} \prec B_{e_l}$, следовательно $(A_{s_1}, \dots, A_{s_l})$ лексикографически меньше, чем $(B_{e_1}, \dots, B_{e_l})$. Теперь, если $C \neq \Lambda$ и $G_l = \Lambda$, то $e_l \neq r$ и $(A_{s_1}, \dots, A_{s_l})$ лексикографически меньше, чем $(B_{e_1}, \dots, B_{e_l}, B_r)$. $\square$

3 Системы ординальных обозначений с неразрешимыми элементарными теориями

В этом разделе мы покажем, что для всякого α от 3 до ω теория $\mathbf{Th}(\boldsymbol{W}_{\alpha}^{N}; \prec, \langle 1\rangle, \langle 3\rangle)$ неразрешима. Для этого мы покажем, что для всякого α от 3 до ω в $(\boldsymbol{W}_{\alpha}^{N}; \prec, \langle 1\rangle, \langle 3\rangle)$ определимо множество $\boldsymbol{W}_{3}^{N}$. Поэтому достаточно доказать, что $\mathbf{Th}(\boldsymbol{W}_{3}^{N}; \prec, \langle 1\rangle, \langle 3\rangle)$ неразрешима. Элементарная теория $\mathbf{Th}(\boldsymbol{L}_{\mathit{fin}}^{2})$ всех конечных множеств, снабженных парой линейных порядков наследственно неразрешима [24]. Мы показываем, что имеется относительная правая тотальная интерпретация $\mathbf{Th}(\boldsymbol{L}_{\mathit{fin}}^{2})$ в $\mathbf{Th}(\boldsymbol{W}_{3}^{N}; \prec, \langle 1\rangle, \langle 3\rangle)$. Из последнего непосредственно следует, что $\mathbf{Th}(\boldsymbol{W}_{3}^{N}; \prec, \langle 1\rangle, \langle 3\rangle)$.

Кроме эффективных теорий нами рассматриваются теории в стандартном смысле — множества предложений сигнатуры σ(сигнатуры теории), содержащие исчисление предикатов сигнатуры σ и замкнутые относительно правила *Modus Ponens*. Мы используем только исчисление предикатов с равенством и не указываем символ равенства в сигнатуре.

Элементарной теорией класса моделей $\mathbf{A}$ с одинаковыми сигнатурами σ называется множество всех предложений сигнатуры σ истинных во всех моделях класса $\mathbf{A}$. Элементарная теория класса моделей $\mathbf{A}$ с одинаковой сигнатурой обозначается $\mathbf{Th}(\mathbf{A})$. *Элементарной теорией* модели $\mathfrak{A}$ является $\mathbf{Th}(\{\mathfrak{A}\})$; такая теория обозначается $\mathbf{Th}(\mathfrak{A})$.

Под определимостью ниже мы подразумеваем определимость формулами первого порядка.

Лемма 5. *При всяком α от 3 до ω множество $\boldsymbol{W}_{3}^{N}$ определимо в $(\boldsymbol{W}_{\alpha}^{N}; \prec, \langle 1\rangle, \langle 3\rangle)$.*

Доказательство. Заметим, что при $\alpha = 3$ лемма очевидно верна. Перейдем к случаю $\alpha \geq 4$. Рассмотрим свойство элемента $x \in \boldsymbol{W}_{\alpha}^{N}$:

$$x \neq \Lambda \,\&\, \forall y \prec x(\langle 3\rangle y \prec x).$$

Докажем, что слово 4 является первым элементом $x \in \boldsymbol{W}_{\alpha}^{N}$, обладающим рассмотренным свойством. Для этого вначале покажем, что для всех $A \in \boldsymbol{W}_{\alpha}^{N}$ мы имеем

$$A \in \boldsymbol{W}_{3}^{N} \iff A \prec 4$$

В силу леммы 4 слово 4 является минимальным элементом множества $\boldsymbol{W}_{\alpha}^{N} \setminus \boldsymbol{W}_{3}^{N}$. Заметим, что в силу леммы 4 для всякого $B \in \boldsymbol{W}_3$ найдется n такое, что $B \prec 3^n$. Также несложно видеть, что для всякого n мы имеем $3^n \prec 4$. Тем самым, для всякого $B \in \boldsymbol{W}_{3}^{N}$ мы имеем $B \prec 4$, $\langle 3\rangle B \sim B3 \prec 4$ и тем самым, мы имеем требуемую эквивалентность. Следовательно, слово 4 обладает рассматриваемым свойством. Всякий $B \in \boldsymbol{W}_{3}^{N} \setminus \{\Lambda\}$ имеет вид Ck, где $k \leq 3$, $C \in \boldsymbol{W}_{3}^{N}$, а следовательно $B \precsim C3 \sim \langle 3\rangle C$. Кроме того по лемме 4 мы имеем $C \prec B$. Тем самым, всякий элемент $\boldsymbol{W}_3^N$ не обладает рассматриваемым свойством. От сюда следует, что слово 4 действительно является первым элементом множества $\boldsymbol{W}_\alpha^N$, обладающим рассматриваемым свойством. Поэтому элемент 4 определим в $(\boldsymbol{W}_\alpha^N; \prec, \langle 1\rangle, \langle 3\rangle)$.

Уже получено, что для всех $A \in \boldsymbol{W}_\alpha^N$ мы имеем

$$A \in \boldsymbol{W}_3^N \iff A \prec 4,$$

что дает нам требуемое определение □

Пусть слова $A \in \boldsymbol{W}_3^N \setminus \{\Lambda\}$ и $B \in \boldsymbol{W}_3^N \setminus \{\Lambda\}$ таковы, что $A = C_1 0 C_2 0 \dots 0 C_n$, $B = C_1 0 C_2 0 \dots 0 C_m$ для некоторых $n \geq m \geq 1$, $C_i \in \boldsymbol{S}_1$. В таком случае мы будем говорить, что B является срезом A. Введем предикат $\mathsf{Sl}(x, y)$:

$$\mathsf{Sl}(A, B) \overset{\text{def}}{\iff} B \text{ является срезом } A.$$

Лемма 6. *Предикат $\mathsf{Sl}(x, y)$ выразим в модели $(\boldsymbol{W}_3^N; \prec, \langle 1\rangle, \langle 3\rangle)$.*

Доказательство. Докажем, что для всяких $A, B \in \boldsymbol{W}_3^N$:

$$\mathsf{Sl}(A, B) \iff A \neq \Lambda \,\&\, B \neq \Lambda \,\&\, B \precsim A \,\&\, A \prec \langle 1\rangle B. \tag{1}$$

Рассмотрим произвольные слова $A, B \in \boldsymbol{W}_3^N$. Пусть числа n, m и слова $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m \in \boldsymbol{S}_1 \cap \boldsymbol{NF}$ таковы, что $A = A_1 0 A_2 0 \dots 0 A_n$, а $B = B_1 0 B_2 0 \dots 0 B_m$.

Предположим, что B является срезом A и докажем, что имеет место правая часть (1). Из предположения непосредственно следует, что $A \neq \Lambda$ и $B \neq \Lambda$. Кроме того в силу предположения $m \leq n$ и $B_i = A_i$ при всех i от 1 до m. Из определения $\boldsymbol{NF}$ следует, что $A_j \precsim A_i$ при $1 \leq i \leq j \leq n$. Тем самым, мы имеем $B \precsim A$. Заметим, что $A_m \prec A_m 1$ и лексикографически максимальная подпоследовательность последовательности $(A_1, A_2, \dots A_{m-1}, A_m 1)$ имеет вид $(A_1, A_2, \dots, A_s, A_m 1)$, где $0 \leq s < m$ и $A_{s+1} \prec A_m 1$. Тем самым, $A \prec B1$, а следовательно $A \prec \langle 1\rangle B$.

Теперь предположим, что пара $(A,\ B)$ удовлетворяет правой части (1) и докажем, что B является срезом A. Из условий $B \neq \Lambda$ и $B \precsim A$ мы получаем, что найдется натуральное число l от 0 до $\min(m, n)$ такое, что при всех i от 1 до l мы имеем $A_i = B_i$. При этом либо $l = m \leq n$, либо $l < \min(m, n)$ и $B_{l+1} \prec A_{l+1}$. Докажем от противного, что $l = m \leq n$. Предположим, что $l < \min(m, n)$ и $B_{l+1} \prec A_{l+1}$. Несложно видеть, что для любых $C, I \in \boldsymbol{S}_1 \cap \boldsymbol{NF}$ таких, что $C \prec I$ мы имеем $\langle 1\rangle C \precsim I$ и $\langle 1\rangle C = C1$. Покажем, что $B1 \precsim A_1 0 \dots 0 A_l 0 B_{l+1} 1$. Рассмотрим лексикографически максимальную подпоследовательность последовательности $(B_1, \dots, B_{m-1}, B_m 1)$. В случае $B_m = B_{l+1}$ она имеет вид $(A_1, \dots, A_l, B_{l+1} 1)$, а в случае $B_m \prec B_{l+1}$ она имеет вид $(A_1, \dots, A_l, B_{l+1}, \dots, B_s, B_m 1)$ для некоторого s от l до $m - 1$. Несложно видеть, что в обоих рассматриваемых случаях мы имеем $B1 \precsim A_1 0 \dots 0 A_l 0 B_{l+1} 1$. Тем самым, $\langle 1\rangle B \sim B1 \precsim A_1 0 \dots 0 A_l 0 B_{l+1} 1 \precsim A_1 0 \dots 0 A_l 0 A_{l+1} \precsim A$, что противоречит $A \prec \langle 1\rangle B$. Следовательно, $l = m \leq n$. Отсюда мы выводим левую часть доказываемой эквивалентности. □

Обозначим через I_s слово 3^s2 для $s \geq 0$. Для натуральных чисел k и h таких, что $1 \leq k \leq h$ обозначим через $K_{h,k}$ слово $I_{h-1} \dots I_{k+1} I_k 3^k$ и через L_h слово $I_{h-1} \dots I_1$. Отметим, что для всех таких k и h, что $1 \leq k \leq h$ мы имеем

$$I_{h-1} \dots I_k 3^{k-1} \precsim L_h \prec I_{h-1} \dots I_k 3^k = K_{h,k}.$$

Также отметим, что

$$K_{h,1} \prec K_{h,2} \prec \dots \prec K_{h,h}.$$

Пусть слово $A \in \boldsymbol{W}_3^N$ имеет вид $A_r 0 A_{r-1} 0 \dots 0 A_1$, где все $A_i \in \boldsymbol{S}_1 \cap \boldsymbol{W}_3^N$. Сопоставим слову A конечную последовательность слов $\mathbf{u}(A) = (u_1(A), \dots, u_r(A))$, где для всякого $i \in \{1, \dots, r\}$ мы полагаем $u_i(A) = \langle 3 \rangle A_r 0 A_{r-1} 0 \dots 0 A_i$.

Лемма 7. *Пусть даны натуральные числа $h \geq 1$, r и набор ненулевых натуральных чисел $k_1, \dots, k_r \leq h$. Тогда найдется $A \in \boldsymbol{W}_3^N$ такое, что последовательность $\boldsymbol{u}(A)$ равна последовательности $K_{h,k_1}, \dots, K_{h,k_r}$.*

Доказательство. При i от 1 до r обозначим через C_i слово $I_{h-1} \dots I_{k_i} 3^{k_i - 1}$. Положим:

$$A = (L_h 1)^{r-1} C_r 0 (L_h 1)^{r-2} C_{r-1} \dots (L_h 1)^0 C_1.$$

Рассмотрим некоторое i от 1 до r. Слово $u_i(A)$ равно нормальной форме слова $(L_h 1)^{r-1} C_r 0 (L_h 1)^{r-2} C_{r-1} \dots (L_h 1)^{i-1} C_i 3$. Так как $L_h \prec K_{h,k_i}$ мы, используя определение $\precsim$, получаем, что $(L_h 1)^{i-1}{}_i 3 \sim K_{h,k_i}$ и соответственно нормальная форма $(L_h 1)^i{}_i 3$ равна K_{h,k_i}. Также из определения $\precsim$ и того, что $L_h \prec K_{h,k_i}$ следует, что при всех j от 1 до r выполнено $(L_h 1)^{j-1} C_j \prec K_{h,k_i} \sim (L_h 1)^i{}_i 3$. Тем самым, нормальная форма слова

$$(L_h)^{r-1} C_r 0 (L_h)^{r-2} C_{r-1} \dots (L_h 1)^i C_{i+1} 0 (L_h 1)^{i-1} C_i 3$$

равна K_{h,k_i}. Следовательно, $\mathbf{u}(A)$ имеет требуемый вид. □

Пусть у нас есть сигнатуры σ_1 и σ_2, первопорядковые переменные $p_1, \dots, p_n$, теория $\mathbf{T}_1$ сигнатуры σ_1 и теория $\mathbf{T}_2$ сигнатуры σ_2. Мы дадим определение *параметрической относительной правой тотальной интерпретации* теории $\mathbf{T}_1$ в теории $\mathbf{T}_2$ с параметрами $p_1, \dots, p_n$, в случае, если σ_1 не содержит функциональных символов. Мы рассматриваем *понятие параметрического относительного перевода* с параметрами $p_1, \dots, p_n$ из первопорядкового языка сигнатуры σ_1 в первопорядковый язык сигнатуры σ_2. Пусть предикатные символы σ_1 исчерпываются семейством $\{\mathsf{P}_i(x_1, \dots, x_{n_i}) \mid i \in O_{\sigma_1}\}$. Перевод $\mathtt{tr}\colon \varphi \longmapsto \varphi^*$ требуемого вида задается формулой $\mathsf{D}_{\mathtt{tr}}(x, p_1, \dots, p_n)$ сигнатуры σ_2, которая задает предметную область интерпретации и формулами $P_i^I(y_1, \dots, y_{n_i}, p_1, \dots, p_n)$ сигнатуры σ_2, являющимися значениями $(\mathsf{P}_i(y_1, \dots, y_{n_i}))^\star$. Перевод $\mathtt{tr}\colon \varphi \longmapsto \varphi^*$ коммутирует с пропозициональными связками и для любой формулы φ сигнатуры σ_1 значение $(\forall x \varphi)^\star$ равно $\forall x (\mathsf{D}(x, p_1, \dots, p_n) \to \varphi^\star)$, а значение $(\exists x \varphi)^\star$ равно $\exists x (\mathsf{D}(x, p_1, \dots, p_n) \,\&\, \varphi^\star)$. Параметрический относительный перевод $\mathtt{tr}$ является параметрической относительной правой тотальной интерпретацией, если

$$\{\mathsf{A} \mid \mathsf{A} \text{ утверждение сигнатуры } \sigma_1 \text{ и } \mathbf{T}_2 \vdash \forall p_1, \dots, p_n(\mathsf{A}^*)\} \subset \mathbf{T}_1.$$

Сейчас мы рассмотрим случай, когда $\mathbf{T}_1$ является элементарной теорией класса моделей $\boldsymbol{B}$, $\mathbf{T}_2$ является элементарной теорией модели $\mathfrak{A}$. Пусть у нас есть перевод $\mathsf{tr}\colon \varphi \longmapsto \varphi^*$, такого вида, как в абзаце выше. Мы сконструируем семейство моделей $\mathfrak{I}(p_1, \ldots, p_n)$ сигнатуры σ_1. Для $a_1, \ldots a_n \in \mathfrak{A}$ предметной областью модели $\mathfrak{I}(a_1, \ldots, a_n)$ является множество $\boldsymbol{I}(a_1, \ldots, a_n) = \{b \in \mathfrak{A} \mid \mathfrak{A} \models \mathsf{D}_{\mathsf{tr}}(b, a_1, \ldots, a_n)\}$. Также для $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{A}$ и k-арного предикатного символа P из σ_1 интерпретацией P в $\mathfrak{I}(a_1, \ldots, a_n)$ является $\{(b_1, \ldots, b_k) \mid b_1, \ldots b_k \in \boldsymbol{I}(a_1, \ldots, a_n), \mathfrak{A} \models \mathsf{P}^I(b_1, \ldots, b_k, a_1, \ldots, a_n)\}$. Таким образом, мы определили семейство моделей $\mathfrak{I}(p_1, \ldots, p_n)$. Если для каждой $\mathfrak{B}$ из $\boldsymbol{B}$ найдутся $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{A}$ такие, что $\mathfrak{I}(a_1, \ldots, a_n)$ изоморфна $\mathfrak{B}$, тогда перевод tr является параметрической относительной правой тотальной интерпретацией $\mathbf{T}_1$ в $\mathbf{T}_2$.

Теория $\mathbf{T}$ называется *наследственно неразрешимой*, если всякая ее подтеория неразрешима.

Легко показать, что имеет место следующий факт:

Факт 2. *Если теория $\boldsymbol{T}_1$ с конечной сигнатурой наследственно неразрешима и имеется параметрическая относительная правая тотальная интерпретация $\boldsymbol{T}_1$ в теории $\boldsymbol{T}_2$, то теория $\boldsymbol{T}_2$ неразрешима.*

Лемма 8. *Теория $\mathbf{Th}(\boldsymbol{W}_3^N; \prec, \langle 1\rangle, \langle 3\rangle)$ неразрешима.*

Доказательство. Рассмотрим $\boldsymbol{L}^2_{\mathit{fin}}$ — класс всех моделей вида $(\boldsymbol{B}, \mathsf{L}_1, \mathsf{L}_2)$, где $\boldsymbol{B}$ конечное множество, а L_1 и L_2 строгие линейные порядки на нем. Известно, что элементарная теория класса $\boldsymbol{L}^2_{\mathit{fin}}$ наследственно неразрешима [24].

Построим ее параметрическую относительную правую тотальную интерпретацию $\mathsf{tr}\colon \varphi \longmapsto \varphi^*$ в элементарной теории $\mathbf{Th}(\boldsymbol{W}_3^N; \prec, \langle 1\rangle, \langle 3\rangle)$ и тем самым с помощью факта 2 получим искомое. Единственным параметром интерпретации будет p. Полагаем

1. $\mathsf{D}_{\mathsf{tr}}(x, p) \rightleftharpoons \mathsf{Sl}(p, x)$;

2. $(x_1 \mathsf{L}_1 x_2)^* \rightleftharpoons x_1 \prec x_2$:

3. $(x_1 \mathsf{L}_2 x_2)^* \rightleftharpoons \langle 3\rangle x_1 \prec \langle 3\rangle x_2$.

Мы тем самым определили семейство моделей $\mathfrak{I}(p)$. Покажем, что для всякой модели $(\boldsymbol{B}, \mathsf{L}_1, \mathsf{L}_2) \in \boldsymbol{L}^2_{\mathit{fin}}$ найдется $A \in \boldsymbol{W}_3^N$ такое, что $\mathfrak{I}(A)$ изоморфна $(\boldsymbol{B}; \mathsf{L}_1, \mathsf{L}_2)$. Положим $h = |\boldsymbol{B}|$. В соответствие с порядком L_1 обозначим элементы $\boldsymbol{B}$ следующим образом:

$$b_1 \mathsf{L}_1 b_2 \mathsf{L}_1 \ldots \mathsf{L}_1 b_h.$$

Пусть при этом L_2 упорядочивает $\boldsymbol{B}$ таким образом:

$$b_{s_1} \mathsf{L}_2 b_{s_2} \mathsf{L}_2 \ldots \mathsf{L}_2 b_{s_h}.$$

В силу леммы 7, найдется такое A, что $\mathbf{u}(A) = (K_{h,s_1}, K_{h,s_2}, \ldots, K_{h,s_h})$. Несложно видеть, что $\mathfrak{I}(A)$ изоморфна $(\boldsymbol{B}; \mathsf{L}_1, \mathsf{L}_2)$. Тем самым, мы построили требуемую интерпретацию. □

Используя леммы 8 и 5, мы заключаем

Теорема 1. *Для каждого $\alpha \in [3, \omega]$ теория $\mathbf{Th}(\boldsymbol{W}_\alpha^N; \prec, \langle 1\rangle, \langle 3\rangle)$ неразрешима.*

Теорема 2. *Для каждого $\alpha \in [3, \omega]$ теория $\mathbf{Th}(\boldsymbol{W}_\alpha^N; \prec, \Lambda, \langle\langle i\rangle \mid i \in \omega, i \leq \alpha\rangle)$ неразрешима.*

4 Некоторые теории ординалов и слов

Мы переходим к доказательству разрешимости элементарных теорий $\mathbf{Th}(\boldsymbol{W}^N_\alpha; \prec, \Lambda, \langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \langle 2\rangle)$ для $\alpha \in [2,\omega)$. Для таких α мы построим интерпретации элементарной теории $\mathbf{Th}(\boldsymbol{W}^N_\alpha; \prec, \Lambda, \langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \langle 2\rangle)$ в разрешимой слабой монадической теории модели $(\omega_\alpha; \mathsf{R})$ [4]; здесь R — это специальное бинарное отношение, определяемое через кофинальные последовательности. Для этого мы при всех $\alpha \in [2,\omega)$ построим цепочку интерпретаций моделей:

1. Мы строим в лемме 13 интерпретацию $(\boldsymbol{W}^N_\alpha; \prec, \Lambda, \langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \langle 2\rangle)$ в $(\omega_\alpha; <, \psi)''$. Модель $(\omega_\alpha; <, \psi)''$ состоит из ординалов меньших ω_α, конечных мультимножеств ординалов, стандартного порядка на ординалах, специальной функции ψ на ординалах и некоторых естественных предикатов для работы с мультимножествами.

2. В лемме 14 мы строи интерпретация $(\omega_\alpha; <, \psi)''$ в $(\omega_\alpha; <, \psi)'$. Модель $(\omega_\alpha; <, \psi)'$ состоит из ординалов меньших ω_α, конечных множеств ординалов, стандартного порядка на ординалах, функции ψ и предиката $\in$.

3. Мы строим в лемме 15 интерпретацию $(\omega_\alpha; <, \psi)'$ в $(\omega_\alpha; \mathsf{R})'$. Модель $(\omega_\alpha; \mathsf{R})'$ состоит из ординалов ниже ω_α, конечных множеств ординалов, отношения R и предиката $\in$.

Отметим, что для всякой модели $\mathfrak{A}$ теория $\mathbf{Th}(\mathfrak{A}')$, по существу, является слабой монадической теорией модели $\mathfrak{A}$.

Имеются функции $o_n \colon \boldsymbol{NF} \cap \boldsymbol{S}_n \to \boldsymbol{On}$. Зададим их одновременно следующими рекуррентными соотношениями:

- $o_n(n^k) = k$;
- $o_n(A_1 n A_2 n \dots n A_k) = \omega^{o_{n+1}(A_1)} + \omega^{o_{n+1}(A_2)} + \dots + \omega^{o_{n+1}(A_k)}$, где $k \geq 1$, $A_1, \dots, A_k \in \boldsymbol{S}_{n+1}$ и $A_k \precsim A_{k-1} \precsim \dots \precsim A_1 \neq \Lambda$.

Напомним, что канторовской нормальной формой ординала α называется выражение

$$\omega^{\alpha_1} + \dots + \omega^{\alpha_n}, \text{ где } \alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_n \text{ и } n \geq 0.$$

Теорема Кантора утверждает, что у каждого ординала существует единственная канторовская нормальная форма.

Лемма 9. *Пусть даны числа n и r. Функция o_n задает сюръекцию из $S_n \cap \boldsymbol{W}_{n+r}$ в ординал ω_{r+1}. Более того для слов $A, B \in \boldsymbol{S}_n \cap \boldsymbol{W}_{n+r}$ имеет место $A \precsim B$ если и только если $o_n(A) \leq o_n(B)$.*

Доказательство. Мы доказываем лемму индукцией по r. База индукции очевидно верна. Первое утверждение леммы следует из теоремы Кантора о нормальной форме ординалов и предположения индукции для $n+1$ и $r-1$. Из предположения индукции следует, что $o_n(A_1 n \dots n A_{i-1} n A_i n A_{i+1} n \dots A_k) = o_n(A_1 n \dots n A_{i-1} n A_{i+1} n \dots A_k)$, если $A_i \prec A_{i+1}$ и все $A_j \in \boldsymbol{S}_n \cap \boldsymbol{W}_{n+r}$. Поэтому для слова $A \in \boldsymbol{S}_n \cap \boldsymbol{W}_{n+r}$ и его нормальной формы B мы имеем $o_n(A) = o_n(B)$. Следовательно, достаточно доказать второе утверждение леммы только для слов в нормальной форме. Из предположения индукции следует, что для слова $A \in \boldsymbol{S}_n \cap \boldsymbol{W}_{n+r} \cap \boldsymbol{NF}$ канторовская нормальная форма ординала $1 + o_n(A)$ имеет вид $\omega^{o_n(A_1)} + \ldots + \omega^{o_n(A_k)}$, где $A = A_1 n \ldots n A_k$, $A_i \in \boldsymbol{S}_{n+1}$. Рассмотрим $A, B \in \boldsymbol{S}_n \cap \boldsymbol{W}_{n+r} \cap \boldsymbol{NF}$, где $A = A_1 n \ldots n A_k$, $B = B_1 n \ldots n B_l$ $A_i, B_j \in \boldsymbol{S}_{n+1}$. Очевидно следующие утверждения эквивалентны:

1. $A \precsim B$,
2. $(A_1, \ldots, A_k)$ лексикографически меньше, чем $(B_1; \ldots, B_l)$,
3. $1 + o_n(A) \leq 1 + o_n(B)$,
4. $o_n(A) \leq o_n(B)$.

□

В этом разделе мы используем многосортное исчисление предикатов и соответствующие ему модели с несколькими универсамами. Понятия элементарной теории, определимых предикатов, определимых множеств и определимых функций естественным образом переносятся на модели такого вида.

Для всякого множества $\boldsymbol{A}$ мы обозначаем через $\mathcal{P}^{<\omega}(\boldsymbol{A})$ множество всех его конечных подмножеств. Функцию f такую, что ее область определения $\mathrm{dom}(f)$ конечна и ее область значений $\mathrm{ran}(f)$ вложена в $[1, \omega)$ мы называем *конечным мультимножеством*. Конечное мультимножество f *вложено в конечное мультимножество* g, если $\mathrm{dom}(f) \subset \mathrm{dom}(g)$ и для всякого $x \in \mathrm{dom}(f)$ имеет место $f(x) \leq g(x)$; мы обозначаем это $f \subset_M g$. Определим $\mathfrak{i}_f(x)$ — *кратность вхождения* x в конечное мультимножество f. Если $x \in \mathrm{dom}(f)$, то $\mathfrak{i}_f(x) = f(x)$. Иначе, $\mathfrak{i}_f(x) = 0$. Для всякого x и мультимножества f определяем

$$x \in_M f \stackrel{\text{def}}{\iff} \mathfrak{i}_f(x) > 0.$$

Для всякого множества $\boldsymbol{A}$ мы обозначаем через $\mathcal{P}^{<\omega}_{\text{multi}}(\boldsymbol{A})$ множество всех конечных мультимножеств, которым принадлежат лишь элементы $\boldsymbol{A}$. Мы обозначаем через $\{a_1, \ldots, a_n\}^M$ мультимножество $f(x)$ такое, что $\mathrm{dom}(f) = \{a_1, \ldots, a_n\}$ и $f(x) = |\{i \mid x = a_i\}|$.

Рассмотрим модель $\mathfrak{A}$ односортного исчисления предикатов с носителем $\boldsymbol{A}$. Определим две модели, расширяющие $\mathfrak{A}$ дополнительным универсумом. Модель $\mathfrak{A}'$ является расширением $\mathfrak{A}$ дополнительной предметной областью $\mathcal{P}^{<\omega}(A)$ и предикатом $\in$, ограниченным на $\boldsymbol{A} \times \mathcal{P}^{<\omega}(\boldsymbol{A})$. Модель $\mathfrak{A}''$ является расширением $\mathfrak{A}$ дополнительной предметной областью $\mathcal{P}^{<\omega}_{\text{multi}}(\boldsymbol{A})$, предикатом $\in_M$, ограниченным на $\boldsymbol{A} \times \mathcal{P}^{<\omega}_{\text{multi}}(\boldsymbol{A})$ и предикатом $\subset_M$, ограниченным на $\mathcal{P}^{<\omega}_{\text{multi}}(\boldsymbol{A}) \times \mathcal{P}^{<\omega}_{\text{multi}}(\boldsymbol{A})$. Отметим, что теория $\mathbf{Th}(\mathfrak{A}')$ является слабой монадической теорией модели $\mathfrak{A}$.

Далее мы докажем несколько лемм об определимости некоторых естественных предикатов и функций в моделях $(\alpha; <)$, $(\alpha;)'$ и $(\alpha; <)''$, где α — это ординал; мы используем определение ординалов по фон Нейману и соответственно

$$\alpha = \{\beta \in \boldsymbol{On} \mid \beta < \alpha\}.$$

Заметим, что все множества, предикаты и функции определимые в $(\alpha; <)$ также определимы в $(\alpha;)'$ и $(\alpha; <)''$.

Лемма 10. *Пусть ординал $\alpha > 0$. Тогда в моделе $(\alpha; <)$ определимы:*

1. *функция $S\colon \boldsymbol{On} \to \boldsymbol{On}$, $S\colon \beta \longmapsto \beta + 1$, ограниченная на α;*

2. *элемент 0;*

3. *предикат $x \in \boldsymbol{Lim}$, где $\boldsymbol{Lim}$ класс всех отличных от 0 непоследовательных ординалов;*

4. *ограниченное на α отношение эквивалентности $\mathsf{FinDif}(x, y)$, где*

$$\mathsf{FinDif}(\beta, \gamma) \overset{\text{def}}{\iff} \exists n \in \omega(\beta + n = \gamma \vee \beta = \gamma + n),$$

.

Доказательство. Для всяких $\beta, \gamma \in \alpha$ имеют место следующие эквивалентности:

1. $S(\beta) = \gamma \iff \beta < \gamma \,\&\, \forall \delta \in \alpha(\gamma \leq \delta \vee \delta \leq \beta)$;
2. $\beta = 0 \iff \forall \delta \in \alpha(\beta \leq \delta)$;
3. $\beta \in \boldsymbol{Lim} \iff \beta \neq 0 \,\&\, \forall \delta_1 \in \alpha(\delta_1 < \beta \to \exists \delta_2 \in \alpha(\delta_2 < \beta \,\&\, \delta_1 < \delta_2))$;
4. $\mathsf{FinDif}(\beta, \gamma) \iff \beta = \gamma \vee (\beta < \gamma \,\&\, \forall \delta \in \alpha(\beta < \delta \leq \gamma \to \delta \notin \boldsymbol{Lim}))\vee$ $(\gamma < \beta \,\&\, \forall \delta \in \alpha(\gamma < \delta \leq \beta \to \delta \notin \boldsymbol{Lim}))$.

Эти эквивалентности показывают определимость требуемых функций, элементов и предикатов. □

Лемма 11. *Пусть $\alpha \in \boldsymbol{On}$. Тогда в моделе $(\alpha; <)'$ выразима функция*

$$\min\colon \mathcal{P}^{<\omega}(\alpha) \setminus \{\emptyset\} \to \alpha$$

и в моделе $(\alpha; <)''$ выразима функция

$$\min\colon \mathcal{P}^{<\omega}_{\text{multi}}(\alpha) \setminus \{\emptyset^{\text{M}}\} \to \alpha.$$

Доказательство. Для всякого $\boldsymbol{Q} \in \mathcal{P}^{<\omega}(\alpha) \setminus \emptyset$ и $\beta \in \alpha$ имеет место эквивалентность

$$\min(\boldsymbol{Q}) = \beta \iff \beta \in \boldsymbol{Q} \,\&\, \forall \gamma \in \alpha(\gamma < \beta \to \gamma \notin \boldsymbol{Q}).$$

Заметим, что тем самым мы построили искомое определение для $(\alpha; <)'$. Для модели $(\alpha; <)''$ доказательство аналогично. □

Лемма 12. *Пусть $\mathfrak{A}$ — модель с одним универсумом $\boldsymbol{A}$. Тогда в моделе $\mathfrak{A}''$ выразимы*

1. *предикат $\mathsf{CLess}(x, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$, выполняющийся на всякой тройке $(a, \boldsymbol{Q}_1, \boldsymbol{Q}_2) \in \boldsymbol{A} \times \mathcal{P}^{<\omega}_{\text{multi}}(\boldsymbol{A}) \times \mathcal{P}^{<\omega}_{\text{multi}}(\boldsymbol{A})$ тогда и только тогда, когда кратность вхождения a в $\boldsymbol{Q}_1$ меньше кратности вхождения a в $\boldsymbol{Q}_2$;*

2. *предикат $\mathsf{CEq}(x, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$, выполняющийся на всякой тройке $(a, \boldsymbol{Q}_1, \boldsymbol{Q}_2) \in \boldsymbol{A} \times \mathcal{P}^{<\omega}_{\text{multi}}(\boldsymbol{A}) \times \mathcal{P}^{<\omega}_{\text{multi}}(\boldsymbol{A})$ тогда и только тогда, когда кратность вхождения a в $\boldsymbol{Q}_1$ равна кратности вхождения a в $\boldsymbol{Q}_2$;*

3. *предикат* $\mathit{CS}(x, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$, *выполняющийся на всякой тройке* $(a, \boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2) \in A \times \mathcal{P}^{<\omega}_{\mathrm{multi}}(A) \times \mathcal{P}^{<\omega}_{\mathrm{multi}}(A)$ *тогда и только тогда, когда кратность вхождения* a *в* $\boldsymbol{Q}_1$ *меньше кратности вхождения* a *в* $\boldsymbol{Q}_2$ *ровно на* 1;

Доказательство. Для всех троек $(a, \boldsymbol{Q}_1, \boldsymbol{Q}_2) \in A\times\mathcal{P}^{<\omega}_{\mathrm{multi}}(A)\times\mathcal{P}^{<\omega}_{\mathrm{multi}}(A)$ очевидно имеют место следующие эквивалентности:

1. $\mathsf{CLess}(a, \boldsymbol{Q}_1, \boldsymbol{Q}_2) \iff \exists \boldsymbol{Q}_3 \in \mathcal{P}^{<\omega}_{\mathrm{multi}}(A)(\forall b \in A(b \in_M \boldsymbol{Q}_3 \leftrightarrow a = b) \,\&\, \boldsymbol{Q}_3 \subset_M \boldsymbol{Q}_2 \,\&\, \neg \boldsymbol{Q}_3 \subset_M \boldsymbol{Q}_1)$.

2. $\mathsf{CEq}(a, \boldsymbol{Q}_1, \boldsymbol{Q}_2) \iff \neg\mathsf{CLess}(a, \boldsymbol{Q}_1, \boldsymbol{Q}_2) \,\&\, \neg\mathsf{CLess}(a, \boldsymbol{Q}_2, \boldsymbol{Q}_1)$.

3. $$\begin{aligned}\mathsf{CS}(a, \boldsymbol{Q}_1, \boldsymbol{Q}_2) \iff{}& \mathsf{CLess}(a, \boldsymbol{Q}_1, \boldsymbol{Q}_2) \,\&\\ &\forall \boldsymbol{Q}_3 \in \mathcal{P}^{<\omega}_{\mathrm{multi}}(A)(\neg(\mathsf{CLess}(a, \boldsymbol{Q}_3, \boldsymbol{Q}_2) \,\&\, \mathsf{CLess}(a, \boldsymbol{Q}_1, \boldsymbol{Q}_3))).\end{aligned}$$

От сюда следует выразимость предикатов из условия леммы. □

Определим функцию $\psi\colon \boldsymbol{On} \to \boldsymbol{On}$:

- $\psi(0) = \omega$;
- $\psi(\omega^{\alpha_1} + \omega^{\alpha_2} + \ldots + \omega^{\alpha_n}) = \omega^{\alpha_1} + \omega^{\alpha_2} + \ldots + \omega^{\alpha_{n-1}} + \omega^{\alpha_n+1}$, где $n \geq 1$ и $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \ldots \geq \alpha_n$.

Мы называем ординал α *замкнутым относительно функции* ψ, если для всякого $\beta < \alpha$ мы имеем $\psi(\beta) < \alpha$.

Замечание 1. *Ординал* α *замкнут относительно* ψ *тогда и только тогда, когда либо* $\alpha = 0$, *либо* $\alpha = \omega^{\omega\cdot\beta}$ *для некоторого* $\beta > 0$.

Ниже в нескольких леммах мы строим интерпретации некоторых многосортных индивидуальных моделей в других многосортных индивидуальных моделях. Интерпретация многосортной модели $\mathfrak{A}$ в многосортной моделе $\mathfrak{B}$ состоит из:

1. функции $t\colon \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, m\}$;

2. инъективных функций $f_i\colon x \longmapsto x^I$ из i-ой предметной области $\mathfrak{A}$ в $t(i)$-ую предметную область $\mathfrak{B}$, где $i \in \{1, \ldots, n\}$;

3. формул $\mathsf{D}_i(x)$ из языка модели $\mathfrak{B}$, определяющих в i-ых предметных областях $\mathfrak{A}$ полные образы $t(i)$-ых предметных областей $\mathfrak{B}$ под действием f_i, где $i \in \{1, \ldots, n\}$;

4. интерпретации функциональных и предикатных символов сигнатуры $\mathfrak{A}$, состоящей в выборе выбора формул, определяющих в $\mathfrak{B}$ образы этих функций и предикатов под действием функций f_i.

Лемма 13. *Пусть* α *ординал от* 2 *до* ω. *Тогда в моделе* $(\omega_\alpha; <, \psi)''$ *интерпретируется модель* $(\boldsymbol{W}^N_\alpha; \prec, \varLambda, \langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \langle 2\rangle)$.

Доказательство. Перед построением интерпретации отметим два факта. В силу замечания 1 ординал ω_α замкнут относительно ψ. Функция o_1 является биекцией между множествами $\boldsymbol{W}^N_\alpha \cap \boldsymbol{S}_1$ и ω_α.

Рассмотрим слово $A \in \boldsymbol{W}^N_\alpha$ и определим его интерпретацию — мультимножество A^I. Слово A единственным образом представляется в виде $A_1 0 \dots 0 A_n$ для некоторых $n \geq 0$ и $A_1, \dots, A_n \in \boldsymbol{W}^N_\alpha \cap \boldsymbol{S}_1$. Для каждого ординала $\gamma \in \omega_\alpha$ определим кратность его вхождения в A^I, как количество таких i от 1 до n, что $o_1(A_i) = \gamma$. Несложно видеть, что определенное тем самым отображение $A \mapsto A^I$ является биекцией между $\boldsymbol{W}^N_\alpha$ и $\mathcal{P}^{<\omega}_{\mathrm{multi}}(\omega_\alpha)$.

Определим интерпретацию предиката $\prec$ — предикат $\prec^I$:

$$\boldsymbol{X} \prec^I \boldsymbol{Y} \rightleftharpoons \exists x(\mathsf{CLess}(x, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) \,\&\, \forall y > x(\mathsf{CEq}(y, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}))).$$

Докажем, что $\prec^I$ действительно является интерпретацией $\prec$.

Покажем, что для всяких $A, B \in \boldsymbol{W}^N_\alpha$ мы имеем

$$A \prec B \iff A^I \prec^I B^I.$$

Мы находим $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m \in \boldsymbol{S}_1$ такие, что A равно $A_1 0 A_2 0 \dots 0 A_n$ и B равно $B_1 0 B_2 0 \dots 0 B_m$. Мы обозначаем через $\boldsymbol{A}$ интерпретацию A^I и обозначим через $\boldsymbol{B}$ интерпретацию B^I. Покажем, что

$$A_1 0 A_2 0 \dots 0 A_n \prec B_1 0 B_2 0 \dots 0 B_m \iff (\omega_\alpha; <, \psi)'' \models \boldsymbol{A} \prec^I \boldsymbol{B}.$$

Пусть имеет место $(\omega_\alpha; <, \psi)'' \models \boldsymbol{A} \prec^I \boldsymbol{B}$ и покажем, что $A_1 0 A_2 0 \dots 0 A_n \prec B_1 0 B_2 0 \dots 0 B_m$. Тогда найдется ординал γ такой, что кратность вхождения γ в $\boldsymbol{A}$ меньше кратности вхождения γ в $\boldsymbol{B}$ и для всяких $\delta \in (\gamma, \omega_\alpha)$ кратности вхождения δ в $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ совпадают. Пусть кратность вхождения γ в $\boldsymbol{A}$ равна l. Пусть k является $(l+1)$-ым, в смысле стандартного порядка на натуральных числах, элементом множества $\{i \mid o_1(B_i) = \gamma\}$; заметим, что в силу определения $\prec^I$ такое k найдется. В силу определения $\boldsymbol{NF}$ для i от 1 до $k-1$ мы имеем $A_i = B_i$. Притом либо $n = k-1$, либо $A_k \prec B_k$. Тем самым, последовательность $(A_1, \dots, A_n)$ лексикографически меньше последовательности $(B_1, \dots, B_m)$ и $A_1 0 \dots 0 A_n \prec B_1 0 \dots 0 B_m$.

Теперь предположим, что $A_1 0 \dots 0 A_n \prec B_1 0 \dots 0 B_m$ и покажем, что $(\omega_\alpha; <, \psi)'' \models \boldsymbol{A} \prec^I \boldsymbol{B}$. В силу определений $\precsim$ и $\boldsymbol{NF}$ найдется k такое, что для всех i от 1 до $k-1$ мы имеем $A_i = B_i$ и притом либо $n = k-1$, либо $A_k \prec B_k$. Из последнего следует, что для всех i от k до n мы имеем $A_i \prec B_k$, а тем самым и $o_1(A_i) < o_1(B_k)$. В качестве искомого x из определения $\prec^I$ выберем $o_1(B_k)$, получим $(\omega_\alpha; <)'' \models \boldsymbol{A} \prec^I \boldsymbol{B}$. Тем самым, $\prec^I$ является интерпретацией $\prec$.

Функция $\langle 0 \rangle$ и константа Λ выразимы в $(\boldsymbol{W}^N_\alpha; \prec)$ и тем самым могут быть пропущены при построение искомой интерпретации.

Заметим, что для всякого $A \in \boldsymbol{NF} \cap \boldsymbol{S}_1$ имеет место тождество $\psi(o_1(A)) = o_1(\langle 2 \rangle A)$.

Определим функции $\langle 1 \rangle^I$ и $\langle 2 \rangle^I$ — интерпретации функций $\langle 1 \rangle$ и $\langle 2 \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle 1 \rangle^I \boldsymbol{X} = \boldsymbol{Y} \rightleftharpoons (\boldsymbol{X} = \emptyset^M \to \boldsymbol{Y} = \{1\}^M) \,\&(& \boldsymbol{X} \neq \emptyset^M \to \\ & \forall x > S(\min(\boldsymbol{X}))(\mathsf{CEq}(x, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})) \,\& \\ & \mathsf{CS}(S(\min(\boldsymbol{X})), \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) \,\& \\ & \forall x < S(\min(\boldsymbol{X}))(\neg x \in_M \boldsymbol{Y})), \end{aligned}$$

$$\langle 2\rangle^I \boldsymbol{X} = \boldsymbol{Y} \rightleftharpoons (\boldsymbol{X} = \emptyset^M \to \boldsymbol{Y} = \{\omega\}^M) \,\&(\boldsymbol{X} \neq \emptyset^M \to \\ \forall x > \psi(\min(\boldsymbol{X}))(\mathsf{CEq}(x, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})) \,\& \\ \mathsf{CS}(\psi(\min(\boldsymbol{X})), \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) \,\& \\ \forall x < \psi(\min(\boldsymbol{X}))(\neg x \in_M \boldsymbol{Y})).$$

Легко видеть, что эти определения $\langle 1\rangle^I$ и $\langle 2\rangle^I$ могут быть выражены первопорядковыми формулами в структуре $(\omega_\alpha, <, \psi)''$. Покажем корректность определения интерпретации $\langle 2\rangle$, корректность определения интерпретации $\langle 1\rangle$ доказывается аналогично. Рассмотрим произвольное слово $A \in \boldsymbol{W}_\alpha^N$, имеющее вид $A_1 0 \dots 0 A_n$, где $A_1, \dots, A_n \in \boldsymbol{W}_\alpha^N \cap \boldsymbol{S}_1$. Из леммы 1 следует, что лексикографически максимальная подпоследовательность последовательности $(A_1, \dots, A_{n-1}, A_n 2)$ имеет вид $(A_1, \dots, A_k, A_n 2)$, где $k \in \{0, \dots, n-1\}$. Притом k таково, что для всех i от 1 до k имеет место $A_n 2 \precsim A_i$ и для всех i от $k+1$ до $n-1$ имеет место $A_i \prec A_n 2$. От сюда следует правильность построенного определения. □

Лемма 14. *Пусть α — замкнутый относительно ψ ординал. Тогда в моделе $(\alpha; <, \psi)'$ интерпретируется модель $(\alpha; <, \psi)''$.*

Доказательство. Всякий ординал $\beta \in \alpha$ мы будем интерпретировать ординалом $\beta^I = \omega \cdot \beta$, несложно видеть, что тем самым мы построим инъекцию α в себя. Для данного мультимножества $\boldsymbol{A} \in \mathcal{P}^{<\omega}_{\text{multi}}(\alpha)$ построим множество $\boldsymbol{A}^I \in \mathcal{P}^{<\omega}(\alpha)$ — интерпретацию $\boldsymbol{A}$. Пусть набор $\beta_1, \dots, \beta_n$ попарно различных ординалов меньших α содержит все ординалы входящие в $\boldsymbol{A}$ с ненулевой кратностью. Притом, пусть $k_1, \dots, k_n \in \omega$ есть кратности вхождениий в $\boldsymbol{A}$ ординалов $\beta_1, \dots, \beta_n$ соответственно. Положим $\boldsymbol{A}^I = \{\omega \cdot \beta_i + (k_i - 1) \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$.

Заметим, что отображение $(\beta, k) \longmapsto \omega \cdot \beta + (k-1)$ есть биекция между множествами $\alpha \times (\omega \setminus \{0\})$ и α. Тем самым, построенное отображение $\boldsymbol{A} \longmapsto \boldsymbol{A}^I$ является инъективным. Покажем, что множество $\boldsymbol{U}_1$ всех интерпретаций ординалов определимо в $(\alpha; <, \psi)'$. В самом деле, для всякого $\beta \in \alpha$

$$\beta \in \boldsymbol{U}_1 \iff \beta \in \boldsymbol{Lim} \vee \beta = 0.$$

Теперь покажем, что множество $\boldsymbol{U}_2$ всех интерпретаций мультимножеств определимо в $(\alpha; <, \psi)'$. В самом деле, для всякого $\boldsymbol{A} \in \mathcal{P}^{<\omega}(\alpha)$ мы имеем

$$\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{U}_2 \iff \forall \beta \in \alpha \forall \gamma \in \alpha((\beta \in \boldsymbol{X} \,\&\, \gamma \in \boldsymbol{X}) \to (\mathsf{FinDif}(\beta, \gamma) \leftrightarrow \beta = \gamma)).$$

Зададим $\in_M^I$, $\subset_M^I$, $<^I$, ψ^I — интерпретации $\in_M$, $\subset_M$, $<$, ψ соответственно.

$$x \in_M^I \boldsymbol{X} \rightleftharpoons x \in \boldsymbol{U}_1 \,\&\, \boldsymbol{X} \in \boldsymbol{U}_2 \,\&\, \exists y \in \boldsymbol{X}(\mathsf{FinDif}(x, y));$$
$$x <^I y \rightleftharpoons x \in \boldsymbol{U}_1 \,\&\, y \in \boldsymbol{U}_1 \,\&\, x < y;$$
$$\psi^I(x) = y \rightleftharpoons x \in \boldsymbol{U}_1 \,\&\, y \in \boldsymbol{U}_1 \,\&(x = 0 \to y = \psi(\psi(0))) \,\&(x \neq 0 \to y = \psi(x));$$
$$\boldsymbol{X} \subset_M^I \boldsymbol{Y} \rightleftharpoons \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \in \boldsymbol{U}_2 \,\&\, \forall x \in \boldsymbol{X} \exists y \in \boldsymbol{Y}(\mathsf{FinDif}(x, y) \,\&\, x \leq y).$$

Несложно видеть, что эти определения задают требуемую интерпретацию. □

Имеется общепринятая система кофинальных последовательностей для ординалов меньших ε_0. Для каждого ординала $\alpha \in \boldsymbol{Lim}$ с канторовской нормальной формой $\omega^{\alpha_1} + \ldots + \omega^{\alpha_k}$ мы следующим образом задаем n-ый член кофинальной последовательности $\alpha[n]$, где $n \in \omega$:

1. $\alpha[n] = \omega^{\alpha_1} + \ldots + \omega^{\alpha_{k-1}} + \omega^{\beta}(n+1)$, если $\alpha_k \notin \boldsymbol{Lim}$ и $\alpha_k = \beta + 1$;

2. $\alpha[n] = \omega^{\alpha_1} + \ldots + \omega^{\alpha_{k-1}} + \omega^{\alpha_k[n]}$, если $\alpha_k \in \boldsymbol{Lim}$.

На основе кофинальных последовательностей вводится бинарное отношение R на ординалах меньших ε_0:

$$\alpha \mathsf{R} \beta \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \beta = \alpha + 1 \vee \exists n \in \omega (\alpha = \beta[n]).$$

Несложно видеть, что транзитивное замыканием бинарного отношения R совпадает со стандартным порядком на ординалах $<$.

Лореном Бро [4] была доказана теорема

Теорема 3. *При всех $\alpha \in [1, \varepsilon_0)$ разрешима теория $\mathbf{Th}((\alpha; <, R)')$.*

Лемма 15. *В модели $(\alpha; R)'$ интерпретируется модель $(\alpha; <, \psi)'$*

Доказательство. Для доказательства леммы нам достаточно выразить операцию ψ в $(\omega_\alpha; <, \mathsf{R})'$, ниже мы строим такое выражение. Пусть $\beta \in \omega_\alpha$ — ненулевой ординал. Покажем, что $\psi(\beta)$ есть второй ординал γ такой, что $\beta \mathsf{R} \gamma$. Пусть канторовская нормальная форма β имеет вид

$$\omega^{\beta_1} + \ldots + \omega^{\beta_{k-1}} + \underbrace{\omega^{\beta_k} + \ldots + \omega^{\beta_k}}_{n \text{ слагаемых}}, \text{ где } k, n \geq 1 \text{ и } \beta_1 \geq \beta_2 \geq \ldots \geq \beta_{k-1} > \beta_k.$$

Ясно, что $\psi(\beta) = \omega^{\beta_1} + \ldots + \omega^{\beta_{k-1}} + \omega^{\beta_k + 1}$. Очевидно имеет место $\beta \mathsf{R} \psi(\beta)$ и $\beta \mathsf{R} (\beta + 1)$. От противного докажем, что для всех $\gamma \in (\beta + 1, \psi(\beta))$ не выполняется $\beta \mathsf{R} \gamma$. Предположим $\gamma \in (\beta + 1, \psi(\beta))$ и $\beta \mathsf{R} \gamma$. Ординал γ имеет канторовскую нормальную форму

$$\omega^{\beta_1} + \ldots + \omega^{\beta_{k-1}} + \underbrace{\omega^{\beta_k} + \ldots + \omega^{\beta_k}}_{n \text{ слагаемых}} + \omega^{\gamma_1} + \ldots + \omega^{\gamma_s}, \text{ где } s \geq 1 \text{ и } \beta_k > \gamma_1.$$

Из определения отношения R следует, что $\gamma \in \boldsymbol{Lim}$ и для некоторого n мы имеем $\gamma[n] = \beta$. Но

$$\gamma[n] = \omega^{\beta_1} + \ldots + \omega^{\beta_{k-1}} + \underbrace{\omega^{\beta_k} + \ldots + \omega^{\beta_k}}_{n \text{ слагаемых}} + \omega^{\gamma_1} + \ldots + \omega^{\gamma_{s-1}} + \omega^{\gamma_s}[n]$$

и $\omega^{\gamma_s}[n] \neq 0$. Тем самым, $\gamma[n] > \beta$ и мы пришли к противоречию с нашим предположением $\beta \mathsf{R} \gamma$. Следовательно, $\psi(\beta)$ действительно является вторым ординалом γ таким, что $\beta \mathsf{R} \gamma$.

В силу доказанного в предыдущем абзаце, ясно что для всяких $\beta, \gamma < \omega_\alpha$ равенство $\psi(\beta) = \gamma$ выполнено тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned}(\beta = 0 \to \gamma \in \boldsymbol{Lim} \mathbin{\&} \forall \delta < \gamma (\delta \notin \boldsymbol{Lim})) \mathbin{\&} \\ (\beta \neq 0 \to \beta \mathsf{R} \gamma \mathbin{\&} \exists! \delta < \gamma (\beta \mathsf{R} \delta))\end{aligned}$$

Следовательно, функция ψ выражается в $(\omega_\alpha; <, \mathsf{R})'$, что завершает доказательство леммы. □

Из лемм 13, 14, 15 и теоремы 3, которая была доказана в [4], мы получаем

Теорема 4. *При всех $\alpha \in [2, \omega)$ теория $\mathbf{Th}(\boldsymbol{W}^N_\alpha; \prec, \Lambda, \langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle, \langle 2 \rangle)$ разрешима.*

5 Элементарная эквивалентность некоторых моделей

В этом параграфе мы покажем, что структуры $(\boldsymbol{W}^N_\omega; \prec, \Lambda, \langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \langle 2\rangle)$ и $(\boldsymbol{W}^N_3; \prec, \Lambda, \langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \langle 2\rangle)$ элементарно эквивалентны. Тем самым мы покажем разрешимость $\mathbf{Th}(\boldsymbol{W}^N_\omega; \prec, \Lambda, \langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \langle 2\rangle)$ и усилим теорему 4. Для этого мы воспользуемся классическим результатом А. Эренфойхта [9] об элементарной эквивалентности.

Замечание 2. *Далее мы рассматриваем понятия ординала, пары, функции и последовательности в теоретико-множественном стиле. Мы используем ординалы по фон Нейману* $\alpha = \{\beta \mid \beta < \alpha\}$*. Мы используем пары по Куратовскому* $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$*. Мы рассматриваем функции* f*, как множества пар* $\{(x, f(x)) \mid x \in \mathrm{dom}(f)\}$*. Мы рассматриваем последовательности* $\langle a_\beta \mid \beta < \alpha\rangle$*, как функции* $\{(\beta, a_\beta) \mid \beta < \alpha\}$*.*

Пусть $\mathfrak{A}$ структура без функциональных символов в сигнатуре. Мы определяем модель $\mathfrak{A}^+$ с сигнатурой расширяющей сигнатуру модели $\mathfrak{A}$ бинарным предикатным символом $\in$ и унарным предикатным символом Ur. Универсум модели $\mathfrak{A}^+$ — это множество $\boldsymbol{A}^+$. Множество $\boldsymbol{A}^+$ задается, как минимальное множество такое, что $\boldsymbol{A} \times \{\omega\} \subset \boldsymbol{A}^+$ и $\mathcal{P}^{<\omega}(\boldsymbol{A}^+) \subset \boldsymbol{A}^+$. Очевидно, $\boldsymbol{A}^+$ существует и единственно. Мы определяем стандартное вложение $e_{\boldsymbol{A}} \colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}^+$, для всяких $a \in \boldsymbol{A}$ мы полагаем $e_{\boldsymbol{A}}(a) = (a, \omega)$. Отметим, что $a^+ \in \boldsymbol{A}^+$ имеет вид (x, ω) если и только если $a^+ \in e_{\boldsymbol{A}}[\boldsymbol{A}]$. Интерпретация всякого предикатного символа $\mathsf{P}(x_1, \ldots, x_n)$ из сигнатуры $\mathfrak{A}$ в модели $\mathfrak{A}^+$ такова:

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}^+ \models \mathsf{P}(a_1^+, \ldots, a_n^+) \overset{\text{def}}{\iff} & \; a_1^+, \ldots, a_n^+ \in e_{\boldsymbol{A}}[\boldsymbol{A}] \text{ и} \\ & \mathfrak{A} \models \mathsf{P}(e_{\boldsymbol{A}}^{-1}(a_1^+), \ldots, e_{\boldsymbol{A}}^{-1}(a_n^+)).\end{aligned}$$

Для каждого $a^+ \in \boldsymbol{A}^+$

$$\mathfrak{A}^+ \models \mathsf{Ur}(a^+) \overset{\text{def}}{\iff} a^+ \in e_{\boldsymbol{A}}[\boldsymbol{A}].$$

Для каждого $a_1^+, a_2^+ \in \boldsymbol{A}^+$

$$\mathfrak{A}^+ \models a_1^+ \in a_2^+ \overset{\text{def}}{\iff} a_2^+ \notin e_{\boldsymbol{A}}[\boldsymbol{A}] \text{ и } a_1^+ \in a_2^+.$$

Тем самым, мы определили модель $\mathfrak{A}^+$. Если $a^+ \in \mathfrak{A}^+$ таков, что $\mathfrak{A}^+ \models \mathsf{Ur}(a^+)$, тогда мы называем $a^+ \in \mathfrak{A}^+$ урэлементом.

Определим понятие *ω-хвоста* ординала α с канторовской нормальной формой $\omega^{\alpha_1} + \omega^{\alpha_2} + \ldots + \omega^{\alpha_n}$. Если $\alpha < \omega^\omega$, то ω-хвост α совпадает с α. Если $\alpha \geq \omega^\omega$, то ω-хвостом α будет ординал $\omega^\omega + \omega^{\alpha_k} + \ldots + \omega^{\alpha_n}$, где k минимальное натуральное число такое, что $\alpha_i < \omega$ для всех i таких, что $k \leq i \leq n$.

Известен результат А. Эренфойхта о элементарной эквивалентности моделей $(\alpha_1; <)^+$ и $(\alpha_2; <)^+$ для α_1 и α_2 у которых совпадает ω-хвост [9]. Заметим, что при $\alpha \in [2, \omega]$ у всех ω_α совпадают ω-хвосты.

Лемма 16. *Для всякого* $\alpha \in \boldsymbol{Lim}$ *модель* $(\omega^\alpha; <, \psi)'$ *интерпретируется в* $(\alpha; <)^+$*.*

Доказательство. Несложно видеть, что $(\alpha;<)^+$ удовлетворяет всем аксиомам теории **ZF**, кроме аксиомы бесконечности и аксиомы объемности. При этом $(\alpha;<)^+$ удовлетворяет естественной модификацие аксиомы объемности

$$\forall x, y(\neg \mathsf{Ur}(x) \,\&\, \neg \mathsf{Ur}(y) \,\&\, \forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y).$$

Поэтому, в $(\alpha;<)^+$ выразимы понятия из замечания 2.

Пусть $\beta \in \omega^\alpha$ и его канторовская нормальная форма имеет вид $\omega^{\beta_1} + \ldots + \omega^{\beta_n}$. Тогда его интерпретация β^I равна конечной последовательности $(e_\alpha(\beta_1), \ldots, e_\alpha(\beta_n))$. В $(\alpha;<)^+$ множество всех интерпретаций ординалов определимо, как множество всех монотонно невозрастающих последовательностей урэлементов. Интерпретацией множества $\boldsymbol{A} \in \mathcal{P}^{<\omega}(\omega^\alpha)$ является $\boldsymbol{A}^I = \{\beta^I \mid \beta \in \boldsymbol{A}\}$. Множество всех интерпретаций конечных множеств ординалов очевидно определимо в $(\alpha;<)^+$. Предикат $\in$ интерпретируется тривиальным образом. Предикат $<^I$, интерпретирующий $<$, задается, как лексикографический порядок на конечных последовательностях атомов. Зададим интерпретацию ψ — функцию ψ^I. $\psi^I((e_\alpha(\beta_1), \ldots, e_\alpha(\beta_n)))$ равна лексикографически минимальной последовательности, заканчивающейся на $e_\alpha(\beta_n+1)$ и лексикографически большей, чем $(e_\alpha(\beta_1), \ldots, e_\alpha(\beta_n))$. □

Заметим, что переводы формул, извлекаемые из доказательств лемм 13, 14 и 16, не зависят от параметров пар теорий. От сюда и леммы 16 последовательно выводятся следующие следствия:

Следствие 1. *Для всяких* $\alpha_1, \alpha_2 \in [3, \omega]$ *модели* $(\omega_{\alpha_1};<,\psi)'$ *и* $(\omega_{\alpha_2};<,\psi)'$ *элементарно эквивалентны.*

Следствие 2. *Для всяких* $\alpha_1, \alpha_2 \in [3, \omega]$ *модели* $(\omega_{\alpha_1};<,\psi)''$ *и* $(\alpha_2;<,\psi)''$ *элементарно эквивалентны.*

Следствие 3. *Пусть ординал* $\alpha \in [3, \omega]$. *Тогда модели* $(\boldsymbol{W}^N_\alpha; \prec, \Lambda, \langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \langle 2\rangle)$ *и* $(\boldsymbol{W}^N_3; \prec, \Lambda, \langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \langle 2\rangle)$ *элементарно эквивалентны.*

Из следствия 3 и теоремы 4 мы заключаем следующую усиленную версию теоремы 4:

Теорема 5. *При всех* $\alpha \in [2, \omega]$ *теория* $\mathbf{Th}(\boldsymbol{W}^N_\alpha; \prec, \Lambda, \langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \langle 2\rangle)$ *разрешима.*

Список литературы

[1] L.D. Beklemishev. Proof-theoretic analysis by iterated reflection. *Arch. Math. Log.*, 42(6):515–552, 2003.

[2] L.D. Beklemishev. Provability algebras and proof-theoretic ordinals, I. *Annals of Pure and Applied Logic*, 128:103–123, 2004.

[3] L.D. Beklemishev. Veblen hierarchy in the context of provability algebras. In D. Westerståh P. Hájek, L. Valdés-Villanueva, editor, *Proceedings of the Twelfth International Congress*, Logic, Methodology and Philosophy of Science, pages 65–78. Kings College Publications, 2005.

[4] L. Braud. Covering of ordinals. In *FSTTCS: Foundations of Software Technology and Theoretical Computer Science*, pages 97–108, 2009.

[5] J.R. Büchi. Decision methods in the theory of ordinals. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 71:767–770, 1965.

[6] L. Carlucci. Worms, gaps and hydras. *Mathematical Logic Quarterly*, 51(4):342–350, 2005.

[7] A. Church. The constructive second number class. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 44:224–232, 1938.

[8] J.E. Doner, A. Mostowski, and A. Tarski. The elementary theory of well-odering — a metamathematical study. In Leszek Pacholski Angus Macintyre and Jeff Paris, editors, *Logic Colloquium '77*, volume 96 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, pages 1 – 54. Elsevier, 1978.

[9] A. Ehrenfeucht. An application of games to the completeness problem for formalized theories. *Fundamenta Mathematicae*, 49:129–141, 1961.

[10] G. Gentzen. Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie. *Mathematische Annalen*, 112:493–565, 1936.

[11] P. Hájek and P. Pudlák. *Metamathematics of First-Order Arithmetic*. Springer-Verlag, 1998.

[12] K.N. Ignatiev. On strong provability predicates and the associated modal logics. *The Journal of symbolic logic*, 58(1):249–290, 1993.

[13] S.C. Kleene. On notation for ordinal numbers. *J. Symb. Log.*, 3(4):150–155, 1938.

[14] G. Kreisel. Wie die Beweistheorie zu ihren Ordinalzahlen kam und kommt. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 78(4):177–223, 1977.

[15] G. Lee. A comparison of well-known ordinal notation systems for ε_0. *Annals of Pure and Applied Logic*, 147(1-2):48 – 70, 2007.

[16] W. Pohlers. *Proof Theory: The First Step into Impredicativity.* Universitext. Springer, 2008.

[17] M. Rathjen. The realm of ordinal analysis. In S.B. Cooper and J.K. Truss, editors, *Sets and proofs. London Math. Soc. Lect. Note Series 258*, pages 219–279. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[18] J.H. Rogers. *Theory of Recursive Functions and Effective Computability.* MIT Press, Cambridge, MA, USA, 1987.

[19] K. Schütte and S. Simpson. Ein in der reinen Zahlentheorie unbeweisbarer Prinzip über endliche Folgen von natürlichen Zahlen. *Archiv für Mathematische Logik und Grundlagenforschung*, 25:75–89, 1985.

[20] A. Tarski and A. Mostowski. Arithmetical classes and types of well ordered systems. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 55:65, 1949.

[21] Л.Д. Беклемишева. Схемы рефлексии и алгебры доказуемости в формальной арифметике. *УМН*, 60:3–78, 2005.

[22] Г.К. Джапаридзе. Модально-логические средства исследования доказуемости. Дисс. канд. филос. наук, Москва, МГУ, 1986.

[23] Г. Крайзель. Как теория доказательств пришла к своим ординальным числам и как она приходит к ним теперь. В С.Ю. Маслов, редактор, *Исследования по теории доказательств: сборник статей*, Новое в зарубежной науке: Математика, страницы 183 – 237. Изд-во «Мир», 1981.

[24] И.А. Лавров. Эффективная неотделимость множества тождественно истинных и множества конечно опровержимых формул некоторых теорий. *Алгебра и Логика Семинар*, 2(1):5–18, 1963.

[25] Ф.Н. Пахомов. Неразрешимость элементарной теории полурешетки GLP-слов. *Матем. сб.*, 203:141–160, 2012.

[26] Г. Такеути. *Теория доказательств.* Изд-во «Мир», 1978.