Расслоения, характеристические классы и кобордизмы
(записки лекций)

М. Э. Казарян

Содержание

1 Понятие характеристического класса

Отображение $E \to B$ топологических пространств называется *тривиальным расслоением*, если существует гомеоморфизм $E \simeq B \times F$, при котором отображению π соответствует проекция на первый сомножитель $B \times F \to B$. *Локально тривиальным расслоением* с базой B, тотальным пространством E и слоем F называется отображение $\pi : E \to B$, такое, что у каждой точки имеется окрестность U, для которой ограничение отображения на полный прообраз $\pi^{-1}(U)$ является тривиальным расслоением. Сохраняющий слои проекции в U гомеоморфизм $\pi^{-1}U \simeq U \times F$ называется *тривиализацией* расслоения над окрестностью U. Все слои локально тривиального расслоения гомеоморфны между собой, однако гомеоморфизм $\pi^{-1}(X) \simeq F$ не канонический, а зависит от выбора тривиализации. Различные тривиализации возникают, в частности, на пересечении двух областей, над которыми расслоение тривиализовано. Переход от одной тривиализации к другой задается семейством гомеоморфизмов $g_x : F \to F$, параметризованных точками x области U. Отображения g_x называются функциями склейки, или функциями перехода.

Векторным расслоением называется локально тривиальное расслоение, слоем которого служит векторное пространство $\mathbb{R}^n$, и у которого выбрана система тривиализаций, все функции перехода которой — линейные преобразования. Если слои векторного расслоения снабжены согласованной ориентацией или комплексной структурой, то расслоение называется *ориентированным*, или *комплексным*, соответственно. *Рангом* векторного расслоения называется размерность n его слоев.

Сечением расслоения $\pi : E \to B$ называется отображение $s : B \to E$, переводящее всякую точку в слой над этой точкой, то есть такое, что $\pi\, s = \mathrm{id}$. Сечения векторного расслоения образуют модуль над кольцом функций на его базе.

Примерами векторных расслоений являются касательное $TX \to X$ и кокасательное $T^*X \to X$ расслоение гладкого многообразия, а также всевозможные тензорные расслоения.

Если многообразие X вложено в многообразие Y, то касательные плоскости к объемлющему многообразию задают расслоение $T_XY \to X$, являющееся *ограничением* касательного расслоения к Y на подмногообразие X. Факторрасслоение $\nu_X = T_XY/TX$, слоями которого являются факторпространства, называется *нормальным* расслоением подмногообразия X. Слой нормального расслоения в точке $x \in X$ можно отождествить с ортогональным дополнением касательной плоскости T_xX в T_xY относительно произвольной римановой метрики.

Еще одну серию примеров доставляют так называемые *тавтологические* расслоения над проективными пространствами и грассманианами. Точками проективного пространства P^n являются прямые в векторном пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$. Обозначим через τ расслоение над проективным пространством, слоем которого над произвольной точкой является сама отвечающая этой точке прямая. Это расслоение называется *тавтологическим.* Аналогично определяется тавтологическое комплексное расслоение ранга 1 над комплексным проективным пространством $\mathbb{C}P^n$. В алгебраической геометрии тавтологическое расслоение над проективным пространством обозначается через $\tau = \mathcal{O}(-1)$, в то время как через $\mathcal{O}(1)$ обозначается двойственное расслоение τ^*, слоями которого служат линейные функции на слоях исходного расслоения.

Аналогичным образом определяется тавтологическое (вещественное или комплексное) расслоение ранга k над (вещественным или комплексным, соответственно) многообразием Грассмана $G_{k,n}$ k-мерных подпространств в n-мерном векторном пространстве.

Одной из важнейших операций над расслоениями (как векторными, так и произвольными локально тривиальными) является *операция замены базы.* Если задано расслоение $\pi : E \to Y$ и произвольное непрерывное отображение $f : X \to Y$, то на X возникает естественное расслоение, слоем которого над точкой $x \in X$ является слой $E_{f(x)} = \pi^{-1}(f(x))$ исходного расслоения над образом этой точки при отображении f. Полученное расслоение называется *индуцированным* из расслоения π посредством отображения f и обозначается через $f^*(\pi)$:

$$\begin{tikzcd} f^*E \arrow[r] \arrow[d, "f^*(\pi)"'] & E \arrow[d, "\pi"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

Примером индуцированного расслоения служит обсуждавшееся выше ограничение расслоения на подпространство базы.

Задача 1.1 Приведите строгое определение индуцированного расслоения (опишите тривиализации и функции перехода).

Определение 1.2 *Характеристическим классом* χ называется универсальное правило, сопоставляющее всякому векторному расслоению $E \to B$ класс когомологий $\chi(E) \in H^*(B)$ базы, которое функториально по отношению к замене бызы: для всякого отображения $f : X \to B$ характеристический класс $\chi(f^*E)$ индуцированного расслоения совпадает с обратным образом $f^*(\chi(E))$ характеристического класса $\chi(E)$ исходного расслоения.

Пример 1.3 Первый класс Штиффеля-Уитни. Пусть задано вещественное векторное расслоение $E \to B$. Сопоставим всякому замкнутому пути на базе 0 или 1, если при обходе вдоль этого пути ориентация слоя сохраняется (соответственно, обращается). Построенное соответствие задает $\mathbb{Z}_2$-линейное отображение $H_1(B, \mathbb{Z}_2) \to \mathbb{Z}_2$, то есть одномерный класс когомологий базы. Этот класс $\omega_1(E) \in H^1(B, \mathbb{Z}_2)$ называется *первым классом Штиффеля-Уитни.*

Задача 1.4 Докажите свойство функториальности для первого класса Штиффеля-Уитни.

Задача 1.5 Вычислите ω_1 для тавтологического расслоения на вещественном проективном пространстве.

Задача 1.6 Докажите, что ориентируемость расслоения равносильна равенству $\omega_1 = 0$.

Пример 1.7 Класс Эйлера. Пусть базой B заданного ориентированного расслоения $E \to B$ служит гладкое многообразие. Выберем произвольное гладкое сечение s общего положения и обозначим через Z множество точек, в которых это сечение обращается в ноль. В случае общего положения подмножество Z является гладким подмногообразием, коразмерность которого равна рангу расслоения. Кроме того, ориентация расслоения E задает коориентацию подмногообразия Z. Двойственный к Z класс (целочисленных) когомологий $e(E)$ называется *классом Эйлера* расслоения E.

Задача 1.8 Докажите, что класс Эйлера не зависит от выбора сечения (при условии, что оно общего положения). Докажите свойство функториальности для класса Эйлера.

Задача 1.9 Вычислите класс Эйлера тавтологического расслоения $\tau = \mathcal{O}(-1)$ на комплексном проективном пространстве, а также сопряженного расслоения $\tau^* = \mathcal{O}(1)$.

Задача 1.10 Докажите, что для всякого компактного ориентированного многообразия значение класса Эйлера касательного расслоения на фундаментальном классе многообразия равно его эйлеровой характеристике.

Имеется полная классификация характеристических классов. В зависимости от типов рассматриваемых расслоений, это классы Черна комплексных расслоений; классы Штиффеля-Уитни в когомологиях с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$ и целочисленные классы Эйлера-Понтрягина вещественных расслоений, а также полиномиальные комбинации всех этих классов. Построению и изучению свойств этих классов и посвящен данный курс.

2 Двойственность Пуанкаре, гомоморфизм Гизина и изоморфизм Тома

В этом пункте мы собрали некоторые стандартные сведения о когомологиях многообразий, которыми мы будем постоянно пользоваться, порою без дополнительных ссылок на них.

1. На всяком компактном ориентированном многообразии M имеет место изоморфизм двойственности Пуанкаре

$$H^k(M) \simeq H_{n-k}(M), \qquad n = \dim M.$$

Этот изоморфизм является каноническим и имеет место с учетом кручения. Если M некомпактно, то изоморфизм также имеет место, если вместо обычных гомологий рассматривать гомологии с замкнутыми носителями, то есть обычные гомологии одноточечной компактификации. Таким образом, в более общей формулировке изоморфизм Пуанкаре имеет вид

$$H^k(M) \simeq H^{\mathrm{cl}}_{n-k}(M).$$

Если многообразие не обязательно ориентировано, аналогичный изоморфизм имеет место для когомологий с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$.

2. Если $f : M \to N$ — гладкое отображение, то, помимо обычного гомоморфизма f^* когомологий, действующего в «обратную сторону» имеется *гомоморфизм Гизина*, или *гомоморфизм прямого образа*, действующий в «непривычную» сторону

$$f_* : H^k(M) \to H^{k+\ell}(N), \qquad \ell = \dim N - \dim M.$$

Этот гомоморфизм определяется как композиция двойственности Пуанкаре на M, обычного гомоморфизма f_* в гомологиях и двойственности Пуанкаре на N. Определение имеет смысл, если многообразия M и N ориентированы, либо если рассматриваются когомологии с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$. Кроме того, если M некомпактно, для корректности определения f_* необходимо, чтобы f было *собственным*. Случай, когда M некомпактно, встречается довольно часто. Типичными примерами собственных отображений являются замкнутое вложение, локально тривиальное расслоение с компактными слоями, а также композиция двух собственных отображений.

Гомоморфизм Гизина функториален, иными словами, имеет место равенство $(fg)_* = f_* g_*$ для композиции собственных отображений. Поскольку гомоморфизм f_* сдвигает градуировку, он не может быть мультипликативным. Вместо этого выполняется следующее важное свойство, называемое *формулой проекции*:

$$f_*\,(f^*a) \smile b = a \smile f_* b, \quad a \in H^*(N), \quad b \in H^*(M).$$

Иными словами, *гомоморфизм f_* является гомоморфизмом $H^*(N)$-модулей*, где действие $H^*(N)$ на $H^*(M)$ определяется посредством f^*.

Рассматривая $H^*(M)$ как $H^*(N)$-модуль, мы будем часто опускать обозначение f^* и вместо $(f^*a) \smile b$ писать $a \smile b$ или просто $a\,b \in H^*(M)$, где $a \in H^*(N)$. *Указание на f^* часто опускается также при обозначении индуцированных векторных расслоений и их характеристических классов.* Если некоторый класс когомологий задан как полиномиальная комбинация характеристических классов различных векторных расслоений, то необходимо сперва ограничить эти расслоения на рассматриваемое многообразие, а потом уже вычислять значение класса. Как показывает опыт, использование этого соглашения редко приводит к неоднозначной интерпретации, но существенно упрощает обозначения и облегчает понимание.

Вычислить гомоморфизм f_* в один шаг обычно не удается, и для его вычисления отображение f раскладывается в композицию $f = \pi\, i$, где i — вложение, а π — локально тривиальное расслоение.

Если $f = i : M \hookrightarrow N$ — вложение коразмерности ℓ, то $i_* 1 = [M] \in H^\ell(N)$ — класс когомологий, двойственный самому подмногообразию $M \subset N$ (подмногообразие должно быть коориентированным, либо нужно рассматривать когомологии с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$). Из формулы проекции вытекает, что i_* действует умножением на $i_*(1)$ на тех классах, которые являются ограничением на M классов когомологий, заданных на N.

В частности, если $i : M \to E$ — вложение нулевого сечения в тотальное пространство векторного расслоения ранга ℓ, то двойственный нулевому сечению класс $e(E) = i_*(1)$ называется классом Эйлера расслоения, и гомоморфизм $i_* : H^k(M) \to H^{k+\ell}(E) = H^{k+\ell}(M)$ задается умножением на $e(E)$ (расслоение должно быть ориентированным, либо нужно рассматривать когомологии с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$). В частности, для произвольного вложения композиция $i^* i_* : H^*(M) \to H^*(M)$ действует умножением на класс Эйлера нормального расслоения.

3. В случае, когда $f = \pi$ — проекция на базу локально тривиального расслоения $\pi : W \to B$ с компактными слоями, для вычисления гомоморфизма π_* часто удается воспользоваться следующим утверждением.

Предложение 2.1 *Предположим, что когомологии слоя $F = \pi^{-1}(\mathrm{pt})$ расслоения π являются свободным модулем над выбранным кольцом коэффициентов. Пусть, более того, имеется набор классов $e_1 = 1, e_2, \dots, e_d \in H^*(W)$, заданных на тотальном пространстве расслоения, ограничение которых на слой задает свободный базис когомологий слоя. Тогда этот же набор классов является свободной системой образующих $H^*(B)$-модуля $H^*(W)$,*

$$H^*(W) = H^*(B)\, e_1 \oplus \cdots \oplus H^*(B)\, e_d.$$

Правая часть равенства описывает начальный член спектральной последовательности расслоения, и предложение утверждает, что при сделанных предположениях спектральная последовательность вырождается в начальном члене. Действительно, на классах $e_i \in E_2^{0,*}$ все дифференциалы равны нулю, поскольку эти классы глобально заданы на W, а на остальных классах равенство всех дифференциалов вытекает из мультипликативности спектральной последовательности.

Альтернативно, предложение можно доказать применением принципа Майера-Вьеториса. Имеется естественный гомоморфизм из правой части равенства в левую, и требуется доказать, что этот гомоморфизм является изоморфизмом. Для случая, когда база стягиваема, утверждение очевидно (в силу тривиальности расслоения). Кроме того, из последовательности Майера-Вьеториса вытекает, что если утверждение справедливо для ограничения расслоения на два подпространства и их пересечение, то утверждение справедливо также и для объединения этих подпространств. Индукцией по числу клеток базы мы выводим справедливость утверждения для любой (клеточной) базы. □

Если слой расслоения π — гладкое компактное многообразие (ориентированное относительно выбранного кольца коэффициентов), то в силу двойственности Пуанкаре среди классов e_i имеется единственный класс максимальной степени, равной размерности F. Пусть это будет класс e_d. Тогда в обозначениях предложения гомоморфизм Гизина π_* задается проекцией на слагаемое $H^*(B)\, e_d \simeq H^*(B)$, что сразу следует из формулы проекции. Заметим также, что гомоморфизм π^* обратного образа инъективен и задается вложением слагаемого $H^*(B)\, e_1$.

Примерами расслоений, к которым применимо это предложение, служат, как мы увидим, различные грассмановы и флаговые расслоения, ассоциированные с векторным расслоением.

4. Справедлив также относительный вариант утверждения предложения, когда имеется пара, состоящая из расслоения и его подрасслоения. Частным случаем этого утверждения является *изоморфизм Тома*. Пусть $E \to B$ — ориентированное векторное расслоение. Обозначим через X дополнение к расслоению единичных дисков (относительно некоторой метрики на слоях расслоения E). Факторпространство $M(E) = E/X$ называется *пространством Тома* расслоения E. Для него имеет место изоморфизм

$$H^k(B) \xrightarrow{\simeq} H^{k+\ell}(\tau E), \quad a \mapsto a\, u,$$

где $u \in H^\ell(M(E))$ — *класс Тома*, определяемый тем, что при вложении слоя $S^\ell \to \tau E$ этот класс переходит в образующую группы $H^\ell(S^\ell) = \mathbb{Z}$. Этот класс однозначно определяется выбором ориентации расслоения.

Произведение $a\, u$ понимается в следующем смысле. Гомотопическая эквивалентность $E \to B$ позволяет отождествить когомологии базы B и тотального пространства E векторного расслоения. Тогда имеется обычное $\smile$-умножение

$$H^*(E) \times H^*(E, X) \to H^*(E, X)$$

(заметим, что это умножение не сводится к умножению в когомологиях какого-нибудь одного пространства).

Если расслоение не обязательно ориентируемо, то аналогичный изоморфизм Тома имеется в когомологиях с $\mathbb{Z}_2$-коэффициентами.

Если на базе расслоения задано клеточное разбиение, то оно очевидным образом индуцирует клеточное разбиение пространства Тома. А именно, всякая k-мерная клетка базы задает $n + k$-мерную клетку пространства Тома, где n – ранг расслоения E, и помимо этого, в пространстве Тома имеется еще одна нульмерная клетка, соответствующая стянутому подпространству X. Поэтому с точки зрения клеточных когомологий изоморфизм Тома очевиден и выполняется на уровне клеточных коцепей.

5. Изоморфизм Тома приводит к более концептуальной интерпретации гомоморфизма Гизина. Пусть задано вложение $f : Y \to X$ гладких многообразий. Трубчатая окрестность подмногообразия Y изоморфна расслоению единичных дисков в нормальном расслоении ν_Y этого подмногообразия. Поэтому стагивание дополнения к трубчатой окрестности задает отображение $\rho : X \to M(\nu_Y)$. Индуцированный этим отображением гомоморфизм

$$H^*(M(\nu_Y)) \to H^*(X)$$

совпадает с гомоморфизмом Гизина f_* при отождествлении когомологий пространств $M(\nu_Y)$ и Y, задаваемом изоморфизмом Тома.

Аналогично, для произвольного собственного отображения $f : Y \to X$ представим это отображение в виде композиции $Y \to E \to X$, где первая стрелка — вложение в пространство некоторого векторного расслоения над Y (например, тривиального). Тогда стягивание дополнения к трубчатой окрестности подмногообразия Y задает отображение пространств Тома $M(E) \to M(\nu_Y)$, и индуцированный этим отображением гомоморфизм

$$H^*(M(\nu_Y)) \to H^*(M(E))$$

совпадает с гомоморфизмом Гизина f_* при отождествлении когомологий пространств $M(\nu_Y)$ и Y, а также пространств X и $M(E)$, задаваемом изоморфизмом Тома.

6. Всякому классу когомологий a старшей размерности n на n-мерном компактном гладком ориентированном многообразии X сопоставляется «характеристическое число» — значение этого класса на фундаментальном гомологическом классе $[X]$ многообразия. В зависимости от предпочтений, разные авторы используют следующие эквивалентные обозначения для этого числа:

$$a([X]) = \langle a, [X] \rangle = a \frown [X] = \int_X a = p_*(a).$$

В последней интерпретации $p : X \to \mathrm{pt}$ — отображение в точку, и p_* — соответствующий этому отображению гомоморфизм Гизина. Действительно, класс a двойственен по Пуанкаре некоторому набору точек на многообразии X, и гомоморфизм p_* вычисляет количество этих точек. Несмотря на свою очевидность, последнее равенство приводит к следующему полезному индуктивному способу вычисления характеристического числа. Для всякого отображения $f : X \to Y$ компактных ориентированных многообразий (размерности которых соотносятся произвольным образом) мы получаем равенство

$$\int_X a = \int_Y f_*(a).$$

Обратно, пусть X — область значений отображения $g : Z \to X$. Выберем произвольный класс $b \in H^*(Z)$, такой, что $g_*(b) = 1 \in H^0(X)$ (такое возможно, только если $\dim Z \geqslant \dim X$). Тогда из формулы проекции мы получаем

$$\int_X a = \int_Z b\, g^*(a).$$

Последовательное применение обоих равенств дает эффективный способ вычисления характеристических чисел во многих случаях.

Условие ориентированности многообразий можно отбросить, если речь идет о характеристическом числе со значением в $\mathbb{Z}_2$.

3 Характеристические классы G-расслоений

Всякое локально тривиальное расслоение $\pi : E \to B$ со слоем F склеивается из тривиализаций $\pi^{-1}U_\alpha = F \times U_\alpha$, заданных на областях $U_\alpha \subset B$ некоторого покрытия $B = \bigcup U_\alpha$ при помощи функций склейки, или функций перехода $g_{\alpha\beta}$, заданных на пересечении областей $U_\alpha \cap U_\beta$ и принимающих значение в группе диффеоморфизмов (или гомеоморфизмов) слоя. Говорят, что *структурная группа расслоения редуцирована к подгруппе* $G \subset \mathrm{Diff}(F)$, если все функции склейки принимают значение в G.

Возможность редукции структурной группы к G следует рассматривать не как свойство исходного расслоения, а скорее как дополнительную структуру на нем. Например, ленту Мебиуса можно рассматривать как нетривиальное расслоение над S^1 со слоем $\mathbb{R}$ и структурной группой $\mathbb{Z}_2$. Прямой суммой двух таких расслоений является расслоение над S^1 со слоем $\mathbb{R}^2$, которое также нетривиально как расслоение со структурной группой $\mathbb{Z}_2$, однако тривиально как топологическое локально тривиальное расслоение: тривиализация этого расслоения использует диффеоморфизмы слоя, которые не лежат в $\mathbb{Z}_2$.

После того как функции перехода со значениями в G фиксированы, можно забыть о том, что группа G действует в F диффеоморфизмами, и рассмотреть расслоение с теми же функциями перехода, но с другим действием G на другом пространстве. В частности, если в качестве этого действия используется действие группы на себе правыми сдвигами, то такое расслоение называется *главным G-расслоением.* В другой терминологии, главное G-расслоение — это пространство E, заданное вместе со свободным действием на нем группы G. В таком случае базой этого расслоения служит пространство орбит (действие называется свободным, если преобразование, задаваемое всяким элементом $g \neq e \in G$, не имеет неподвижных точек). Таким образом, категории расслоений со структурной группой G и слоем F с заданным на нем действием группы естественно изоморфны между собой для различных F и изоморфны категории главных G-расслоений. В частности, теория характеристических классов (см. ниже) для таких расслоений определяется группой G и не зависит от выбора F.

Теорема 3.1 *Для всякой топологической группы G существует универсальное главное G-расслоение $EG \to BG$, такое, что всякое G-расслоение на всякой клеточной базе B индуцировано из универсального некоторым непрерывным отображением $\varkappa : B \to BG$. Более того, это соответствие является взаимно однозначным между множествами G-расслоений на B и множеством гомотопических классов непрерывных отображений из B в BG.*

Классифицирующее главное G-расслоение $EG \to BG$ определяется условием того, что пространство EG этого расслоения гомотопически тривиально, $\pi_i(EG) = 0$ при $i \geqslant 1$.

Конструкцию главного G-расслоения для случая $G = GL(n)$ мы приведем и обсудим в подробностях в следующем пункте. Автоматически, то же тотальное пространство $EGL(n)$ классифицирующего главного расслоения может служить и для произвольной подгруппы группы $GL(n)$. Это дает конструкцию главного расслоения для произвольной группы Ли.

Теперь докажем классифицирующее свойство построенного G-расслоения с гомотопически тривиальным тотальным пространством. Для построения искомого классифицирующего отображения $\varkappa : B \to BG$ нужно построить G-эквивариантное отображение $\widetilde{\varkappa} : E \to EG$ тотальных пространств главных расслоений. Это можно сделать, продолжая строящееся отображение с клетки на клетку пространства B. Условие гомотопической тривиальности EG обеспечит на каждом шагу возможность такого продолжения, а также тот факт, что произвол конструкции приведет к гомотопным отображениям.

Действительно, действуя индукцией по размерности клеток, предположим, что G-эквивариантное отображение $E \to EG$ уже построено над $n-1$-мерным остовом базы.

Рассмотрим некоторую n-мерную клетку σ в B. Поскольку клетка стягиваема, расслоение над ней тривиализуется, $\pi^{-1}(\sigma) \simeq \sigma \times G$. Над границей клетки отображение уже построено. В частности, задано отображение $S^{n-1} \simeq \partial\sigma \times \{e\} \to BE$. Поскольку всякая сфера в BE затягивается, это отображение может быть продолжено до отображения $\sigma \times \{e\}$. Выберем это продолжение произвольным образом. После этого искомое отображение $\widetilde{\varkappa}$ продолжается на $\sigma \times G$ по эквивариантности уже однозначно:

$$(x, g) = g\,(x, e) \mapsto g\,\widetilde{\varkappa}(x, \varepsilon).$$

Единственность универсального расслоения (с точностью до слабой гомотопической эквивалентности) вытекает из его универсальности (докажите самостоятельно). □

Определение 3.2 *Характеристическим классом* называется правило, которое каждому G-расслоению сопоставляет класс когомологий базы, функториально ведущий себя по отношению к операции замены базы.

Следствие 3.3 (теоремы 3.1) *Кольцо характеристических классов G-расслоений изоморфно кольцу когомологий классифицирующего пространства BG.*

Действительно, всякий класс когомологий χ пространства BG задает характеристический класс, индуцированный из χ классифицирующим отображением. Обратно, если характеристический класс задан как универсальное правило, это правило может быть применено, в частности, к классифицирующему G-расслоению $EG \to BG$, и следовательно, оно задает класс когомологий пространства BG.

Классифицирующее пространство, как правило, бесконечномерно. Для нужд вычислений можно его заменить конечномерной аппроксимацией: если $E_N \to B_N$ — такое главное G-расслоение, у которого тотальное пространство E_N является N-связным, то при $k < N$ имеет место изоморфизм $H^k(BG) \simeq H^k(B_N)$. Действительно, пусть $E_N \times_G EG = (E_N \times EG)/G$ — факторпространство относительно диагонального действия. Рассмотрим диаграмму естественных проектирований

$$B_N \longleftarrow E_N \times_G EG \longrightarrow BG.$$

Обе проекции являются гладкими локально тривиальными расслоениями с N-связными слоями. Отсюда вытекает (например, из рассмотрения спектральных последовательностей расслоений), что группы когомологий всех трех пространств изоморфны во всех размерностях, меньших N.

Пример 3.4 Если $G = \mathbb{Z}_2$, то в качестве аппроксимирующего главного G-расслоения можно рассмотреть накрытие $S^N \to \mathbb{R}P^N$, откуда, переходя к пределу, получаем

$$H^*(B\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2) = H^*(\mathbb{R}P^\infty, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[\omega_1],$$

где $\omega_1 \in H^1(\mathbb{R}P^N, \mathbb{Z}_2)$ — класс гиперплоскости.

Пример 3.5 Если $G = U(1) = S^1$, то в качестве аппроксимирующего главного G-расслоения можно рассмотреть расслоение Хопфа $S^{2N+1} \to \mathbb{C}P^N$, откуда, переходя к пределу, получаем

$$H^*(BU(1), \mathbb{Z}) = H^*(\mathbb{C}P^\infty, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[c_1],$$

где $c_1 \in H^2(\mathbb{C}P^N, \mathbb{Z})$ — класс гиперплоскости.

Всякая группа Ли G, состоящая из конечного числа компонент, имеет максимальную компактную подгруппу. Все максимальные компактные подгруппы сопряжены между собой и гомотопически эквивалентны самой группе G. Более того, имеется разложение вида $G = KS$, где K — некоторая максимальная компактная подгруппа, а S — стягиваемое замкнутое подмногообразие, диффеоморфное векторному пространству. Поскольку подгруппа K действует на стягиваемом пространстве EG, пространтво орбит этого действия можно взять в качестве классифицирующего пространства BK. В результате возникает расслоение $BK \to BG$ со стягиваемыми слоями, откуда следует гомотопическая эквивалентность пространств BG и BK, а также изоморфизм $H^*(BG) \simeq H^*(BK)$. Сформулируем вывод.

Следствие 3.6 *Теория G-расслоений и их характеристических классов для данной группы Ли G совпадает с теорией расслоений и характеристических классов для ее максимальной компактной подгруппы.*

В дальнейшем G у нас будет, как правило, группа Ли. И все же полезно сделать несколько комментариев относящихся к случаю *конечных групп.* Если G — конечная группа, то отображение $EG \to BG$ является конечным накрытием, откуда следует, что высшие гомотопические группы пространства BG тривиальны, то есть оно является пространством Эйленберга-Маклейна $K(G, 1)$. Когомологии этого пространства совпадают с когомологиями самой группы G, которые определяются чисто алгебраически. Нужно взять произвольную резольвенту группы G, то есть точный комплекс G-модулей

$$0 \longleftarrow \mathbb{Z} \longleftarrow R_0 \longleftarrow R_1 \longleftarrow \cdots ,$$

в котором $\mathbb{Z}$ рассматривается как тривиальный G-модуль, а G-модули R_i свободны. Тогда для всякого G-модуля R группы $H^*(G, R)$ определяются как когомологии комплекса $\mathrm{Hom}_G(R_i, R)$. Для классифицирующего главного G-расслоения можно построить клеточное разбиение пространства EG, для которого группа G действует перестановкой клеток. Тогда в качестве резольвенты можно взять коцепной комплекс этого клеточного разбиения, откуда и следует изоморфизм

$$H^*(BG) = H^*(K(G, 1)) = H^*(G).$$

Слои накрытия $\pi : EG \to BG$ состоят из $|G|$ точек. Поэтому гомоморфизм $\pi_*\pi^* : H^*(BG) \to H^*(BG)$ действует умножением на $|G|$. С другой стороны, этот гомоморфизм тривиален, поскольку пропускается через тривиальные когомологии пространства EG. Отсюда следует, что для конечной группы G когомологии $H^*(BG) = H^*(K(G, 1))$ являются группами кручения.

Пример 3.7 Пусть G — циклическая группа $\mathbb{Z}_m$. Зададим ее образующей x и соотношением $x^m = e$. В качестве резольвенты для этой группы можно положить R_i свободно порожденной (над $\mathbb{Z}[G]$) одной образующей a_i с дифференциалами $\partial a_{2k+1} = (x - 1)\, a_{2k}$ и $\partial a_{2k} = N\, a_{2k-1}$, где $N = \sum_{i=0}^{m-1} x^i$ — сумма всех элементов группы. Соответсвующий комплекс G-инвариантных коцепей имеет вид

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{m} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{m} \dots .$$

Поэтому $H^0(BG) = \mathbb{Z}$, $H^{2k}(BG) = \mathbb{Z}_m$ $(k \geqslant 1)$ и $H^{2k+1}(BG) = 0$.

Пример 3.8 Пусть $G = S(3)$ — группа перестановок трех элементов. Эта группа порождена циклической перестановкой x порядка 3 и транспозицией y порядка 2, связанными дополнительным соотношением $yxy = x^2$. Рассмотрим следующую диаграмму G-модулей и гомоморфизмов, в которой все вершины соответствуют свободным образующим, за исключением крайних, соответствующих G-модулю $\mathbb{Z}$ (с тривиальным действием группы):

$$\begin{tikzcd}
 & & \bullet \arrow[r, "-(1+x-y)"] \arrow[ddr, "1+yx"] & \bullet \arrow[dr, "x-1"] & & \\
\mathbb{Z} \arrow[r, "N"] & \bullet \arrow[ur, "x(y+1)(x-1)"] \arrow[dr, "y-1"'] & & & \bullet \arrow[r] & \mathbb{Z} \\
 & & \bullet \arrow[r, "y+1"'] & \bullet \arrow[ur, "y-1"'] & &
\end{tikzcd}$$

Копии этой диаграммы склеиваются в 4-периодическую резольвенту группы G, откуда вытекает, что и когомологии у этой группы 4-периодические. Более подробно, рассматривая комплекс G-инвариантных коцепей, мы находим $H^0(BG) = \mathbb{Z}$, $H^{4k}(BG) = \mathbb{Z}_6$ ($k \geqslant 1$), $H^{4k+2}(BG) = \mathbb{Z}_2$, а нечетномерные когомологии тривиальны.

4 Классы Черна комплексных расслоений

Теория характеристических классов комплексных векторных расслоений ранга n — это теория характеристических классов группы $GL(n, \mathbb{C}) \sim U(n)$. Комплексные расслоения часто встречаются в комплексной алгебраической геометрии. Тем не менее, для определения комплексной структуры в слоях векторного расслоения никакая дополнительная структура на базе расслоения, вообще говоря, не требуется, и мы рассматриваем комплексные расслоения над произвольной (клеточной) базой.

Теорема 4.1 *Классифицирующим пространством для группы $GL(n, \mathbb{C})$ является многообразие Грассмана $G_{n,N} = G^{\mathbb{C}}_{n,N}$ n-мерных подпространств комплексного N-мерного пространства, где $N \to \infty$. Классифицирующим расслоением над $G_{n,N}$ служит тавтологическое расслоение.*

Действительно, группа $GL(n)$ действует на пространстве $V = \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^N)$ матриц размера $n \times N$ линейными преобразованиями строк. Пространство действия стягиваемо, однако действие не является свободным. Рассмотрим подпространство V_{reg}, состоящее из матриц максимального ранга. Дополнение $V \setminus V_{\mathrm{reg}}$ имеет высокую коразмерность (порядка $2N$), поэтому нетривиальные гомотопические группы пространства V начинаются в высоких степенях, и, следовательно, многообразие орбит $V_{\mathrm{reg}}/GL(n)$ может служить аппроксимацией пространства $BU(n)$. Осталось только заметить, что многообразие орбит $V_{\mathrm{reg}}/GL(n)$ естественно изоморфно многообразию Грассмана $G_{n,N}$: набор из n линейно независимых векторов в $\mathbb{C}^N$, рассматриваемый с точностью до их линейного преобразования, однозначно задается подпространством, являющимся их линейной оболочкой. $\square$

Полезно привести явную конструкцию классифицирующего отображения $\varkappa : B \to G_{n,N}$ для заданного векторного расслоения $E \to B$ над конечной клеточной базой B. Нам достаточно построить гомоморфизм $s : E \to \mathbb{C}^N$ нашего расслоения в тривиальное ранга N, которое инъективно в каждой точке. Всякий такой гомоморфизм позволяет рассматривать слои расслоения E как подпространства фиксированного пространства $\mathbb{C}^N$, что и задает отображение в грассманиан. Для построения гомоморфизма s заметим, что он задается набором $s_1, \ldots, s_N$ сечений сопряженного расслоения E^*, а условие инъективности s равносильно тому, что сечения s_i порождают слой расслоения E^* в каждой точке. Необходимый набор сечений несложно построить локально над каждой клеткой, а в силу конечности числа клеток, и глобально тоже.

Таким образом, для описания характеристических классов комплексных векторных расслоений необходимо вычислить кольцо когомологий пространства $BU(n)$. Мы покажем, что это кольцо является кольцом многочленов $\mathbb{Z}[c_1, \ldots, c_n]$. Стандартные образующие $c_i \in H^{2i}(BU(n))$ этого кольца называются *классами Черна.* Имеется множество эквивалентных определений этих классов, некоторые из которых приведены ниже. В зависимости от обстоятельств и личных пристрастий разные авторы используют какое-либо из этих равенств в качестве определений, тогда остальные равенства превращаются в теоремы. Каждое из этих определений имеет две формулировки: можно задать классы c_i универсальным правилом, применимым к большому классу комплексных векторных расслоений, а можно применить эту же конструкцию к тавтологическому расслоению на грассманиане и задать эти классы как определенные классы на классифицирующем пространстве $G_{n,N}$.

Первый класс Черна линейного расслоения. $c_i(E) = 0$ при $i > \mathrm{rk}(E)$, а старший класс Черна $c_n(E)$ комплексного расслоения $E \to B$ ранга n равен классу Эйлера $e(E)$ этого расслоения. Этот класс определяется как класс, двойственный многообразию нулей сечения общего положения, или как класс, двойственный нулевому сечению в когомологиях пространства расслоения $H^{2n}(E) = H^{2n}(B)$ (если базой B служит гладкое многообразие), или как обратный образ класса Тома при вложении базы B в качестве нулевого сечения в пространство Тома расслоения E (для произвольной базы).

Все последующие определения классов Черна используют приведенное независимое определение класса $c_1(L)$ для линейного расслоения L (то есть расслоения ранга 1). В частности, равенство $c_n(E) = e(E)$ для расслоений ранга $n > 1$ выводится как следствие приведенных ниже определений.

В алгебраической геометрии линейное расслоение на гладком комплексном многообразии задается дивизором (комплексной, возможно, особой гиперповерхностью). Расслоение, ассоциированное с дивизором D, обозначается через $\mathcal{O}(D)$. По определению, голоморфными сечениями расслоения $\mathcal{O}(D)$ считаются мероморные функции, имеющие простой полюс на D. В частности, функция, тождественно равная 1 задает сечение расслоения $\mathcal{O}(D)$, обращающееся в ноль в точности на D. Следовательно, первый класс Черна расслоения $\mathcal{O}(D)$ равен классу, двойственному дивизору D. Если дивизор D гладкий, то ограничение расслоения $\mathcal{O}(D)$ на D изоморфно нормальному расслоению этого дивизора.

Задача 4.2 Докажите, что для всяких линейных расслоений K и L выполняется равенство $c_1(K \otimes L) = c_1(K) + c_1(L)$.

Задача 4.3 Выразите через первый класс Черна линейного расслоения L первый класс Черна линейных расслоений $L^{\otimes k}$, L^*, $(L^*)^{\otimes}$.

Старшие классы Черна. Вложение тора $U(1)\times\dots\times U(1)\subset U(n)$ задает гомоморфизм

$$\begin{aligned}\rho^*: H^*(BU(n))\to H^*(BU(1)\times\dots\times BU(1)) &= H^*(\mathbb{C}P^\infty\times\dots\times\mathbb{C}P^\infty)\\ &= H^*(\mathbb{C}P^\infty)\otimes\dots\otimes H^*(\mathbb{C}P^\infty)=\mathbb{Z}[t_1,\dots,t_n],\end{aligned}$$

где t_i — стандартная мультипликативная образующая когомологий i-го сомножителя $BU(1)=\mathbb{C}P^\infty$. Геометрически этот гомоморфизм можно описать следующим образом. Рассмотрим пространство $Y=\mathbb{C}P^{N-1}\times\dots\times\mathbb{C}P^{N-1}$ наборов из n прямых в $\mathbb{C}^N$. Обозначим через $Y_{\mathrm{reg}}\subset Y$ открытое подпространство, образованное наборами, линейная оболочка которых n-мерна. Дополнение $Y\setminus Y_{\mathrm{reg}}$ имеет коразмерность, неограниченно растущую с ростом N. Следовательно, когомологии пространства Y_{reg}, как и когомологии пространства Y стабилизируются с ростом N к когомологиям пространства $\mathbb{C}P^\infty\times\dots\times\mathbb{C}P^\infty$. Гомоморфизм ρ^* индуцирован естественным отображением $\rho: Y_{\mathrm{reg}}\to G_{n,N}$, сопоставляющим набору прямых их линейную оболочку.

Предложение 4.4 *Гомоморфизм ρ^* инъективен и его образ состоит из симметрических многочленов.*

Определение 4.5 Класс Черна $c_i\in H^{2i}(BU(n))$ определяется как класс, переходящий в i-ю элементарную симметричную функцию от $t_1,\dots,t_n$ при гомоморфизме ρ^*.

На языке векторных расслоений это определение формулируется следующим образом. Предположим, что данное комплексное расслоение E на пространстве B допускает полный флаг подрасслоений $D_1\subset\dots\subset D_n=E$, $\mathrm{rk} D_i=i$. В случае клеточной базы всякое такое расслоение расщепляется, и мы имеем $E\simeq I_1\oplus\dots\oplus I_n$, где $I_k=D_k/D_{k-1}$. Тогда в этом частном случае мы можем определить классы $c_i(E)$ равенством

$$1+c_1(E)+\dots+c_n(E)=(1+t_1)\dots(1+t_n),\quad t_k=c_1(I_k),$$

где класс c_1 для линейного расслоения считается определенным.

Из функториальности следует, что приведенное определение задает классы Черна и в общем случае. Действительно, заменим базу B расслоения на пространство $F(E)$ расслоения полных флагов в слоях расслоения E. Тогда поднятие расслоения E на $F(E)$ расщепляется, что определяет классы Черна поднятого расслоения. Однозначность определения классов Черна следует тогда из инъективности гомоморфизма $H^*(B)\to H^*(F(E))$:

Предложение 4.6 *Пусть $E\to B$ — комплексное векторное расслоение ранга n, $F(E)$ — ассоциированное расслоение полных флагов, D_k — тавтологическое расслоение ранга k на $F(E)$ и $t_k=-c_1(D_k/D_{k-1})$. Тогда мономы*

$$t_1^{i_1}\dots t_n^{i_n},\qquad 0\leqslant i_k\leqslant k-1,$$

образуют свободный базис $H^*(F(E))$ как $H^*(B)$-модуля. В частности, гомоморфизм обратного образа $H^*(B)\to H^*(F(E))$ инъективен.

Доказательство. Обозначим через $\pi : P(E) \to B$ проективизацию векторного расслоения. Точки пространства $P(E)$ образованы всевозможными прямыми в слоях расслоения E. На $P(E)$ имеется тавтологическое линейное расслоение τ (в алгебраической геомерии оно обозначается через $\mathcal{O}(-1)$). Положим $t = -c_1(\tau)$. Поскольку степени класса гиперплоскости образуют базис в когомологиях проективного пространства, расслоение $P(E) \to B$ удовлетворяет условию предложения 2.1, и имеет место равенство

$$H^*(P(E)) = H^*(B)\,1 \oplus H^*(B)\,t \oplus \cdots \oplus H^*(B)\,t^{n-1}. \tag{1}$$

Рассмотрим теперь диаграмму естественных проектирований

$$F(E) = F_{1,2,\ldots,n}(E) \to F_{2,\ldots,n}(E) \to \ldots \to F_n(E) = B,$$

где $F_{i_1,\ldots,i_k}(E)$ — ассоциированное расслоение, состоящее из флагов подпространств размерностей $i_1, \ldots, i_k$ в слоях исходного расслоения E. Легко видеть, что каждое из отображений этой диаграммы является проективизацией подходящего векторного расслоения. Поэтому предложение получается многократным применением разложения (1). □

Доказательство предложения 4.4. Тот факт, что образ гомоморфизма ρ^* лежит в кольце симметрических многочленов, вытекает из эквивариантности отображения $\rho : Y_{\mathrm{reg}} \to G_{n,N}$ относительно действия группы $S(n)$ в прообразе перестановками сомножителей. Поэтому нам нужно показать, во-первых, что гомоморфизм ρ_* инъективен, и во-вторых, что его образ содержит *все* симметрические функции.

Всякая точка пространства Y_{reg} определяет флаг: его одномерное подпространство равно первой прямой набора, двумерное подпространство порождено первыми двумя прямыми набора, и т.д. Это задает отображение $Y_{\mathrm{reg}} \to F(\tau)$ в расслоение полных флагов, ассоциированное с тавтологическим расслоением $\tau \to G_{n,N}$ на грассманиане. Построенное отображение имеет стягиваемые слои, и поэтому задает гомотопическую эквивалентность. Следовательно, инъективность гомоморфизма ρ^* вытекает из предложения 4.6.

Далее, мономы $t_1^{i_1} \ldots t_n^{i_n}$, $0 \leqslant i_k \leqslant k-1$, образуют свободный базис кольца $\mathbb{Z}[t_1, \ldots, t_n]$ как модуля над подкольцом симметрических многогчленов (это алгебраическое утверждение несложно доказать индукцией по n и оставляется читателю в качестве упражнения). Но по предложению 4.6, эти же классы образуют свободный базис как $H^*(BU(n))$-модуля. Следовательно, $H^*(BU(n))$ совпадает с кольцом симметрических функций. □

Задача 4.7 Докажите, что мономы $t_1^{i_1} \ldots t_n^{i_n}$, $0 \leqslant i_k \leqslant k-1$, образуют свободный базис кольца $\mathbb{Z}[t_1, \ldots, t_n]$ как модуля над подкольцом симметрических многогчленов.

Приведенное выше определение классов Черна известно также как **принцип расщепления**: *во всех вычислениях, связанных с классами Черна, можно предполагать, что расслоения, участвующие в вычислении, являются суммами линейных. Ответ, полученный в этом предположении, справедлив и в общем случае.*

Полным классом Черна расслоения E называется неоднородный класс

$$c(E) = 1 + c_1(E) + c_2(E) + \cdots + c_n(E).$$

Из принципа расщепления мгновенно вытекает **формула Уитни** для классов Черна суммы двух расслоений

$$c(E \oplus F) = c(E)\, c(F), \quad \text{т.е.} \quad c_k(E \oplus F) = \sum_{i+j=k} c_i(E)\, c_i(F).$$

Действительно, если расслоения E, F расщепляются, то и $E \oplus F$ расщепляется, и мы имеем $c(E) = \prod(1+t_i)$, $c(F) = \prod(1+s_j)$, $c(E\oplus F) = \prod(1+t_i)\prod(1+s_j)$, что доказывает формулу Уитни.

K-группа топологического пространства X определяется как группа, образованная формальными целочисленными линейными комбинациями классов изоморности комплексных векторных расслоений, профакторизованная по соотношениям вида $E\oplus F = E+F$. Элементы группы $K(X)$ называются *виртуальными расслоениями.* Из формулы Уитни вытекает, что классы Черна продолжаются на $K(X)$. Если X — конечный клеточный комплекс, то у всякого расслоения E имеется «дополнительное» U, такое, что $E \oplus U$ — тривиальное расслоение. Таким образом, под классами Черна виртуального расслоения $E-F$ понимаются либо классы, определенные формальным равенством

$$c(E-F) = 1 + c_1(E-F) + c_2(E-F) + \dots = \frac{1 + c_1(E) + c_2(E) + \dots}{1 + c_1(F) + c_2(F) + \dots},$$

либо классы Черна расслоения $E \oplus U$, где $U \oplus F$ тривиально.

Задача 4.8 Докажите что старший класс Черна (то есть класс $c_n(E)$, где $n = \mathrm{rk}(E)$) равен классу Эйлера расслоения.

Другие определения классов Черна. Пусть $E \to B$ — комплексное векторное расслоение ранга n, $P(E)$ — его проективизация, и $t = -c_1(\tau)$, где $\tau = \mathcal{O}(-1)$ — тавтологическое линейное расслоение над $P(E)$. Элемент t^n лежит в группе $H^*(P(E))$, и, следовательно, согласно разложению (1) должен разлагаться по базису $1, \dots, t^{n-1}$. Иными словами, должны существовать классы $c_i \in H^*(B)$, для которых выполняется равенство

$$t^n + c_1 t^{n-1} + \dots + c_n = 0.$$

Коэффициенты этого равенства есть в точности классы Черна расслоения E и могут рассматриваться в качестве еще одного их определения. Действительно, по формуле Уитни, в левой части равенства стоит n-й класс Черна факторрасслоения $Q = E/\tau$, поскольку

$$c(Q) = \frac{c(E)}{c(\tau)} = \frac{c(E)}{1-t} = (1 + c_1(E) + c_2(E) + \dots)\,(1 + t + t^2 + \dots).$$

Но $c_n(Q) = 0$, поскольку расслоение Q имеет ранг $n-1$. В качестве следствия мы получаем окончательное описание кольца когомологий проективизации $P(E)$. Как алгебра над когомологиями базы это кольцо порождено образующей t и приведенным выше соотношением,

$$H^*(P(E)) = \frac{H^*(B) \otimes \mathbb{Z}[t]}{t^n + c_1 t^{n-1} + \dots + c_n}.$$

Из (1) вытекает также описание гомоморфизма Гизина $H^*(P(E)) \to H^*(B)$. По соображениям размерностей, он переводит в ноль классы $1, \dots, t^{n-2}$ и $\pi_*(t^{n-1}) =$

$1 \in H^0(B)$. Последнее равенство означает, что $n-1$ гиперплоскостей общего положения в проективном пространстве $\mathbb{C}P^{n-1}$ пересекаются в одной точке. В качестве базиса $H^*(B)$-модуля $H^*(P(E))$ можно взять также классы $1, c_1(Q), \ldots, c_{n-1}(Q)$, где $Q = E/\tau$ — универсальное факторрасслоение. В этой интерпретации гомоморфизм π_* переводит $c_i(Q)$ в ноль при $i < n-1$, и $\pi_* c_{n-1}(Q) = 1$. Отсюда следует, в частности,

$$\pi_* t^k = \pi_* c_k(-\tau) = \pi_*(Q - E) = \pi_* \sum_{i+j=k} c_i(Q)\, c_j(-E) = c_{k-n+1}(-E).$$

Классы $c_i(-E)$ называются *классами Сегре* расслоения E. Поскольку они связаны с классами Черна соотношением $c(-E)\,c(E) = 1$, равенство

$$c_k(-E) = \pi_* t^{k+n-1} \tag{2}$$

может быть использовано в качестве еще одного определения классов Черна.

В случае, когда база B расслоения является гладким (вещественным) многообразием, классы Черна имеют следующую дифференциально-геометрическую интерпретацию (которая также может быть использована в качестве еще одного их определения: оно применимо, в частности, к тавтологическому расслоению на грассманиане).

Класс $c_k(E)$ двойственен по Пуанкаре циклу точек, в которых $n-k+1$ гладких сечений общего положения линейно зависимы, где n — ранг расслоения E.

Для случая $k = n$ это утверждение уже обсуждалось выше, а случай произвольного k сводится к случаю $k = n$ следующим трюком. Обозначим через $B_0 \subset B$ подпространство точек, в которых первые $n-k$ сечений линейно независимы. В случае общего положения дополнение $B \setminus B_0$ имеет вещественную коразмерность не менее $2k+2$, поэтому вложение $B_0 \to B$ индуцирует изоморфизм $2k$-мерных когомологий. Поэтому без ограничения общности мы можем считать, что первые $n-k$ выбранных сечений линейно независимы.

Если же первые $n-k$ сечений линейно независимы, то они задают тривиальное подрасслоение в E, и факторрасслоение Q имеет ранг k. По формуле Уитни расслоение Q имеет те же классы Черна, что и E, в частности, $c_k(E) = c_k(Q)$. Кроме того, линейная зависимость сечений эквивалента равенству нулю проекции последнего $(n-k+1)$-го сечения в факторрасслоение Q. Таким образом, доказываемое утверждение свелось к утверждению о старшем классе Черна расслоения Q.

Условию предложения 2.1 удовлетворяют также всевозможные флаговые расслоения, ассоциированные с E, в частности, расслоение полных флагов $F(E)$ и грассмановы расслоения $G_r(E)$. Например, рассмотрим диаграмму проектирований

$$B \leftarrow P(E) = F_1 \leftarrow F_{1,2} \leftarrow \ldots \leftarrow F_{1,\ldots,r} \to F_{2,\ldots,r} \to \ldots \to F_r = G_r(E),$$

где $F_{k_1,\ldots,k_r}$ — пространство расслоения флагов вида $D_{k_1 x} \subset \cdots \subset D_{k_r x} \subset E_x$, $x \in B$, $\dim D_{kx} = k$. Все отображения этой диаграммы являются проективизациями подходящих векторных расслоений. Отсюда по индукции устанавливается, что когомологии каждого из этих пространств образуют свободный модуль над $H^*(B)$, и мы можем установить ранги этих модулей и даже указать явную систему образующих.

Задача 4.9 Докажите, что как алгебра над $H^*(B)$ кольцо $H^*(F_{k_1,\ldots,k_r}(E))$ порождено классами Черна последовательных факторрасслоений D_{k_1}, D_{k_2}/D_{k_1}, $\ldots$, E/D_{k_r}, а все соотношения вытекают из равенства

$$c(D_{k_1})\, c(D_{k_2}/D_{k_1}) \ldots c(E/D_{k_r}) = c(E).$$

Например, кольцевая структура в расслоении полных флагов $F(E)$ задается соотношениями, получаемыми в качестве однородных компонент равенства $\prod(1-t_i)=c(E)$.

Тот факт, что модуль когомологий флаговых расслоений свободен над кольцом когомологий базы, имеет ряд важных следствий. Например, это приводит к следующему еще одному независимому определению классов Черна. Рассмотрим грассманизацию $G_k(E)$ расслоения E. На этом пространстве имеется тавтологическое расслоение D_k ранга k, старший класс Черна которого $c_k(D_k)$ определяется как класс Эйлера. Тогда имеет место соотношение:

$$c_k(E)=\rho\, c_k(D_k), \tag{3}$$

где $\rho : H^*(G_k(E)) \to H^*(B)$ — *трансфер Беккера-Готтлиба.* Истинное определение этого сохраняющего градуировку гомоморфизма топологическое, но оно имеет следующую алгебраическую переформулировку. Пусть $a \in H^*(G_k(E))$. Рассмотрим эндоморфизм группы $H^*(G_k(E))$, задаваемый умножением на a. В произвольном базисе над $H^*(B)$ этот эндоморфизм задается $(d{\times}d)$-матрицей, компоненты которой принадлежат $H^*(B)$, где $d=C_n^k$ — число образующих $H^*(B)$-модуля $H^*(G_k(E))$, то есть ранг группы когомологий грассманиана $G_{k,n}$. Тогда, по определению, $\rho(a)$ принимается равным следу этой матрицы.

Задача 4.10 Докажите равенство (3) для случая а) $k=1$; б) $k=2$; в)* произвольного k (я советую вернуться к этой задаче после изучения клеток Шуберта и формулы Джамбели).

5 Примеры и первые применения

Задача 5.1 Пусть $E \to B$ — расслоение ранга 3. Выразите через классы Черна расслоения E классы Черна расслоения $\Lambda^2 E$ (внешнего квадрата) и S^3E (симметрического квадрата).

Задача 5.2 Как связаны между собой классы Черна расслоения и его двойственного? (Ответ: $c_k(E^*)=(-1)^k c_k(E)$.)

Задача 5.3 Найдите первый класс Черна старшей внешней степени расслоения. (Ответ: $c_1(\Lambda^n E)=c_1(E)$, $n=\mathrm{rk}E$.)

Задача 5.4 Выразите классы Черна расслоения $E\otimes I$, где расслоение I линейно, через классы Черна расслоений E и I.

Отметим, в частности, полезное равенство для старшего класса Черна подкрученного расслоения

$$c_n(E\otimes I)=c_n(E-I^*)=c_n+c_{n-1}t+\cdots+t^n, \quad c_i=c_i(E), \quad t=c_1(I). \tag{4}$$

Ответ в задаче 5.3 обобщается на случай, когда E — возможно, виртуальное векторное расслоение виртуального ранга n. Если $c_i=c_i(E)$, и $c_1(I)=t$, то полный класс Черна расслоения $E\otimes I$ равен

$$\begin{aligned} c(E\otimes I) &= (1+t)^n\ \left(1+\frac{c_1}{1+t}+\frac{c_2}{(1+t)^2}+\dots\right) \\ &= (1+t)^n+c_1(1+t)^{n-1}+\cdots+c_n+\frac{c_{n+1}}{1+t}+\dots, \end{aligned}$$

где сумма в правой части может быть бесконечной. Действительно, пусть $E = U - V$, где U — настоящее расслоение ранга $n+N$, которое, согласно принципу расщепления, можно считать суммой одномерных, а V — тривиальное ранга N. Тогда $U \otimes I$ и $V \otimes I$ также расщепляются, и

$$c(E \otimes I) = \frac{c(U \otimes I)}{c(V \otimes I)} = \frac{\prod_{i=1}^{n+N}(1+t+t_i)}{(1+t)^N} = (1+t)^n \prod_{i=1}^{n+N}\left(1 + \frac{t_i}{1+t}\right),$$

что после раскрытия скобок дает желаемый ответ. $\square$

Классы Черна тензорного произведения $E \otimes F$ векторных расслоений произвольных рангов также выражаются через классы Черна расслоений E и F, однако это выражение не имеет, в общем случае, замкнутого выражения. Относительно простое выражение имеется только для старшего класса Черна. Если E и F — расслоения рангов r и k, соответственно, то старший класс Черна расслоения $\mathrm{Hom}(E,F) \simeq E^* \otimes F$ задается равенством

$$c_{rk}(\mathrm{Hom}(E,F)) = \det \|c_{k-i+j}\|_{i,j=1,\dots,r} = \det \|\bar{c}_{r-i+j}\|_{i,j=1,\dots,k}, \tag{5}$$

где $c_i = c_i(F-E)$, $\bar{c}_i = c_i(E^* - F^*) = (-1)^i c_i(E-F)$.

Второе из равенств следует из первого заменой E на F^* и F на E^*, поэтому будем доказывать только первое. В случае $r = \mathrm{rk}E = 1$, $c_1(E) = -t$ оно принимает вид

$$c_k(E^* \otimes F) = c_k(F-E) = c_k(F) + t\,c_{k-1} + \dots + t^{k-1}\,c_1(F) + t^k,$$

что эквивалентно (4). В случае $r > 1$ мы предположим, согласно принципу расщепления, что в E имеется полный флаг подрасслоений E_i, $\mathrm{rk}E_i = i$. Тогда, по предыдущему, мы имеем

$$c_{rk}(\mathrm{Hom}(E,F)) = \prod_{i=1}^{r} c_k(F - E_i/E_{i-1}).$$

Представим последнее произведение в виде определителя нижнетреугольной $(r \times r)$-матрицы с элементом $c_{k-i+j}(F - E_i + E_{j-1})$ на (i,j)-м месте. Эта матрица действительно нижнетреугольная, поскольку при $j > i$ ее элемент равен $(k+j-i)$-му классу Черна настоящего расслоения $F \oplus (E_{j-1}/E_i)$ ранга $k+j-i-1$. Далее, представив

$$\begin{aligned} c_{k-i+j}(F - E_i + E_{j-1}) &= c_{k-i+j}(F - E + E/E_i + E_{j-1}) \\ &= \sum_{p,q} c_{k-p+q}(F-E)\,c_{p-i}(E/E_i)\,c_{j-q}(E_{j-1}), \end{aligned}$$

мы получаем, что эта матрица представляется в виде произведения трех, одна из которых $\|c_{k-p+q}(F-E)\|_{p,q=1,\dots,r}$ — искомая, а две остальные $\|c_{p-i}(E/E_i)\|_{i,p=1,\dots,r}$ и $\|c_{j-q}(E_{j-1})\|_{q,j=1,\dots,r}$ — треугольные, с единицами на диагонали, откуда и вытекает требуемое равенство. $\square$

Задача 5.5 Определите классы Черна касательного расслоения проективного пространства $\mathbb{C}P^n$.

Решение. Касательный вектор к проективному пространству задается инфинитезимальным преобразованием прямой $\ell \subset \mathbb{C}^{n+1}$, соответствующей точке проективного пространства. Это преобразование задается линейным отображением $\ell \to \mathbb{C}^{n+1}$. При этом отображения, образ которых содержится в ℓ, соответствуют нулевому касательному вектору. Поэтому имеет место канонический изоморфизм

$$T\mathbb{C}P^n = \mathrm{Hom}(\tau, \mathbb{C}^{n+1}/\tau) = \mathrm{Hom}(\tau, \mathbb{C}^{n+1})/\mathbb{C},$$

где $\tau = \mathcal{O}(-1)$. По формуле Уитни мы заключаем отсюда,

$$c(T\mathbb{C}P^n) = (1+t)^{n+1} = 1 + (n+1)\,t + \frac{(n+1)\,n}{2}\,t^2 + \cdots + (n+1)\,t^n,$$

где t — класс гиперплоскости.

Если $n+1$ простое, то все классы Черна пространства $\mathbb{C}P^n$ делятся на $n+1$. Если же $n+1$ составное, то это свойство делимости уже не выполняется, однако можно показать, что *все числа Черна* (значения всевозможных мономов от классов Черна на фундаментальном классе многообразия) *проективного пространства* $\mathbb{C}P^n$ *делятся на* $n+1$ *для произвольного* n. Мне не известно прямое доказательство этого, в сущности, алгебраического утверждения о свойствах биномиальных коэффициентов. Мы вернемся к нему еще в связи с теорией комплексных кобордизмов.

Задача 5.6 Найдите классы Черна касательного расслоения гладкой гиперповерхности $H \subset \mathbb{C}P^n$ степени d в проективном пространстве.

Решение. Однородные формы степени d от $n+1$ переменных можно рассматривать как сечения расслоения $\mathcal{O}(d) = (\tau^*)^{\otimes d}$. Гиперповерхность H является множеством нулей такого сечения. Поэтому нормальное расслоение к H изоморфно ограничению на H расслоения $\mathcal{O}(d)$. Отсюда из формулы Уитни мы заключаем,

$$c(TH) = \frac{c(T\mathbb{C}P^n)}{c(\mathcal{O}(d))} = \frac{(1+t)^{n+1}}{1+d\,t}.$$

Например, если $n=2$, то $c_1(TH) = (3-d)\,t$, откуда

$$\int_H c_1(H) = \int_{\mathbb{C}P^2} d\,t\,c_1(H) = d\,(3-d).$$

С другой стороны, это характеристическое число равно эйлеровой характеристике $2-2g$ комплексной кривой H. Отсюда мы получаем классическую *формулу Римана-Гурвица*, выражающую род общей плоской кривой степени d:

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}.$$

Задача 5.7 Для многообразия Грассмана $G_{2,4}$ найдите характеристические числа (значения на фундаментальном классе) мономов c_1^4, $c_1^2 c_2$ и c_2^2, где c_i — классы Черна тавтологического расслоения.

Решение. Рассмотрим диаграмму естественных проектирований

$$G_{2,4} = F_{2,4} \xleftarrow{\;p\;} F_{1,2,4} \xrightarrow{\;q\;} F_{1,4} = \mathbb{C}P^3,$$

в которой участвуют различные многообразия флагов в $\mathbb{C}^4$. Обозначим через D_k тавтологическое расслоение ранга k над соответствующим пространством флагов и положим $t_k = -c_1(D_k/D_{k-1})$. Обе проекции, p и q, являются проективизациями подходящих расслоений: D_2 и $\mathbb{C}^4/D_1$, соответственно. Поэтому свойства гомоморфизма Гизина (см. предыдущий пущий параграф) приводят к равенствам

$$\int_{G_{2,4}} c_1^4 = \int_{F_{1,2,4}} t_1\,(p^*(c_1))^4 = \int_{F_{1,2,4}} t_1\,(-t_1 - t_2)^4 = \int_{F_{1,4}} q_*(t_1(t_1+t_2)^4).$$

Гомоморфизм q_* переводит t_2^k в $c_{k-2}(-(\mathbb{C}^4/D_1)) = c_{k-2}(D_1)$. Таким образом, $q_*(t_2^2) = 1$, $q_*(t_2^3) = -t_1$, и q_* переводит в ноль остальные степени переменной t_2. Поэтому искомое характеристическое число равно

$$\int_{F_{1,4}} 6\,t_1^3 + 4\,(-t_1)\,t_1^2 = \int_{\mathbb{C}P^3} 2t_1^3 = 2.$$

Аналогично вычисляется $\int_{G_{2,4}} c_1^2 c_2 = \int_{G_{2,4}} c_2^2 = 1$.

Многообразие $G_{2,4}$ изоморфно многообразию проективных прямых в трехмерном проективном пространстве. При этой интерпретации класс c_2 двойственен циклу, образованному прямыми, лежащими в фиксированной плоскости (см. п. 3 ниже). Аналогично, класс $-c_1$ двойственен циклу прямых, имеющих непустое пересечение с одной фиксированной. Характеристические числа предыдущей задачи имеют наглядную геометрическую интерпретацию. В частности, равенство $\int_{G_{2,4}} c_2^2 = 1$ означает, что в пересечении двух плоскостей общего положения содержится ровно одна прямая. Аналогично, равенство $\int_{G_{2,4}} c_1^2 c_2 = 1$ означает, что через две точки на плоскости проходит единственная прямая.

Равенство $\int_{G_{2,4}} c_1^4 = 2$ означает, что для фиксированной четверки прямых общего положения существует ровно две прямые, пересекающие все четыре заданные. В существовании двух таких прямых можно убедиться и из наглядных геометрических соображений. Рассмотрим гиперболоид в трехмерном пространстве, заданный общим многочленом второй степени. На нем лежит два семейства прямых, каждое из которых заметает гиперболоид целиком. Проективным преобразованием можно добиться того, чтобы три заданные прямые стали тремя прямыми одного семейства на гиперболоиде. Тогда прямые, пересекающие эти три, образуют второе семейство прямых, лежащих на гиперболоиде. Четвертая заданная прямая пересекает гиперболоид в случае общего положения в двух точках. Этим двум точкам и соотвествуют прямые, пересекающие четыре заданные.

Задача 5.8 Сколько прямых лежит на общей кубической поверхности в $\mathbb{C}P^3$? (Ответ: 27).

Решение. Многообразие прямых в $\mathbb{C}P^3$ — это грассманиан $G_{2,4}$. Предположим, что поверхность задается уравнением $f = 0$. Ограничивая кубический многочлен f на всевозможные плоскости, параметризующие грассманиан $G_{2,4}$, мы получаем сечение расслления $E = S^3\tau^*$, где τ — тавтологическое расслоение ранга 2 над $G_{2,4}$. Прямые, лежащие на кубике — это нули рассматриваемого сечения. Поэтому ответ в задаче — значение старшего класса Черна $c_4(E)$ этого расслоения на фундаментальном цикле грассманиана $G_{2,4}$.

Действуя в соответствии с принципом расщепления, мы обозначаем через t_1 и t_2 корни Черна расслоения τ. Тогда корни Черна расслоения E равны $3\,t_1$, $2\,t_1+t_2$, $t_1+2\,t_2$, $3\,t_3$, откуда $c_4(E)=9\,t_1t_2\,(2\,t_1+t_2)(t_1+2\,t_2)=9\,c_2\,(2\,c_1^2+c_2)$ и, окончательно, $\int_{G_{2,4}}c_4(E)=9\int_{G_{2,4}}c_2\,(2\,c_1^2+c_2)=27$.

Задача 5.9 Сколько прямых лежит на пересечении двух общих квадрик в $\mathbb{C}P^4$? (Ответ: 16.)

Задача 5.10 Коникой называется плоская квадратичная кривая в $\mathbb{C}P^3$. Многообразие коник имеет комплексную размерность 8: три параметра необходимы, чтобы задать плоскость и еще пять — чтобы задать квадрику в фиксированной плоскости. Сколько существует коник, пересекающих 8 заданных общих прямых? Пересекающих 7 заданных общих прямых и лежащих в плоскости, содержащей заданную точку? Пересекающих 6 заданных общих прямых и лежащих в плоскости, содержащей две заданные точки? (Ответы: 92, 34 и 8, соответственно).

Решение. Рассмотрим многообразие $G_{3,4}$ проективных двумерных подпространств в $\mathbb{C}P^3$. Это многообразие само изоморфно трехмерному проективному пространству, с расслоением гиперплоскости $\mathcal{O}(1)=\mathbb{C}^4/\tau$, где τ — тавтологическое расслоение ранга 3. Следовательно, $c(\tau)=1/(1+h)=1-h+h^2-h^3$, где $h=c_1(\mathcal{O}(1))$ — класс гиперплоскости.

Пространство коник расслоено над $G_{3,4}$ и является проективизацией расслоения $E=S^2\tau^*$. Следовательно, обозначив через $t=c_1(\mathcal{O}_{P(E)}(1))$ стандартную образующую когомологий проективизации, мы находим

$$\int_{P(E)}t^{5+i}h^{3-i}=\int_{G_{3,4}}c_i(-E)\,h^{3-i},\quad i=0,1,2,3.$$

Выражения для классов Черна расслоения E через классы Черна расслоения τ получены в задаче 5.1. Подставляя готовые выражения, мы находим, в частности, $c(-E)=1-4\,h+6\,h^2-4\,h^3$ (убедитесь!).

Наконец, класс, двойственный гиперповерхности коник, пересекающих фиксированную прямую, равен $t+2\,h$ (почему?), поэтому ответом в задаче служат характеристические числа

$$\int_{P(E)}(t+2\,h)^8=92,\qquad\int_{P(E)}h\,(t+2\,h)^7=34,\qquad\int_{P(E)}h^2\,(t+2\,h)^6=8.$$

6 Исчисление Шуберта

Рассмотрим многообразие Грассмана $G_{n,N}$ как конечномерную аппроксимацию классифицирующего пространства $BU(n)$ векторных расслоений. Как и в предыдущем пункте, все векторные пространства и расслоения мы предполагаем комплексными. В качестве аддитивного базиса когомологий $H^*(G_{n,N})$ можно взять всевозможные мономы от классов Черна тавтологического расслоения. В геометрических задачах, однако, ответы обычно проще формулировать в терминах другого базиса, состоящего из классов, двойственных замыканию клеток естественного клеточного разбиения на $G_{n,N}$. Это клеточное разбиение, называемое *шубертовским*, обобщает известное клеточное разбиение комплексного проективного пространства.

Точки грассманиана удобно представлять прямоугольными матрицами размера $n \times N$, имеющими максимально возможный ранг n: каждая такая матрица задает n-мерную плоскость, являющуюся линейной оболочкой своих строк. Матрица определена с точностью до умножения слева на невырожденную матрицу размера $n \times n$, то есть с точностью до линейного преобразования строк. Действуя линейными преобразованиями строк, всякую матрицу можно привести однозначно к одной из следующих «треугольных» форм:

$$\begin{pmatrix} * & \dots & * & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & \dots & * & 0 & * & \dots & * & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & \dots & & & & \dots & & & & \dots & & & & \dots & \\ * & \dots & * & 0 & * & \dots & * & 0 & * & \dots & * & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

А именно, имеется набор столбцов с номерами $k_1 < k_2 < \dots < k_n$, таких, что матрица, составленная из этих столбцов, является единичной матрицей; правее единиц из этих столбцов всюду стоят нули, а во всех оставшихся местах стоят произвольные комплексные числа. Действительно, k_n определяется как минимальный номер k из тех, для которых подматрица, составленная из последних $N-k$ столбцов нулевая, k_{n-1} определяется как минимальный номер k из тех, для которых подматрица, составленная из последних $N-k$ столбцов, имеет ранг $\leqslant 1$, и т.д.

Множество плоскостей, приводящихся к указанной нормальной форме с фиксированными $k_1, \dots, k_n$, образует открытую клетку (координатами в этой клетке служат комплексные числа, обозначенные звездочками). Минимальную возможную размерность 0 имеет клетка, отвечающая набору столбцов с номерами $(1, \dots, n)$, а максимальную вещественную размерность $2\,n\,(N-n)$ — клетка, отвечающая набору столбцов с номерами $(N-n+1, \dots, N)$.

Клетки построенного разбиения называются *клетками Шуберта.* В более инвариантных терминах для определения клеток Шуберта нужно зафиксировать в объемлющем пространстве $\mathbb{C}^N$ полный флаг

$$0 = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_N = \mathbb{C}^N, \qquad \dim F_i = i.$$

Тогда клетка Шуберта, отвечающая набору столбцов с номерами $k_1, \dots, k_n$, образована n-мерными плоскостями ℓ, подчиняющимися условию

$$\dim(\ell \cap F_{k_i - 1}) = i - 1, \quad \dim(\ell \cap F_{k_i}) = i, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Все клетки Шуберта имеют четную вещественную размерность. Следовательно, в цепном комплексе этого клеточного разбиения все дифференциалы нулевые и классы клеток Шуберта задают аддитивный базис гомологий грассманиана. В частности, кручение в гомологиях (комплексных) грассманианов отсутствует. Общее количество клеток равно количеству способов выбрать n различных столбцов из N возможных, откуда мы заключаем,

$$\chi(G_{n,N}) = \sum_{i=0}^{n\,(N-n)} b_{2i} = C_N^n.$$

В когомологиях кручение также отсутсвует, а поскольку все классы имеют четную вещественную размерность, умножение коммутативно. Двойственный аддитивный базис в когомологиях образован классами, двойственными замыканиям клеток Шуберта.

Замыкание клетки Шуберта называется соответствующим *циклом Шуберта*. Всякий цикл Шуберта является алгебраическим и, вообще говоря, особым, подмногообразием грассманиана. Действительно, условие на размерность пересечений с плоскостями флага записывается как обращение в ноль соответствующих миноров, которые являются полиномиальными выражениями от компонент матрицы.

Для дальнейшего удобно несколько изменить обозначение циклов Шуберта, а именно, вместо строго возрастающего набора чисел $(k_1, \ldots, k_n)$ мы будем рассматривать набор $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, компоненты которого определяются равенствами

$$\lambda_i = N + 1 - i - k_{n+1-i}.$$

Иными словами, мы сперва вычисляем разницу набора $(N-n+1, \ldots, N)$, отвечающего типичной точке грассманиана и набора $(k_1, \ldots, k_n)$, отвечающего данной клетке, а затем записываем получившиеся n чисел разницы в обратном (невозрастающем) порядке. Построенный набор удовлетворяет неравенствам $N - n \geqslant \lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n \geqslant 0$. Такой набор удобно изображать *диаграммой Юнга* — таблицей, состоящей из λ_i клеток в i-м столбце.

Цикл Шуберта, соответствующий диаграмме Юнга λ, обозначается через σ_λ. Использование диаграмм Юнга для нумерации клеток Шуберта имеет важное свойство *стабилизации*: дописывая или вычеркивая некоторое количество столбцов нулевой длины, можно одной и той же диаграмме Юнга λ сопоставлять клетки Шуберта в грассманианах $G_{n,N}$ с различными n и N. При этом многие соотношения между циклами Шуберта, записанные при помощи диаграмм Юнга, являются универсальными и не зависят от конкретных n и N. Например, *коразмерность (комплексная) цикла Шуберта равна площади диаграммы Юнга*, $\operatorname{codim} \sigma_\lambda = |\lambda| = \sum \lambda_i$.

Для заданных n и N непустые клетки Шуберта соответствуют диаграммам Юнга, являющимся поддиаграммами в диаграмме, состоящей из n столбцов высоты $N - n$.

Обозначим через $c_i = c_i(\mathbb{C}^N/\tau)$ классы Черна универсального факторрасслоения ранга $N-n$ над грассманианом $G_{n,N}$. Из предыдущего пункта мы знаем, что эти классы порождают мультипликативно кольцо когомологий грассманиана. В частности, через них выражаются классы, двойственные циклам Шуберта. Это выражение называется **формулой Джамбели**.

Теорема 6.1 *Класс клетки Шуберта σ_λ выражается через классы Черна $c_i = c_i(\mathbb{C}^N/\tau)$ по формуле*

$$[\sigma_\lambda] = \det \|c_{\lambda_i - i + j}\|_{i,i=1,\ldots,n}.$$

Многочлен от переменных c_i, задающийся определителем из правой части равенства, называется *многочленом Шура*. Он не меняется при дописывании к диаграмме Юнга λ нулевых строк и столбцов. Формула теоремы остается справедливой и в случае, когда клетка Шуберта, отвечающая данной диаграмме Юнга, является пустой (то есть когда диаграмма не является поддиаграммой диаграммы $(n-k, \ldots, n-k)$. В этом случае левая часть равенства обращается в ноль и выражения, стоящие в правой части, описывают соотношения между мультипликативными образующими когомологий грассманиана.

Задача 6.2 Имеется изоморфизм $G_{n,N} \simeq G_{N-n,N}$, сопоставляющий всякой плоскости ее аннулятор в двойственном пространстве. Докажите, что этот изоморфизм переводит клетки Шуберта в клетки Шуберта, причем диаграммы Юнга соответствующих друг другу клеток Шуберта *двойственны*, то есть строки одной образованы столбцами другой.

Классы $c_i = c_i(\mathbb{C}^n/\tau)$ при изоморфизме задачи переходят в классы $\bar{c}_i = c_i(\tau^*) = (-1)^i c_i(\tau)$. Если обозначить через $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_{N-n})$ диаграмму Юнга, двойственную диаграмме λ, то в качестве следствия мы получаем следующую альтернативную формулу для циклов Шуберта,

$$[\sigma_\lambda] = \det \|\bar{c}_{\mu_i - i + j}\|_{i,j=1,\dots,N-n}.$$

Произведение классов двух клеток Шуберта лежит в когомологиях того же грассманиана, и, следовательно, снова выражается как линейная комбинация классов клеток Шуберта. Теоретически, коэффициенты этой комбинации могут быть восстановлены при помощи формулы Джамбели: нужно перемножить соответсвующие определители, а затем выразить получившийся результат как линейную комбинацию многочленов Шура. Комбинаторное выражение для соотвенствующих коэффициентов, называемое **правилом Литлвуда-Ричардсона**, довольно сложно и малоэффективно. Отметим только один частный случай этого правила, носящий имя **формулы Пьери**. Предположим, что диаграмма Юнга одной из клеток Шуберта σ_k, участвующих в произведении, состоит из одного столбца высоты k, так что $[\sigma_k] = c_k$.

Теорема 6.3 *Для клетки Шуберта σ_λ с произвольной диаграммой Юнга $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ произведение $[\sigma_\lambda] \cdot [\sigma_k]$ равно сумме классов клеток Шуберта σ_μ (взятых с коэффициентом $+1$ каждая), диаграммы Юнга которых имеют площадь $|\mu| = |\lambda| + k$ и длины μ_i столбцов которых удовлетворяют неравенствам*

$$\mu_1 \geqslant \lambda_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \lambda_2 \geqslant \mu_3 \dots.$$

Доказательство этой формулы мы не приводим. Читатели сами могут вывести ее из формулы Джамбели. По двойственности мы получаем аналогичное правило для умножения на класс клетки Шуберта, диаграмма Юнга которой состоит только из одной строки.

Пример 6.4

$$c_1^4 = \sigma_1^4 = \sigma_1^2(\sigma_{1,1} + \sigma_2) = \sigma_1\,(\sigma_{1,1,1} + 2\sigma_{2,1} + \sigma_3) = \sigma_{1,1,1,1} + 3\sigma_{2,1,1} + 2\sigma_{2,2} + 3\sigma_{3,1} + \sigma_4.$$

В частности, на грассманиане $G_{2,4}$ имеется только одна клетка комплексной размерности 4, $\sigma_{2,2}$, поэтому $\int_{G_{2,4}} c_1^4 = \int_{G_{2,4}} 2\,\sigma_{2,2} = 2$.

Задача 6.5 Вычислите индекс трехкратного самопересечения клетки Шуберта $\sigma_{2,1}$ на грассманиане $G_{3,6}$.

7 Доказательство формулы Джамбели и других детерминантных формул

Для доказательства формулы Джамбели мы решим следующую более общую задачу. Пусть над некоторой гладкой базой B задано векторное расслоение E, $\mathrm{rk}E = N$, флаг его подрасслоений $F_1 \subset \dots \subset F_n = E$ заданных рангов $\mathrm{rk}F_i = d_i$, $d_1 \leqslant \dots \leqslant d_n$, и еще одно подрасслоение $\tau \subset E$, $\mathrm{rk}\tau = n$, находящееся в общем положении по отношению к флагу расслоений F_i. Мы хотим определить класс когомологий, двойственный циклу Σ базы, в точках которого слой расслоения τ имеет по крайней мере i-мерное пересечение со слоем расслоения F_i для всех $i = 1, \ldots, n$. В случае формулы Джамбели в качестве базы выступает многообразие Грассмана, а расслоения E, F_i тривиальны. Вычисления, которые мы проделаем ниже, в этом конкретном частном случае ничуть не упрощаются. (Отметим некоторое отличие в обозначениях от ситуации предыдущего пункта: индекс i в обозначении i-го расслоения F_i не обязан быть равным рангу d_i этого расслоения.)

Рассмотрим вспомогательное расслоение полных флагов $F(\tau)$, ассоциированное с расслоением τ, и определим подпространство $X_n \subset F_(\tau)$, образованное флагами $D_{1x} \subset \ldots D_{nx} \subset \tau_x$, $\dim D_{ix} = i$, плоскости которого удовлетворяют включению $D_{ix} \subset F_{ix}$, $i = 1, \ldots, n$.

В случае общего положения (которое имеет место, в частности, в ситуации с формулой Джамбели) многообразие X_n — гладкое. Обозначим через $\eta : X_n \to B$ естественную проекцию. Образ этого отображения совпадает с циклом Σ. Более того, если ранги d_i удовлетворяют строгим неравенствам $d_1 < \cdots < d_n$, то это отображение взаимно однозначно над общей точкой цикла Σ и класс цикла Σ выражается при помощи гомоморфизма Гизина по формуле

$$[\Sigma] = \eta_*(1).$$

В общем случае слои могут иметь положительную размерность, и для вычисления класса, двойственного циклу Σ, гомоморфизм Гизина нужно применять к подходящему моному, обращающемуся в 1 на слоях проекции η. В любом случае, гомоморфизм η_* задается следующей явной формулой.

Теорема 7.1 *Обозначим через $t_i = -c_1(D_i/D_{i-1})$ первый класс Черна линейного факторрасслоения над многообразием X_n. Значение гомоморфизма η_* на произвольном мономе от классов t_i задается следующей явной формулой*

$$\eta_*(t_1^{s_1} \ldots t_n^{s_n}) = \det \|c_{u_i+s_i+j}(U_i)\|_{i,j=1,\ldots,n},$$

где U_i — виртуальное расслоение $U_i = E - F_i - \tau$ и где через $u_i = N - d_i - n$ обозначен его виртуальный ранг.

Доказательство. Рассмотрим также расслоение неполных флагов $F_{1,\ldots,k}(\tau)$ над B и определим подмногообразие $X_k \subset F_{1,\ldots,k}(\tau)$ условием $D_{ix} \subset F_{ix}$, накладываемым на плоскости D_{ix} флага только при $i \leqslant k$. Переход от многообразия X_{k-1} к X_k заключается в том, что нужно выбрать подпространство $D_{kx} \subset \tau_x$, содержащееся в F_{kx}. Поскольку это подпространство содержит плоскость $D_{(k-1)x}$, его выбор сводится к выбору прямой $D_kx/D_{(k-1)x}$ внутри факторпространства $\tau_x/D_{(k-1)x}$. В результате отображение η раскладывается в композицию следующих отображений.

$$\begin{tikzcd}
P(\tau) \arrow[d, "p_1"'] & P(\tau/D_1) \arrow[d, "p_2"'] & & \cdots & P(\tau/D_{n-1}) \arrow[d, "p_n"'] & \\
B & X_1 \arrow[ul, hook', "i_1"'] & X_2 \arrow[ul, hook', "i_2"'] & \cdots & X_{n-1} & X_n \arrow[ul, hook', "i_n"']
\end{tikzcd}$$

Вертикальная стрелка p_k диаграммы является проективизацией расслоения τ/D_{k-1} ранга $n-k+1$ над X_k. В частости, слои проекции p_k имеют размерность $n-k$. Образ при вложении i_k задается обнулением естественно заданного сечения некоторого расслоения над пространством этой проективизации, а именно, расслоения $\mathrm{Hom}(D_k/D_{k-1}, E/F_k)$, ранг которого равен $N - d_k = u_k + n$. Это дает полное описание гомоморфизмов Гизина вложения i, проекции p и их композиции: гомоморфизм i_* задается умножением на класс

$$i_*(1) = c_{u_k+n}(\mathrm{Hom}(D_k/D_{k-1}, E/F_k)) = \sum_{i+j=u_k+n} c_i(E/F_k)t_k^j,$$

а гомоморфизм p_* переводит t_k^s в $c_{s-n+k}(-\tau/D_{k-1})$. Следовательно,

$$p_*i_*(t_k^s) = p_*(t_k^s \sum_{i+j=u_k+n} c_i(E/F_k)t_k^j) = \sum_{i+j=N-d_k+s-n+k} c_i(E/F_k)c_j(-\tau/D_{k-1})$$
$$= c_{u_k+s+k}(E/F_k - \tau/D_{k-1}) = \sum_{i+j=u_k+s+k} c_i(D_{k-1})c_j(U_k),$$

где $U_k = E - F_k - \tau$. В последней формуле классы Черна $c_i(D_{k-1})$ выражаются как многочлены от классов $t_1, \ldots, t_{k-1}$. Следовательно, многократное применение этой формулы приводит к однозначному алгоритму для вычисления гомоморфизма η_*.

Покажем, как организовать вычисления при помощи этого алгоритма для получения замкнутых формул. Для этого заметим, что класс, получаемый на k-м шаге в результате применения алгоритма и лежащий в когомологиях пространства X_k, всегда имеет вид

$$\sum_{i_1,\ldots,i_n} \omega_{i_1,\ldots,i_n} t_1^{i_1} \ldots t_k^{i_k} c_{i_{k+1}}(U_{k+1}) \ldots c_{i_n}(U_n)$$

для некоторых целочисленных коэффициентов $\omega_{i_1,\ldots,i_n}$. Для нахождения этих коэффициентов удобно из них организовать производящий многочлен

$$\sum \omega_{i_1,\ldots,i_n} \tau_1^{i_1} \ldots \tau_n^{i_n},$$

где $\tau_1, \ldots, \tau_n$ — вспомогательные формальные переменные. Из приведенной формулы для $(p_k i_k)_*$ следует, что в терминах производящего многочлена действие гомоморфизма $(p_k i_k)_*$ сводится к замене монома τ_k^s на

$$\tau_k^{u_k+s+1}(\tau_k - \tau_1) \ldots (\tau_k - \tau_{k-1}).$$

Иными словами, *в терминах производящих многочленов действие гомоморфизма $(p_k i_k)_*$ задается умножением на $\tau_k^{u_k+1}(\tau_k - \tau_1) \ldots (\tau_k - \tau_{k-1})$*. Применяя эти соображения n раз, мы заключаем, что класс $\eta_*(t_1^{s_1} \ldots t_n^{s_n})$ задается производящим многочленом

$$\tau_1^{u_1+s_1+1} \ldots \tau_n^{u_n+s_n+1} \prod_{i<j}(\tau_j - \tau_i) = \tau_1^{u_1+s_1+1} \ldots \tau_n^{u_n+s_n+1} \det \|\tau_i^{j-1}\| = \det \|\tau_i^{u_i+s_i+j}\|$$

в силу формулы для определителя Ван-дер-Монда. Класс когомологий, задаваемый этим производящим многочленом, в точности равен классу из формулы теоремы. □

Одним из частных случаев теоремы 7.1 служит, как уже упоминалось, формула Джамбели. Другим важным ее применением является вычисление гомоморфизма Гизина проекции на базу ассоциированного грассманова расслоения $p : G_r(E) \to B$. Действительно, рассмотрим диаграмму естественных проектирований

$$F_{1,2,\ldots,r}(E) \xrightarrow{\pi} G_r(E) \xrightarrow{p} B.$$

Поскольку $1 = \pi_*(t_1^{r-1}t_2^{r-2}\dots t_{r-1})$, мы получаем

$$p_*(a) = \eta_*(t_1^{r-1}t_2^{r-2}\dots t_{r-1}\pi^*(a)),$$

где $\eta = p\pi$. Поскольку все входящие в a классы Черна выражаются через t_i после поднятия в расслоение флагов, формула теоремы 7.1 применима.

Эта формула применима, в частности, для вычисления характеристических чисел на грассманиане. Например, для многообразия флагов $F_{1,2}(\mathbb{C}^4)$ мы имеем

$$\int_{F_{1,2}(\mathbb{C}^4)} t_1^3t_2^2 = \left|\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right| = 1, \qquad \int_{F_{1,2}(\mathbb{C}^4)} t_1^2t_2^3 = \left|\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right| = -1,$$

и интеграл нулевой для остальных мономов. Поэтому мы очередной раз убеждаемся

$$\int_{G_{2,4}} c_1^4 = \int_{F_{1,2}(\mathbb{C}^4)} t_1\,(t_1+t_2)^4 = 6-4 = 2.$$

Задача 7.2 Пусть имеется два векторных расслоения E и F над некоторой гладкой базой и гомоморфизм (послойно линейное отображение) $f : E \to F$ общего положения между ними. Докажите, что класс когомологий, двойственный циклу Σ_k точек, в которых ядро гомоморфизма f по меньшей мере k-мерно, задается следующей **формулой Портеуса**:

$$[\Sigma_k] = \det \|c_{\ell+k-i+j}(F-E)\|_{i,j=1,\dots,k}, \qquad \ell = \mathrm{rk}F - \mathrm{rk}E.$$

(Указание: рассмотрите график этого гомоморфизма.)