УДК 517.52

О безусловной сходимости в пространстве L_1

Б. С. Кашин (Москва)

Пусть X — вещественное пространство Банаха. Тогда ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k \quad (x_k \in X,\ k = 1, 2, \ldots) \tag{1}$$

называется безусловно сходящимся в X, если этот ряд после любой перестановки элементов сходится по норме пространства X. Совершенно аналогично дается определение безусловной сходимости по мере функционального ряда

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x), \tag{2}$$

где $f_i(x)$ — некоторые измеримые функции на множестве E.

Хорошо известна теорема Орлича (см. [2], стр. 42) о том, что ряд (1) безусловно сходится в X тогда и только тогда, когда всякий ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k x_k$$

сходится по норме пространства X при любых выборах последовательностей $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ с $\varepsilon_k = \pm 1$.

В связи с исследованиями по общим функциональным рядам Е. М. Никишиным на семинаре по теории функций в Московском университете была поставлена задача:

Пусть $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ — последовательность измеримых функций на отрезке $[0, 1]$ и ряд (2) сходится безусловно по мере Лебега на $[0, 1]$. Существует ли для любого $\varepsilon > 0$ такое множество $E_\varepsilon \subset [0, 1]$, что $mE_\varepsilon > 1 - \varepsilon$ и ряд (2) сходится безусловно в пространстве $L_2(E_\varepsilon)$?

Эта задача возникла у Е. М. Никишина как в некотором смысле предельный случай одной его общей теоремы (см. [1], теорема 7).

В предлагаемой работе частично решается эта задача, а именно доказывается

Теорема 1. *Пусть ряд* (2) *безусловно сходится в пространстве* $L_1[0, 1]$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое множество* $E_\varepsilon \subset [0, 1]$, $mE_\varepsilon > 1 - \varepsilon$, *что ряд* (2) *сходится безусловно в пространстве* $L_q(E_\varepsilon)$ *при всяком* $q < 2$.

Отметим, что из результатов Никишина вытекает, что из безусловной сходности по мере ряда (2) следует его безусловная сходимость в пространстве (уже не банаховом) L_p при любом $p<1$.

Теорема 1 является следствием доказанной ниже теоремы 2, которая имеет и самостоятельный интерес.

Через $\gamma=\{\gamma_i\}_{i=1}^n$ будем обозначать произвольный вектор n-мерного пространства $\mathbf{R}^n$.

Пусть дана система функций $\{e_i\}_{i=1}^n$ с $e_i\in L_1[0,1]$. Для любого $p\in[1,\infty]$ положим

$$B_p\equiv B_p(\{e_i\}_{i=1}^n)=\sup_{\|\gamma\|_{l_p}=1}\left\|\sum_{i=1}^n\gamma_ie_i\right\|_{L_1}. \tag{3}$$

Хорошо известно, что $B_\infty=\sup\limits_{\gamma_i=\pm1}\left\|\sum\limits_{i=1}^n\gamma_ie_i\right\|_{L^1}$. Так как норма $\gamma=\{\gamma_i\}_{i=1}^n$, где $\gamma_i=\pm1$, в пространстве l_p равна $n^{1/p}$, то

$$B_\infty=\sup_{\gamma_i=\pm1}\left\|\sum_{i=1}^n\gamma_ie_i\right\|_{L_1}\leqslant\sup_{\|\gamma\|_{l_p}=n^{1/p}}\left\|\sum_{i=1}^n\gamma_ie_i\right\|_{L_1}\leqslant B_pn^{1/p},$$

откуда

$$B_p\geqslant\frac{B_\infty}{n^{1/p}}. \tag{4}$$

Справедливо в некотором смысле обратное к (4) неравенство.

Теорема 2. *Пусть* $\{e_i\}_{i=1}^n$ — *система из* n *функций* $e_i\in L_1[0,1]$. *Тогда для любых* $p>2$ *и* $\varepsilon>0$ *существуют такие постоянные* $c_{\varepsilon,p}$ *и подсистема элементов* $\{e_{i_\nu}\}_{\nu=1}^s$, *что* $s>n(1-\varepsilon)$ и

$$B_p(\{e_{i_\nu}\})\leqslant\frac{B_\infty(\{e_i\}_{i=1}^n)}{n^{1/p}}\cdot c_{\varepsilon,p}. \tag{5}$$

Предварительно докажем несколько лемм.

Лемма 1. *Для любого* $p>2$ *существует таков число* d, *что для любых натурального* $n\geqslant d$ *и системы функций* $\{e_i(x)\}_{i=1}^n$ *из* $L_1[0,1]$, *удовлетворяющих условию* $\|e_i\|_{L_1}\geqslant1$ $(1\leqslant i\leqslant n)$, *справедливо неравенство*

$$\sup_{\gamma_i=\pm1}\left\|\sum_{i=1}^n\gamma_ie_i\right\|_{L_1}>2n^{1/p}.$$

Доказательство леммы. Пусть $\{r_i(t)\}_{i=1}^\infty$ — система Радемахера (см. [2], стр. 55). Тогда

$$\sup_{\gamma_i=\pm1}\left\|\sum_{i=1}^n\gamma_ie_i\right\|_{L_1}=\sup_{t\in[0,1]}\left\|\sum_{i=1}^n r_i(t)e_i(x)\right\|_{L_1}\geqslant$$
$$\geqslant\int_0^1\int_0^1\left|\sum_{i=1}^n r_i(t)e_i(x)\right|dxdt=\int_0^1\int_0^1\left|\sum_{i=1}^n r_i(t)e_i(x)\right|dtdx.$$

Применяя неравенство Хинчина (см. [2], стр. 153—154), получим

$$\int_0^1\int_0^1\left|\sum_{i=1}^n r_i(t)\,e_i(x)\right|dt\,dx \geqslant \frac{1}{8}\int_0^1\sqrt{\sum_{i=1}^n e_i^2(x)}\,dx \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{8}\int_0^1 \frac{\sum_{i=1}^n |e_i(x)|}{\sqrt{n}}\,dx \geqslant \frac{1}{8}\frac{n}{\sqrt{n}} > 2n^{1/p},$$

если $n \geqslant d$, где $d=d(p)$ — достаточно большое число. Лемма 1 доказана.

Утверждение леммы 1 хорошо известно; мы будем пользоваться им именно в такой, не самой сильной, форме.

Далее нам понадобятся некоторые обозначения и определения. Введем в $\mathbf{R}^n$ систему векторов

$$U_\infty = \{u\} = \{\text{все векторы, кроме нулевого, координаты которых равны } 0,\ \pm 1\}.$$

Для каждого $p \geqslant 1$ пронормируем в l_p систему векторов U_∞; полученную систему векторов обозначим через U_p. Пусть $u=\{u_i\}_{i=1}^n \in U_p$. Носителем вектора u назовем множество таких чисел i, что $u_i \neq 0$. Обозначим носитель вектора $u \in U_p$ через $N(u)$, а через $|N(u)|$ — число элементов в $N(u)$. Ясно, что если $|N(u)|=k$, то

$$u_i = 0, \text{ если } i \notin N(u), \quad |u_i| = \frac{1}{k^{1/p}}, \text{ если } i \in N(u). \tag{6}$$

Лемма 2. *Пусть дана система функций* $\{e_i\}_{i=1}^n$ с $e_i \in L_1[0, 1]$. *Тогда для любых чисел* $p > 2$ и $\varepsilon > 0$ *существуют такие число* $c_{\varepsilon,p}$ *и множество* $\{e_{i_k}\}_{k=1}^s \subset \{e_i\}_{i=1}^n$, *что* $s > n(1-\varepsilon)$ *и для любого вектора* $\{\gamma_i\}_{i=1}^n = \gamma \in U_p$

$$\left\|\sum_{k=1}^s \gamma_{i_k} e_{i_k}\right\|_{L_1[0,1]} \leqslant \frac{c_{\varepsilon,p} B_\infty(\{e_i\}_{i=1}^n)}{n^{1/p}}.$$

Доказательство леммы 2. В доказательстве мы используем следующее свойство системы U_p.

Пусть $\gamma \in U_p$. Пусть, далее $\gamma_1, \ldots, \gamma_t$ — векторы из U_p,

$$s_i = |N(\gamma_i)|, \quad i = 1, \ldots, t,$$

и $N(\gamma_i) \cap N(\gamma_j) = \varnothing$, если $1 \leqslant i,\ j \leqslant t,\ i \neq j$. Тогда легко проверить, что для любой системы чисел $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^t$, $\varepsilon_i = \pm 1$ при $1 \leqslant i \leqslant t$, векторы

$$\frac{\sum_{i=1}^t \varepsilon_i \gamma_i s_i^{1/p}}{(s_1+s_2+\ldots+s_t)^{1/p}} \in U_p \tag{6'}$$

и их носители содержат $s_1+s_2+\ldots+s_t$ элементов.

Пусть $\gamma=\{\gamma_i\}_{i=1}^n \in U_p$ и $N(\gamma)$ содержит $k\geqslant\frac{\varepsilon n}{4d}$ элементов (d — число из леммы 1). Имеем

$$\left\|\sum_{i=1}^n \gamma_i e_i\right\|_{L_1}\leqslant B_\infty \|\gamma\|_{l_\infty}. \tag{7}$$

Но ввиду (6) либо $\gamma_i=0$, либо $|\gamma_i|=k^{-1/p}$, поэтому

$$\|\gamma\|_{l_\infty}=\frac{1}{k^{1/p}}<\frac{(4d)^{1/p}}{(\varepsilon n)^{1/p}}. \tag{8}$$

Соединяя (7) и (8), получим, что

$$\left\|\sum_{i=1}^n \gamma_i e_i\right\|_{L_1}\leqslant\frac{B_\infty(4d)^{1/p}}{(\varepsilon n)^{1/p}}\leqslant\frac{B_\infty}{n^{1/p}}\cdot\left(\frac{4d}{\varepsilon}\right)^{1/p}. \tag{9}$$

Положим $c_{\varepsilon,p}=(4d/\varepsilon)^{1/p}$ и докажем справедливость леммы с таким $c_{\varepsilon,p}$. Неравенство (9) можно сформулировать так:

Пусть $\{\gamma_i\}_{i=1}^n=\gamma\in U_p$ и $\left\|\sum_{i=1}^n \gamma_i e_i\right\|_{L_1}>M\equiv\frac{B_\infty}{n^{1/p}}\cdot\left(\frac{4d}{\varepsilon}\right)^{1/p}$. Тогда

$$|N(\bar\gamma)|<\frac{n\varepsilon}{4d}. \tag{10}$$

Нам нужно доказать, что существует такое множество чисел $A=\{i_j\}_{j=1}^m$, что $m\leqslant n\varepsilon$ и для любого $\gamma_0=\{\gamma_i\}_{i=1}^n\subset U_p$, удовлетворяющего условию $N(\gamma_0)\cap A=\varnothing$, имеем

$$\left\|\sum_{i=1}^n \gamma_i e_i\right\|_{L_1}\leqslant M. \tag{11}$$

Построим систему векторов $B=\{\gamma_i\}_i^k$ с $\gamma_i\in U_p$ и систему функций $\{z_i\}_{i=1}^k$ с $z_i\in L_1$ следующим образом:

Пусть существует такой вектор $\beta=\{\beta_i\}_{i=1}^n\in U_p$, что $\left\|\sum_{i=1}^n \beta_i e_i\right\|_{L_1}>M$. (Если такого вектора не существует, то лемма справедлива при $A=\varnothing$). Ввиду (10) ясно, что $N(\beta)$ содержит менее $n\varepsilon/4d$ элементов. Положим $\gamma_1=\beta$, $z_1=\sum_{i=1}^n \beta_i e_i$.

Пусть построены векторы $\gamma_1,\ldots,\gamma_\nu$ и элементы $z_1,\ldots,z_\nu$. Тогда, если существует такой вектор $\beta'=\{\beta_i'\}_{i=1}^n\in U_p$, что $\left\|\sum_{i=1}^n \beta_i' e_i\right\|>M$ и $N(\beta')\cap\left(\bigcup_{i=1}^{\nu} N(\gamma_i)\right)=\varnothing$, то положим

$$\gamma_{\nu+1}=\beta',\quad z_{\nu+1}=\sum_{i=1}^n \beta_i' e_i. \tag{12}$$

(Если такого вектора β' не существует, то построение заканчивается.)

По построению системы $B=\{\gamma_i\}_{i=1}^k$ при $\gamma_0=\{\gamma_i\}_{i=1}^n\in U_p$ и $N(\gamma_0)\cap\cap\left(\bigcup_{i=1}^k N(\gamma_i)\right)=\varnothing$

$$\left\|\sum_{j=1}^n \gamma_j e_j\right\|\leqslant M,$$

т. е. если $A=\bigcup_{i=1}^k N(\gamma_i)$ (8), то неравенство (11) верно. Остается доказать, что число элементов в A не больше $n\varepsilon$, т. е.

$$\sum_{i=1}^k |N(\gamma_i)|<n\varepsilon. \tag{13}$$

Для любого i, $1\leqslant i\leqslant k$, ввиду (10) и построения системы $\{\gamma_i\}$ справедливо неравенство $1\leqslant|N(\gamma_i)|<\frac{n\varepsilon}{4d}$. Пусть $2^r\leqslant\frac{n\varepsilon}{4d}<2^{r+1}$; разобъем отрезок $\left[1,\ \frac{n\varepsilon}{4d}\right]$ на отрезки $[2^{i-1},\ 2^i-1]$, $1\leqslant i\leqslant r$, и $\left[2^r,\ \frac{n\varepsilon}{4d}\right]$.

Обозначим через $\alpha_i(B)$ такую группу векторов $\{\gamma_j\}\subset B$, что $2^{i-1}\leqslant\leqslant|N(\gamma_j)|\leqslant 2^i-1$ $(1\leqslant i\leqslant r)$, а через $\alpha_{r+1}(B)$—такую группу векторов $\{\gamma_j\}\subset\subset B$, что $2^r\leqslant|N(\gamma_j)|<\frac{n\varepsilon}{4d}$.

Будем последовательно изменять систему $B=\{\gamma_i\}_{i=1}^k$, получая системы B^1, $B^2,\ldots$, и т. д. Каждая из систем B^l (их построение описано ниже) состоит из векторов, принадлежащих U_p и обладающих следующими свойствами:

$$\begin{aligned}&1)\ \sum_{\gamma\in B}|N(\gamma)|=\sum_{\gamma\in B^l}|N(\gamma)|;\\ &2)\ \text{если } \gamma_1\in B^l,\ \gamma_2\in B^l,\ \gamma_1\neq\gamma_2,\ \text{то } N(\gamma_1)\cap N(\gamma_2)=\varnothing;\\ &3)\ \text{если } \gamma=\{\gamma_i\}_{i=1}^n\in B^l,\ \text{то } \left\|\sum_{i=1}^n\gamma_i e_i\right\|>M.\end{aligned} \tag{14}$$

Тогда для доказательства неравенства (13) достаточно (в силу пункта 1) из (14)) доказать его для системы B^l с некоторым l.

Будем рассматривать последовательно группы α_i, $i=1, 2, \ldots, r, r+1$.

Пусть группа $\alpha_1(B)$ содержит менее d элементов (d — из леммы 1). Тогда систему B не изменяем и переходим к группе $\alpha_2(B)$.

Пусть группа $\alpha_1(B)$ содержит не менее d элементов: $\gamma_{i_1},\ldots,\gamma_{i_t}$, $t\geqslant d$. Положим $s_\mu=|N(\gamma_{i_\mu})|$ $(1\leqslant\mu\leqslant t)$. Тогда векторы

$$\frac{\varepsilon_1\gamma_{i_1}s_1^{1/p}+\ldots+\varepsilon_t\gamma_{i_t}s_t^{1/p}}{(s_1+\ldots+s_t)^{1/p}}$$

согласно (6′) принадлежат U_p при любом выборе системы $\{\varepsilon_r\}_{r=1}^t$, $\varepsilon_r=\pm 1$, $1\leqslant r\leqslant t$; поэтому элементы

$$\frac{\varepsilon_1 z_{i_1}s_1^{1/p}+\ldots+\varepsilon_t z_{i_t}s_t^{1/p}}{(s_1+\ldots+s_t)^{1/p}} \tag{15}$$

пространства $L_1[0, 1]$ имеют вид $\sum_{i=1}^{n} \gamma_i e_i$, $\{\gamma_i\} = \gamma \in U_p$, при любом выборе системы $\{\varepsilon_r\}_{r=1}^{t}$.

По построению имеем $\|z_{i_j}\| > M$ при $j = 1, \ldots, t$ (см. (12)). Поэтому в силу леммы 1 существует такой набор $\{\varepsilon_r\}_{r=1}^{t}$, что

$$\left\| \frac{\sum_{r=1}^{t} \varepsilon_r z_{i_r} s_r^{1/p}}{\left(\sum_{r=1}^{t} s_r\right)^{1/p}} \right\| > \frac{2Mt^{1/p} (\min\limits_{1\leqslant r\leqslant t} s_r^{1/p})}{\left(\sum_{r=1}^{t} s_r\right)^{1/p}} > M.$$

(Мы использовали, то, что все векторы γ_{i_r} принадлежат группе $\alpha_1(B)$, следовательно, $\frac{s_i}{s_j} \leqslant 2$, $1 \leqslant i, j \leqslant t$.)

Заменим в системе B все векторы группы $\alpha_1(B)$ вектором

$$\frac{\sum_{r=1}^{t} \varepsilon_r \gamma_{i_r} s_r^{1/p}}{\left(\sum_{r=1}^{t} s_r\right)^{1/p}} = \nu, \quad N(\nu) = \bigcup_{r=1}^{t} N(\gamma_{i_r}), \quad \nu \in U_p. \tag{16}$$

Полученную систему обозначим через B^1. В силу (16) условия (14) выполняются. Нам важно, что $\alpha_1(B^1)$ содержит меньше d элементов.

Переходим к группе $\alpha_2(B^1)$. Аналогично тому, как мы поступали с группой $\alpha_1(B)$, если группа $\alpha_2(B^1)$ содержит менее d элементов, то мы ничего не меняем в системе B^1, если же $\alpha_2(B^1)$ содержит не менее d элементов, то заменяем в системе B^1 все векторы группы α_2 на некоторую их линейную комбинацию так, чтобы (14) выполнялось, и переходим к группе $\alpha_3(B^2)$.

На $(r+1)$-м шаге мы получим такую систему B^{r+1}, что в каждой ее группе α_i содержится меньше d элементов, т. е.

$$\sum_{\gamma \in B^{r+1}} |N(\gamma)| = \sum_{i=1}^{r+1} \sum_{\gamma \in \alpha_i} |N(\gamma)| < d \sum_{i=1}^{r+1} 2^i \leqslant d \cdot 2^{r+2} < 4d \cdot \frac{n\varepsilon}{4d} = n\varepsilon,$$

что доказывает (13), а следовательно, и лемму.

Лемма 3. *Обозначим через S_p^n выпуклое замыкание системы векторов U_p в $\mathbf{R}^n$ ($p \geqslant 1$). Пусть $\mathbf{z}_0$ принадлежит границе S_p^n, тогда для любого $q > p$ существует такая константа $c_{pq} > 0$, не зависящая от n, что*

$$\|\mathbf{z}_0\|_{l_q} \geqslant \frac{c_{pq}}{n^{1/p-1/q}}\,^*.$$

---

* Если $\mathbf{z}_0$ принадлежит границе S_p^n, то рассуждая, как при доказательстве леммы 3, получим, что $|\mathbf{z}_0|_{l_p} > \frac{1}{(\ln n)^\alpha} \cdot c_p$ (при $n > 2$), где α зависит только от p. Например, если $p = 2$, то $\alpha = 1/2$.

Доказательство леммы 3. Нам достаточно доказать, что для любого $q>p$ существует такое $c'_{pq}>0$, что для любого вектора $\mathbf{z}_0\in\mathbf{R}^n$ найдется разложение $\mathbf{z}_0=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\gamma_i$, где

$$1)\ \lambda_i>0 \text{ для любого } i;$$

$$2)\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\leqslant c'_{pq}\cdot n^{1/p-1/q}\cdot\|\mathbf{z}_0\|_{l_q}; \tag{17}$$

$$3)\ \gamma_i\in U_p \text{ для любого } 1\leqslant i\leqslant n.$$

Действительно, пусть (17) выполнено, а $\mathbf{z}_0$ принадлежит границе S_p^n и $\|\mathbf{z}_0\|_{l_q}<\frac{1}{c'_{pq}}\cdot\frac{1}{n^{1/p-1/q}}$ (т. е. в качестве c_{pq} взяли $\frac{1}{c'_{pq}}$); тогда $\mathbf{z}_0=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\gamma_i$, где в силу (17)

$$\text{а) } \lambda_i>0,\quad \text{б) } \sum_{i=1}^{n}\lambda_i<1,\quad \text{в) } \gamma_i\in U_p.$$

Но это противоречит тому, что $\mathbf{z}_0$ принадлежит границе S_p^n.

Докажем (17). Пусть $\mathbf{z}=\{z_i\}_{i=1}^{n}$. Так как множество U_p одинаково в любом квадранте $\mathbf{R}^n$, то можно считать, что $z_i>0$, $1\leqslant i\leqslant n$, и $z_1\geqslant z_2\geqslant\ldots\geqslant z_n$.

Тогда $\mathbf{z}=z_n\alpha_n+(z_{n-1}-z_n)\alpha_{n-1}+\ldots+(z_1-z_2)\alpha_1$, где

$$\alpha_n=(\underbrace{1,\ldots,1}_{n}),\quad \alpha_{n-1}=\{\underbrace{1,\ldots,1}_{n-1},0\},\ldots,\quad \alpha_1=(1,\underbrace{0,\ldots,0}_{n-1}).$$

Ясно, что векторы $\gamma_i=\frac{\alpha_i}{i^{1/p}}$ принадлежат U_p, $1\leqslant i\leqslant n$. Таким образом,

$$\mathbf{z}=z_n\cdot n^{1/p}\gamma_n+(z_{n-1}-z_n)(n-1)^{1/p}\gamma_{n-1}+\ldots+(z_1-z_2)\cdot 1^{1/p}\gamma_1.$$

Докажем, что для этого разложения условия (17) выполнены. Пункты 1) и 3), очевидно, выполняются. Докажем, что выполняется и пункт 2), т. е. что

$$\Omega=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=z_nn^{1/p}+(z_{n-1}-z_n)(n-1)^{1/p}+\ldots+(z_1-z_2)\,1^{1/p}\leqslant$$
$$\leqslant c'_{p,q}n^{1/p-1/q}\cdot\|\mathbf{z}\|_{l_q}.$$

Преобразуя, получим

$$\Omega=\sum_{i=1}^{n}z_i\left(i^{1/p}-(i-1)^{1/p}\right),$$

т. е.

$$\Omega\leqslant c_p\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{z_i}{i^{1-\frac{1}{p}}}. \tag{18}$$

Пусть $q'=\frac{1}{1-\frac{1}{q}}$ и $p'=\frac{1}{1-\frac{1}{p}}$; применим к сумме (18) неравенство

Гёльдера с показателями q и q':

$$\Omega \leqslant c_p \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} z_i^q \right)^{1/q} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^{(1/p')q'}} \right)^{1/q'}.$$

Так как из неравенства $p<q$ следует, что $p'>q'$, то

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^{q'/p'}} \leqslant c''_{p,q} \cdot n^{1-\frac{q'}{p'}} \quad \text{и} \quad \Omega \leqslant c_p \cdot c'_{p,q} \cdot \|\mathbf{z}\|_{l_q} \cdot n^{\left(1-\frac{q'}{p'}\right)\frac{1}{q'}},$$

но

$$n^{\left(1-\frac{q'}{p'}\right)\frac{1}{q'}} = n^{\frac{1}{q'}-\frac{1}{p'}} = n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

Таким образом, свойство (17), а стало быть, и лемма 3 доказаны.

Доказательство теоремы 2. Пусть $p>2$ и дана система функций $\{e_i\}_{i=1}^n$ с $e_i \in L_1[0, 1]$. Возьмем такое p', что $2<p'<p$; по лемме 2 для любого $\varepsilon>0$ из системы $\{e_i\}_{i=1}^n$ можно выбрать такую подсистему $\{e_{j_k}\}_{k=1}^s$, что $s>n(1-\varepsilon)$ и для любого вектора $\gamma = \{\gamma_j\}_{j=1}^n \in U_{p'}$ справедливо неравенство

$$\left\| \sum_{k=1}^{s} \gamma_{j_k} e_{j_k} \right\|_{L_1} \leqslant c_{\varepsilon,p'} \cdot \frac{B_\infty(\{e_i\}_{i=1}^n)}{n^{1/p'}}. \tag{19}$$

Тогда, если $\mathbf{x} = \{x_j\}_{j=1}^n \in S_{p'}^n$, то $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \gamma_i$, где

$$1)\ \gamma_i \in U_{p'} \quad \text{и} \quad 2) \sum_{i=1}^{m} |\alpha_i| \leqslant 1$$

(это следует из свойств выпуклых замыканий), и поэтому

$$\left\| \sum_{k=1}^{s} x_{j_k} \cdot e_{j_k} \right\|_{L_1} \leqslant \sup_{\gamma \in U_{p'}} \left\| \sum_{k=1}^{s} \gamma_{j_k} e_{j_k} \right\|_{L_1} \leqslant c_{\varepsilon,p'} \cdot \frac{B_\infty(\{e_i\}_{i=1}^n)}{n^{1/p'}}.$$

Последнее неравенство выполняется в силу (19). Но по лемме 3 $S_{p'}^n$ содержит шар пространства $l_p(\mathbf{R}^n)$ радиуса $\frac{c_{p,p'}}{n^{1/p'-1/p}}$, поэтому для любого $\mathbf{y} = \{y_j\}_{j=1}^n$, $\|\mathbf{y}\|_{l_p} = 1$, имеем

$$\left\| \sum_{k=1}^{s} y_{j_k} e_{j_k} \right\|_{L_1} \leqslant \frac{c_{\varepsilon,p'} B_\infty(\{e_i\}_{i=1}^n)}{c_{p',p} n^{1/p'}} \cdot n^{1/p'-1/p}$$

и

$$B_p(\{e_{j_k}\}) = \sup_{\|y\|_{l_p}=1} \left\| \sum_{k=1}^{s} y_{j_k} e_{j_k} \right\| \leqslant c'_{\varepsilon,p} \frac{B_\infty(\{e_j\}_{j=1}^n)}{n^{1/p}},$$

что и доказывает (5). Теорема 2 доказана.

Замечание. Теорема 2 допускает обобщение. Будем говорить, что банахово пространство E удовлетворяет α_p-условию $(p>1)$, если для любого $q>p$ найдется такое число d, что для любых натурального $n>d$ и системы элементов $\{e_i\}_{i=1}^n$ с $e_i \in E$ и $\|e_i\|_E \geqslant 1$ $(i=1, \ldots, n)$ мы имеем

$$\sup_{\gamma_i=\pm 1} \left\| \sum_{i=1}^n \gamma_i e_i \right\|_E \geqslant n^{1/q}.$$

Пусть дана система элементов $\{e_i\}_{i=1}^n$ с $e_i \in E$. Аналогично предыдущему положим

$$B_q(\{e_i\}_{i=1}^n) = \sup_{\|\{\gamma_i\}_{i=1}^n\|_{l_q}=1} \left\| \sum_{i=1}^n \gamma_i e_i \right\|_E.$$

Сформулируем теперь обобщение теоремы 2:

Теорема 2'. *Пусть банахово пространство E при некотором $p>1$ удовлетворяет α_p-условию и $\{e_i\}_{i=1}^n$—система элементов пространства E. Тогда для любых $q>p$ и $\varepsilon>0$ существуют такие постоянная $c_{\varepsilon,p}$ и подсистема элементов $\{e_{i_\nu}\}_{\nu=1}^s$, что $s>n(1-\varepsilon)$ и*

$$B_q(\{e_{i_\nu}\}) \leqslant \frac{B_\infty(\{e_i\}_{i=1}^n)}{n^{1/q}} c_{\varepsilon,q}.$$

Доказательство теоремы 2' совершенно аналогично доказательству теоремы 2. Утверждение леммы 1 настоящей работы состоит в том, что пространство $L_1[0, 1]$ удовлетволяет α_2-условию. Далее же в доказательстве теоремы 2 специфические свойства $L_1[0, 1]$ нигде не используются.

Заметим еще, что так же, как в лемме 1, проверяется, что любое пространство $L_p[0, 1]$ $(1 \leqslant p < \infty)$ удовлетворяет α_2-условию.

Докажем теперь теорему 1. Теорема 1 легко вытекает из следующего утверждения, которое является ее ослабленной формулировкой.

Дан ряд

$$\sum_{i=1}^\infty f_i(x). \tag{20}$$

Пусть ряд (20) безусловно сходится в $L_1[0, 1]$. Тогда для любых $p<2$ и $\varepsilon>0$ существует такое множество $E_{\varepsilon,p} \subset [0, 1]$ с мерой $mE_{\varepsilon,p} \geqslant 1-\varepsilon$, что ряд (20) безусловно сходится в $L_p(E_{\varepsilon,p})$.

Используя один простой результат, доказанный Никишиным (см. [1], стр. 146, лемма 3), это утверждение можно получить из следующей леммы.

Лемма 4. *Пусть дана система функций $\{g_i\}_{i=1}^m$ с $g_i \in L_1[0, 1]$. Положим $A_\infty = \sup_{\varepsilon_i=\pm 1} \left\| \sum_{i=1}^m \varepsilon_i g_i \right\|_{L_1}$. Тогда для любых $p<2$ и $\varepsilon>0$ существуют множество $E_{\varepsilon,p} \subset [0, 1]$ с $mE_{\varepsilon,p} > 1-\varepsilon$ и число $c_{\varepsilon,p}$, такие, что*

$$\sup_{\varepsilon_i=\pm 1} \left\| \sum_{i=1}^m \varepsilon_i g_i \right\|_{L_p(E_{\varepsilon,p})} \leqslant A_\infty c_{\varepsilon,p}.$$

В самом деле, допустим, что лемма 4 справедлива. Так как ряд (20) безусловно сходится в $L_1[0, 1]$, то в силу теоремы Орлича, сформулированной в начале статьи,

$$\sup_{\varepsilon_i=\pm 1}\left\|\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon_i f_i\right\|_{L_1}=k<\infty.$$

Пусть фиксированы числа $\varepsilon>0$ и $p<2$. Применяя лемму 4 последовательно к системам функций $\{f_i\}_{i=1}^{m}$, $m=1, 2, \ldots$, мы построим последовательность таких множеств $E^m_{\varepsilon,p}$, что $m(E^m_{\varepsilon,p})>1-\varepsilon$ и

$$\sup_{\varepsilon_i=\pm 1}\left\|\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i f_i\right\|_{L_p(E^m_{\varepsilon,p})}\leqslant c_{\varepsilon,p}\cdot k.$$

Пусть $\chi^m(x)\equiv\chi(E^m_{\varepsilon,p})$ — характеристическая функция множества $E^m_{\varepsilon,p}$. Из последовательности функций $\chi^m(x)$ можно выделить подпоследовательность $\chi^{m_k}(x)$, слабо сходящуюся в пространстве $L_2[0, 1]$ к некоторой неотрицательной функции $\chi(x)$. Лемма Никишина гарантирует, что найдется такое $\varepsilon_0>0$, что

$$m(x: x\in[0, 1];\ \chi(x)\geqslant\varepsilon_0\}\geqslant 1-\varepsilon.$$

Обозначим через $E_{\varepsilon,p}$ множество тех $x\in[0, 1]$, где $\chi(x)>\varepsilon_0$. Легко видеть, что

$$\sup_{\varepsilon_i=\pm 1}\left\|\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon_i f_i\right\|_{L_p(E_{\varepsilon,p})}\leqslant\frac{c_{\varepsilon,p}\cdot k}{\varepsilon_0},$$

а это эквивалентно безусловной сходимости ряда (20) в пространстве $L_p(E_{\varepsilon,p})$.

Докажем теперь лемму 4, используя теорему 2.

Доказательство леммы достаточно провести для случая, когда g_i — кусочно-постоянные функции с интервалом постоянства $1/s$.

Пусть $g_i\left(\frac{k}{s}\right)=a_{i,k}$, $1\leqslant i\leqslant m$, $1\leqslant k\leqslant s$. Тогда

$$A_\infty=\sup_{\varepsilon_i=\pm 1}\left\|\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i g_i\right\|_{L_1}=\frac{1}{s}\sup_{\varepsilon_i=\pm 1}\sum_{k=1}^{s}\left|\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i a_{ik}\right|=$$

$$=\frac{1}{s}\sup_{\substack{\varepsilon_i=\pm 1\\ \alpha_k=\pm 1}}\sum_{k=1}^{s}\sum_{i=1}^{m}\alpha_k\varepsilon_i a_{ik}.$$

Аналогично

$$\sup_{\varepsilon_i=\pm 1}\left\|\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i g_i\right\|_{L_p}=\frac{1}{s^{1/p}}\sup_{\substack{\varepsilon_i=\pm 1\\ \|\{\alpha_k\}\|_{l_{p'}}=1}}\sum_{k=1}^{s}\sum_{i=1}^{m}\alpha_k\varepsilon_i a_{ik}\quad(1/p+1/p'=1).$$

Теперь, то, что нам надо доказать, можно переформулировать так:

Дана билинейная форма $\sum\limits_{k=1}^{s}\sum\limits_{i=1}^{m}\varepsilon_i\alpha_k a_{ik}$ с матрицей $A=\{a_{ik}\}_{i=1}^{m}{}_{k=1}^{s}$. Нужно доказать, что для любого $\varepsilon>0$ существует такое $c_{\varepsilon,p}$, что в матрице A можно оставить s' столбцов с номерами $k_1,\ldots,k_{s'}$, причем $s'>s(1-\varepsilon)$ и

$$\frac{1}{s^{1/p}}\sup_{\substack{\varepsilon_i=\pm1\\ \|\{\alpha_k\}\|_{l_{p'}}=1}}\sum_{j=1}^{s'}\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i\alpha_{k_j}a_{i,k_j}\leqslant\frac{c_{\varepsilon,p}}{s}\sup_{\substack{\varepsilon_i=\pm1\\ \alpha_k=\pm1}}\sum_{k=1}^{s}\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i\alpha_k a_{ik},$$

т. е.

$$\sup_{\substack{\varepsilon_i=\pm1\\ \|\{\alpha_k\}\|_{l_{p'}}=1}}\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i\alpha_{k_j}a_{i,k_j}\leqslant\frac{c_{\varepsilon,p}}{s^{1/p'}}\sup_{\substack{\alpha_k=\pm1\\ \varepsilon_i=\pm1}}\sum_{k=1}^{s}\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i\alpha_k a_{ik}. \tag{21}$$

Заметим, что так как $p<2$, то $p'>2$.

Применим теперь теорему 2 в следующем случае: система $\{e_r\}_{r=1}^{s}$ состоит из кусочно-постоянных функций e_r с длиной интервалов постоянства $1/m$; функции e_r зададим столбцами:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|}
\hline
e_1 & \ldots & e_r & \ldots & e_s \\
\hline
a_{11} & \cdot & a_{1r} & \cdot & a_{1s} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_{m1} & \cdot & a_{mr} & \cdot & a_{ms} \\
\hline
\end{array},$$

где a_{ij} — элементы матрицы A. Тогда

$$B_\infty(\{e_r\}_{r=1}^{s})=\sup_{\alpha_k=\pm1}\left\|\sum_{k=1}^{s}\alpha_k e_k\right\|_{L_1}=$$

$$=\frac{1}{m}\sup_{\alpha_k=\pm1}\sum_{i=1}^{m}\left|\sum_{k=1}^{s}a_{i,k}\alpha_k\right|=\frac{1}{m}\sup_{\substack{\alpha_k=\pm1\\ \varepsilon_i=\pm1}}\sum_{k=1}^{s}\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i\alpha_k a_{i,k}.$$

Аналогично $B_{p'}=\frac{1}{m}\sup\limits_{\substack{\varepsilon_i=\pm1\\ \|\{\alpha_k\}\|_{l_{p'}}=1}}\sum\limits_{k=1}^{s}\sum\limits_{i=1}^{m}\varepsilon_i\alpha_k a_{i,k}$. По теореме 2 можно оставить $s'>s(1-\varepsilon)$ столбцов матрицы A, для которых

$$\sup_{\substack{\varepsilon_i=\pm1\\ \|\{\alpha_k\}\|_{l_{p'}}=1}}\sum_{j=1}^{s'}\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i\alpha_{k_j}a_{i,k_j}\leqslant\frac{c_{\varepsilon,p'}}{s^{1/p'}}\sup_{\substack{\varepsilon_i=\pm1\\ \alpha_k=\pm1}}\sum_{k=1}^{s}\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i\alpha_k a_{ik},$$

что совпадает с (21). Лемма доказана.

(Поступила в редакцию 14/VI 1973 г.)

Литература

1. **Е. М. Никишин,** Резонансные теоремы и надлинейные операторы, Успехи матем. наук, **XXV**, вып. **6 (156)** (1970), 122—191.
2. **С. Качмаж, Г. Штейнгауз,** Теория ортогональных рядов, Москва, Физматгиз, 1958.