Математические заметки

том 70 выпуск 4 октябрь 2001

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

О НИЖНИХ ОЦЕНКАХ ДЛЯ n-ЧЛЕННЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Б. С. Кашин

Пусть X – действительное нормированное пространство, $\Phi \subset X$ – подмножество в X (словарь), $f \in X$.

Определение. *n-членным приближением* элемента f относительно словаря Φ называется следующая величина:

$$e_n(f,\Phi,X) \equiv \inf_{P\in\Sigma_n} \|f-P\|_X, \tag{1}$$

где при $n=1,2,\dots$

$$\Sigma_n \equiv \biggl\{\sum_{j=1}^{n} a_jx_j,\ a_j\in\mathbb{R},\ x_j\in\Phi\biggr\}.$$

Далее, если K – подмножество в X, то

$$e_n(K,\Phi,X) \equiv \sup_{f\in K} e_n(f,\Phi,X). \tag{2}$$

Оценки величин (2) для различных K, Φ и X имеют как теоретическое, так и практическое значение (см. подробнее [1], [2]).

В данной заметке мы ограничимся рассмотрением ситуации, когда $X = L^2(\Omega)$, а Φ – полная ортонормированная система (о.н.с.) в X. В этом случае величина (1) была введена С. Б. Стечкиным [3], и, как легко видеть, равна

$$e_n(f,\Phi,L^2(\Omega)) = \biggl\{\sum_{k\geqslant n+1} [c_k^*(f)]^2\biggr\}^{1/2}, \tag{3}$$

где $\{c_k^*(f)\}$ – невозрастающая перестановка последовательности абсолютных величин коэффициентов Фурье функции f по системе Φ.

В работе автора [4] был предложен геометрический подход к доказательству оценок снизу для величин (2) в случае, когда Φ – ортонормированная система. Точнее, в [4] показано, что вложение в K множества вершин $2n$-мерного куба, т.е. множества Q вида

$$Q = \biggl\{\sum_{i=1}^{2n} \varepsilon_i\psi_i,\ \varepsilon_i=\pm1,\ L^2(\Omega)\supset\{\psi_i\}_{i=1}^{2n} \text{ – о.н.с.}\biggr\}, \tag{4}$$

влечет неравенство

$$e_n(K,\Phi,L^2(\Omega)) \geqslant cn^{1/2}, \qquad c>0. \tag{5}$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-00062.

Для приложений этого результата достаточно решить задачу о вписывании возможно большего куба в данный функциональный класс K (т.е. найти при данном n достаточно большое число λ и множество Q вида (4) такие, что $\lambda \cdot Q \subset K$). Эта задача без затруднений решается для классических функциональных классов K, что в итоге дает возможность в ряде случаев найти точные по порядку оценки снизу n-членных приближений. Обобщения и аналоги оценки (5) были установлены в работах [5], [6].

В 1993 г. С.В. Конягиным была поставлена задача об оценках величин (2) в случае, когда $X = L^2(I^d)$, Φ – о.н.с. в X, а K – совокупность характеристических функций выпуклых подмножеств единичного куба $I^d \subset \mathbb{R}^d$. Уже при $d = 1$ задача оставалась нерешенной. При $d = 1$ эта задача фактически сводится к нахождению оценок величины (2) для "однопараметрического семейства"

$$K = \mathbb{X} \equiv \{\chi_t\}_{t\in[0,1]}, \qquad \chi_t(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leqslant x < t, \\ 1, & \text{если } t \leqslant x \leqslant 1. \end{cases} \tag{6}$$

Конягин привлек внимание автора к получению оценок снизу n-членных приближений семейства (6), отметив наличие экспоненциальных оценок сверху для этих величин. Точнее, если $\Phi = H$ – система Хаара, то

$$e_n(\mathbb{X}, H, L^2(0,1)) \leqslant C\, 2^{-n/2}. \tag{7}$$

Чтобы проверить (7) достаточно использовать стандартную оценку для погрешности L^2-приближения функций χ_t $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ частными суммами ряда Фурье–Хаара (см., например, [7, с. 75]) и учесть, что в каждой пачке ряда Фурье–Хаара функции χ_t только один коэффициент отличен от нуля.

Ввиду "чрезвычайно малой массивности" семейства $\mathbb{X}$ для него неприменим описанный выше геометрический подход к оценкам снизу n-членных приближений. Оказывается, что вместо этого может быть использована техника теории общих ортогональных рядов.

Теорема 1. *Существует абсолютная положительная постоянная C такая, что при $n = 1, 2, \dots$ для произвольной ортонормированной системы $\Phi \subset L^2(0,1)$ справедливо неравенство*

$$e_n(\mathbb{X}, \Phi, L^2(0,1)) \geqslant C^{-n}.$$

Замечание 1. Вопрос о точном значении постоянной C в теореме 1 остается открытым, однако из доказательства видно, что эта постоянная "не слишком велика".

Следующий результат показывает, что для равномерно ограниченных о.н.с. Φ оценка снизу для $e_n(\mathbb{X}, \Phi, L^2(0,1))$ может быть кардинально улучшена.

Теорема 2. *Если Φ – равномерно ограниченная полная о.н.с.: $\Phi = \{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty} \subset L^2(0,1)$,*

$$\|\varphi_j\|_{L^\infty(0,1)} \leqslant M, \qquad j = 1, 2, \dots,$$

то при $n = 1, 2, \dots$

$$e_n(\mathbb{X}, \Phi, L^2(0,1)) \geqslant \frac{C_M}{\sqrt{n}} > 0. \tag{8}$$

Замечание 2. Точность оценки (8) проверяется на примере тригонометрической системы: если $\Phi = T$ – тригонометрическая система, то $e_n(\mathbb{X}, T, L^2) \leqslant Cn^{-1/2}$.

В доказательстве теорем 1, 2 существенную роль играют результаты работы автора [8]. Доказательство теоремы 1 использует, в частности, следующее неравенство (фактически частный случай теоремы 1 из [8]).

Лемма. *Пусть $N = 1, 2, \dots$ и $\{\varphi_j\}_{j\in\Lambda}$ – произвольная нормированная система функций в $L^2(0,1)$. Пусть, кроме того, при $k = 1, 2, \dots, N$ имеет место представление*

$$\chi_{k/N} = \sum_{j\in\Lambda} a_{k,j}\varphi_j + \Delta_k, \qquad \|\Delta_k\|_{L^1} \leqslant \frac{1}{N}.$$

Тогда

$$\sum_{j\in\Lambda} \left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} a_{k,j}^2\right)^{1/2} \geqslant B \ln N,$$

где $B > 0$ – *абсолютная постоянная.*

Доказательство теоремы 2 использует рассуждения, близкие к доказательству оценки (9) статьи [8]. Отметим в заключение, что первые оценки снизу коэффициентов разложения функций семейства $\mathbb{X}$ (см. (6)) в ряды по общим равномерно ограниченным о.н.с. были установлены С. В. Бочкаревым [9].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. DeVore R. A. // Acta Numer. 1998. V. 7. P. 51–150. **2**. Temlyakov V. N. Nonlinear Methods of Approximation. IMI Preprint 2001:09. University of South Carolina, 2001. **3**. Стечкин С. Б. // Докл. АН СССР. 1955. Т. 102. №1. С. 37–40. **4**. Кашин Б. С. // Тр. МИАН. 1985. Т. 172. С. 187–191. **5**. Кашин Б. С., Темляков В. Н. // Матем. заметки. 1994. Т. 56. №5. С. 57–86. **6**. Donoho D. L. // Ann. Statist. 1997. V. 25. №5. P. 1870–1911. **7**. Кашин Б. С., Саакян А. А. Ортогональные ряды (издание второе). М.: АФЦ, 1999. **8**. Кашин Б. С. // Сиб. матем. ж. 1977. Т. 18. №1. С. 122–131. **9**. Бочкарев С. В. // Матем. заметки. 1974. Т. 15. №3. С. 363–370.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

Поступило
31.05.2001