ЗАМЕЧАНИЕ ОБ АППРОКСИМАЦИОННЫХ СВОЙСТВАХ ФРЕЙМОВ ОБЩЕГО ВИДА

Б. С. Кашин, Т. Ю. Куликова

В последние годы в теории приближения активно изучаются аппроксимационные свойства переполненных систем. В частности, в связи с развитием теории всплесков и приложениями исследуются приближения по фрейм-системам.

Определение 1 [1]. *Фреймом* (или *фрейм-системой*) называется набор ненулевых векторов $\Phi=\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ в сепарабельном гильбертовом пространстве H такой, что

$$A\|v\|^2 \leqslant \sum_{j=1}^{\infty}(v,\varphi_j)^2 \leqslant B\|v\|^2 \qquad \forall v\in H, \tag{1}$$

где $0<A\leqslant B<\infty$, а $\|\cdot\|$ и $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ – соответственно норма и скалярное произведение в H.

Постоянные A и B называются соответственно *нижней* и *верхней границами* фрейма Φ, а их отношение

$$\kappa=\kappa(\Phi)=\frac{B}{A}$$

называется *коэффициентом обусловленности*. Наконец, фрейм называется *жестким*, если $\kappa(\Phi)=1$, т.е. $A=B$. Отметим здесь работу Козлова [2], в которой (в других терминах) исследовались жесткие фреймы.

Очевидно, что фреймом является любая полная ортонормированная система (о.н.с.) в H, а также произвольный базис Рисса (см. определение, например, в [3, с. 17]). Фрейм-системы, вообще говоря, не минимальны, однако для них сохраняются некоторые свойства ортогональных разложений. В частности, мы используем неравенство (см. [1])

$$\biggl\|\sum_{j=1}^{\infty}c_j\varphi_j\biggr\| \leqslant B^{1/2}\biggl(\sum_{j=1}^{\infty}c_j\biggr)^{1/2}, \tag{2}$$

где $\{c_j\}$ – произвольная последовательность из ℓ^2.

Для каждого фрейма $\Phi=\{\varphi_j\}$ определен (см., например, [4]) двойственный фрейм $\widetilde{\Phi}=\{\widetilde{\varphi}_j\}$, и каждый элемент $f\in H$ представим сходящимся по норме рядом

$$f=\sum_{j=1}^{\infty}(f,\widetilde{\varphi}_j)\varphi_j. \tag{3}$$

Если $\kappa(\Phi)=1$, т.е. фрейм Φ жесткий, то

$$\widetilde{\varphi}_j=\frac{1}{A}\varphi_j, \qquad j=1,2,\dots\,.$$

В общем случае для фрейма Φ с границами A и B двойственный фрейм $\widetilde{\Phi}$ имеет границы B^{-1}, A^{-1} ($B^{-1}\leqslant A^{-1}$).

Ряд (3) называется *каноническим разложением* элемента $f\in H$ по фрейм-системе Φ. При использовании фреймов как аппарата в задачах аппроксимации встает вопрос об оценках величин

$$\sigma_m(f,\Phi)=\inf_{\Lambda,\,\sharp\Lambda\leqslant m}\biggl\|f-\sum_{j\in\Lambda}(f,\widetilde{\varphi}_j)\varphi_j\biggr\| \tag{4}$$

Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-00315.

(здесь $\Lambda \subset \mathbb{N}$ – подмножество натурального ряда, $\sharp$ – число элементов в множестве),

$$\sigma_m(K,\Phi) = \sup_{f\in K} \sigma_m(f,\Phi), \qquad m = 1,2,\dots \tag{5}$$

(здесь K – заданное подмножество в H; обычно K – некоторый класс гладких функций в функциональном гильбертовом пространстве).

В случае, когда Φ – полная о.н.с. в H, величина (4) совпадает с наилучшим m-членным приближением элемента f по системе Φ, т.е. с величиной

$$e_m(f,\Phi) = \inf_{\{c_j\}_{j\in\Lambda},\Lambda\subset\mathbb{N},\sharp\Lambda\leqslant m} \biggl\| f - \sum_{j\in\Lambda} c_j\varphi_j \biggr\|. \tag{6}$$

Однако для общих фреймов оценки величин (6) могут оказаться малосодержательными. Нетрудно привести пример фрейма $\Phi_0 = \{\varphi_j^0\}$, для которого множество $\{\lambda\varphi_j^0\}_{\lambda\in\mathbb{R},j\in\mathbb{N}}$ плотно в H, т.е. $e_1(f,\Phi_0) = 0$ для любого элемента $f \in H$.

Цель этой заметки – показать, что геометрический подход, предложенный в [5] для получения наилучших m-членных приближений, применим и к исследованию величин (5) для фреймов общего вида.

Введем некоторые обозначения: для $x = \{x_k\}_{k=1}^N \subset \mathbb{R}^N$ положим

$$\|x\|_2 = \|x\|_{l_2^N} = \biggl(\sum_{k=1}^N x_k^2\biggr)^{1/2}, \qquad \|x\|_\infty = \|x\|_{l_\infty^N} = \max_{1\leqslant i\leqslant N} |x_i|,$$

$$B_\infty^N = \{x \in \mathbb{R}^N : \|x\|_\infty \leqslant 1\}$$

– N-мерный куб, а W_∞^N – множество вершин этого куба. Мы будем рассматривать также N-мерные кубы, вложенные в гильбертово пространство H, т.е. множества вида

$$B_N = \biggl\{f\colon f = \sum_{k=1}^N a_k\psi_k,\ |a_k| \leqslant 1,\ k = \overline{1,N}\biggr\}, \qquad \{\psi_k\}_{k=1}^N \ \text{– о.н.с.}, \tag{7}$$

а также множество вершин куба (7):

$$W_N = \biggl\{f\colon f = \sum_{k=1}^N \varepsilon_k\psi_k,\ \varepsilon_k = \pm 1\biggr\}, \qquad \{\psi_k\}_{k=1}^N \ \text{– о.н.с.}. \tag{8}$$

Наконец, обозначим через E_m, $m = 1,2,\dots$, совокупность всех подмножеств натурального ряда с числом элементов $\leqslant m$.

Теорема 1. *Пусть $\Phi = \{\varphi_j\}_{j=1}^\infty \subset H$ – фрейм с коэффициентом обусловленности $\kappa = \kappa(\Phi)$, и пусть $\delta > 0$. Если W_N – множество вершин некоторого N-мерного куба (см. (8)), то при $m \leqslant c(\delta)N$ имеет место неравенство*

$$\sigma_m(W_N,\Phi) \geqslant (1 - \kappa^{1/2}\delta)\cdot N^{1/2},$$

где $c(\delta) \in (0,1)$ – положительная постоянная, зависящая только от δ.

Следующий результат получен в [5].

Утверждение 1. *Пусть в $\mathbb{R}^N$, $N = 1,2,\dots$, задана последовательность векторов $\{e_i\}_{i=1}^\infty$, причем*

$$\sum_{i=1}^\infty \|e_i\|_2^2 \leqslant 1, \qquad \max_{1\leqslant i<\infty} \|e_i\|_2 = \rho.$$

Пусть также задано число $\delta > 0$. Если $m\rho^2 \leqslant c(\delta)$, то найдется вершина $w \in W_\infty^N$, для которой

$$\sup_{\Lambda\in E_m} \biggl(\sum_{i\in\Lambda} (w,e_i)^2\biggr)^{1/2} \leqslant \delta$$

(здесь $c(\delta)$, $0 < c(\delta) < 1$, – постоянная, зависящая только от δ).

Замечание. В [5] рассматривается случай $\delta = 1/2$, для других δ утверждение проверяется аналогично. Кроме того, в [5] предполагалось, что $\sum \|e_i\|_2^2 = 1$; разница между этим условием и условием, приведенным в нашей формулировке утверждения 1, несущественна.

Доказательство теоремы 1. Пусть $\widetilde{\Phi} = \{\widetilde{\varphi}_j\}_{j=1}^{\infty}$ – фрейм, двойственный к Φ, L – линейная оболочка функций ψ_k, $k = \overline{1, N}$ (см. (8)), и

$$\tilde{e}_j = \pi_L(\widetilde{\varphi}_j), \qquad j = 1, 2, \dots, \tag{9}$$

где $\pi_L \colon H \to L$ – оператор ортогонального проектирования на L. С учетом того факта, что $\{\psi_k\}_{k=1}^{N}$ – ортонормированный базис в L, имеем

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|\tilde{e}_j\|^2 = \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{\infty} (\widetilde{\varphi}_j, \psi_k)^2. \tag{10}$$

Поскольку $\widetilde{\Phi}$ – фрейм с границами B^{-1}, A^{-1}, где A, B – границы фрейма Φ, то при $k = 1, 2, \dots, N$ имеем оценку

$$B^{-1} = B^{-1}\|\psi_k\|^2 \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} (\widetilde{\varphi}_j, \psi_k)^2 \leqslant A^{-1}\|\psi_k\|^2 = A^{-1}. \tag{11}$$

Из (10) и (11) следует, что

$$B^{-1}N \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \|\tilde{e}_j\|^2 \leqslant A^{-1}N,$$

т.е.

$$\frac{1}{\kappa(\Phi)} \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \|N^{-1/2}A^{1/2}\tilde{e}_j\|^2 \leqslant 1. \tag{12}$$

Кроме того,

$$\|\tilde{e}\| \leqslant \|\widetilde{\varphi}_j\| \leqslant A^{-1/2}, \qquad j = 1, 2, \dots$$

(последнее неравенство вытекает из определения фрейма), а значит,

$$\max_j \|N^{-1/2}A^{1/2}\tilde{e}_j\| \equiv \rho \leqslant N^{-1/2}. \tag{13}$$

Далее, для произвольных $m \in \mathbb{N}$ и элемента $z \in L$, используя (2), имеем

$$\sigma_m(z, \Phi) = \inf_{\Lambda \in E_m} \left\| z - \sum_{j \in \Lambda} (z, \widetilde{\varphi}_j)\varphi_j \right\| = \inf_{\Lambda \in E_m} \left\| z - \sum_{j \in \Lambda} (z, \tilde{e}_j)\varphi_j \right\|$$
$$\geqslant \inf_{\Lambda \in E_m} \left(\|z\| - \left\| \sum_{j \in \Lambda} (z, \tilde{e}_j)\varphi_j \right\| \right) \geqslant \|z\| - B^{1/2} \sup_{\Lambda \in E_m} \left(\sum_{j \in \Lambda} (z, \tilde{e}_j)^2 \right)^{1/2}.$$

Следовательно, для любой точки $w \in W_N$ выполняется

$$\sigma_m(w, \Phi) \geqslant N^{1/2} \left(1 - \left(\frac{B}{A} \right)^{1/2} \sup_{\Lambda \in E_m} \left(\sum_{j \in \Lambda} \left(w, \left(\frac{A}{N} \right)^{1/2} \tilde{e}_j \right)^2 \right)^{1/2} \right).$$

Применяя утверждение и учитывая (13), мы устанавливаем существование точки $w_0 \in W_N$, для которой при $m \leqslant c(\delta)N$ выполнена оценка

$$\sigma_m(w_0, \Phi) \geqslant N^{1/2} \left(1 - \left(\frac{B}{A} \right)^{1/2} \delta \right) = (1 - \delta\kappa^{1/2})N^{1/2}.$$

Теорема 1 доказана.

Если Φ – не просто фрейм, а базис Рисса, то для $f \in H$ имеет место неравенство

$$\sigma_m(f, \Phi) \leqslant \kappa^{1/2} e_m(f, \Phi).$$

Поэтому из теоремы 1 вытекает

Следствие 1. *Пусть* $\Phi = \{\varphi_j\}$ – *базис Рисса в* H *и* W_N – *множество вершин некоторого* N*-мерного куба* (*см.* (8)). *Тогда при* $m \leqslant c(\kappa)N$ *имеет место неравенство*

$$\max_{w \in W_N} e_m(w, \Phi) \geqslant 0.9 \cdot N^{1/2}.$$

Приложения теоремы 1 и следствия 1 получаются точно так же, как аналогичные результаты в [5]. В частности, пусть $H = L^2(0,1)$ и $H^{r,\alpha}$ – следующий класс гладких функций:

$$H^{r,\alpha} = \biggl\{ f \in L^2(0,1) \colon \|f\|_C + \|f^{(r)}\|_C \leqslant 1, \\ \frac{|f^{(r)}(x) - f^{(r)}(y)|}{|x-y|^\alpha} \leqslant 1 \biggr\}, \qquad r = 0, 1, \dots, \quad \alpha \in (0, 1].$$

Имеет место

Следствие 2. *При* $r = 0, 1, \dots$ *и* $\alpha \in (0,1]$ *для произвольного фрейма* Φ *с коэффициентом обусловленности* κ *имеют место неравенства*

$$\sup_{f \in H^{r,\alpha}} \sigma_m(f, \Phi) \geqslant c(r, \alpha, \kappa) \cdot m^{-(r+\alpha)} > 0, \qquad m = 1, 2, \dots .$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Duffin R., Schaeffer A. // Trans. Amer. Math. Soc. 1952. V. 72. № 2. P. 341–266. **2**. Козлов В. Я. // Матем. сб. 1948. Т. 23 (65). № 3. С. 441–474. **3**. Кашин Б. С., Саакян А. А. Ортогональные ряды. 2-е изд. М.: АФЦ, 1999. **4**. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. М.–Ижевск: РХД, 2001. **5**. Кашин Б. С. // Тр. МИАН. 1985. Т. 172. С. 187–191.

(Б. С. Кашин) Математический институт РАН им. Стеклова
(Т. Ю. Куликова) Научно-исследовательский Актуарно-финансовый центр
E-mail: `kashin@mi.ras.ru`, `koulikt@mi.ras.ru`

Поступило
13.03.2002