Математические заметки

Том 84 выпуск 6 декабрь 2008

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Замечание об оценках ортомассивности

Б. С. Кашин

В работе [1] автором была введена характеристика сложности подмножества K единичного шара $B(H)$ гильбертова пространства H, названная ортомассивностью. *Ортомассивность* определяется последовательностью чисел $(n=1,2,\dots)$

$$OM_n(K) = n^{-1/2}\sup\sum_{j=1}^{n}(f_j,\varphi_j), \qquad \{\varphi_j\}_{j=1}^{n} \text{ – о.н.с.}, \quad \{f_j\}_{j=1}^{n}\subset K, \tag{1}$$

где $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ – скалярное произведение в H и используется сокращение о.н.с. для ортонормированных систем в H.

Легко видеть, что всегда

$$\sup_{f\in K}\|f\|_H \leqslant OM_n(K) \leqslant n^{1/2}, \qquad n=1,2,\dots .$$

Поведение величин (1) связано с поведением колмогоровских поперечников $d_n(K,H)$ множества K, рассматриваемого как подмножество в H. Нетрудно проверить, в частности, что при $n=1,2,\dots$

$$OM_n(K) \geqslant n^{-1/2}\sum_{j=1}^{n} d_{j-1}(K,H). \tag{2}$$

Однако оценка (2) не всегда точна по порядку. Например, для случая, когда

$$K=\{X_t, 0<t<1\}\subset L^2(0,1), \tag{3}$$

где

$$X_t(x)=\begin{cases}1, & \text{если } 0\leqslant x\leqslant t,\\ 0, & \text{если } t<x\leqslant 1,\end{cases}$$

в [1] отмечено порядковое соотношение

$$OM_n(K)\asymp \log n, \qquad n\to\infty, \tag{4}$$

в то время как (2) дает лишь тривиальную оценку $OM_n(K)\geqslant 1$.

Оценка величин (1) связана с другими задачами из теории ортогональных рядов и комбинаторики. Так соотношение (4) фактически эквивалентно объединению классических теорем Меньшова–Радемахера и Меньшова о сходимости и расходимости почти

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00799а).

всюду ортогональных рядов (см. [2; глава 9]). Таким образом эти классические теоремы можно рассматривать как утверждения о сложности семейства характеристических функций интервалов (3).

В приведенном ниже результате, по существу обобщающем доказательство теоремы Меньшова–Радемахера, дается оценка сверху ортомассивности, приводящая в ряде случаев к точным результатам. В дальнейшем через $\#A$ мы обозначаем число элементов в конечном множестве A.

Теорема. *Пусть множество $F \subset B(H)$ таково, что найдутся конечные множества*

$$V_0, V_1, \dots, V_R \subset H$$

такие, что

1) $0 \in V_q \subset 2^{-q/2} B(H)$, $0 \leqslant q \leqslant R$;
2) $\#V_q \leqslant h_q \cdot 2^q$, $0 \leqslant q \leqslant R$;
3) *любой элемент $f \in F$ представим в виде*

$$f = \sum_{q=0}^{R} \sum_{\mu=1}^{l_q} v_\mu^{(q)},$$

где $v_\mu^{(q)} \in V_q$, $1 \leqslant \mu \leqslant l_q$.

Тогда равномерно по $n = 1, 2, \dots$

$$OM_n(F) \leqslant \left(R \cdot \sum_{q=0}^{R} l_q h_q \right)^{1/2}.$$

Доказательство. Используя свойство 3) множества F и дважды применяя неравенство Коши, для произвольной пары $f \in F$, $\varphi \in H$ находим

$$\begin{aligned}(f,\varphi)^2 &= \left[\sum_{q=0}^{R} \left(\sum_{\mu=1}^{l_q} v_\mu^{(q)}, \varphi \right) \right]^2 \leqslant R \sum_{q=0}^{R} \left(\sum_{\mu=1}^{l_q} v_\mu^{(q)}, \varphi \right)^2 \leqslant R \sum_{q=0}^{R} l_q \cdot \sum_{\mu=1}^{l_q} (v_\mu^{(q)}, \varphi)^2 \\ &\leqslant R \sum_{q=0}^{R} l_q \sum_{v \in V_q} (v, \varphi)^2. \end{aligned} \tag{5}$$

Если теперь $\{\varphi_j\}_{i=1}^n$ – произвольная о.н.с. и $\{f_j\}_{i=1}^n \subset F$, то снова используя неравенство Коши, оценку (5), неравенство Бесселя и свойства 1), 2) семейства F, получаем

$$\begin{aligned}\left[n^{-1/2} \sum_{j=1}^{n} (f_j, \varphi_j) \right]^2 &\leqslant \sum_{j=1}^{n} (f_j, \varphi_j)^2 \leqslant \sum_{j=1}^{n} R \cdot \sum_{q=0}^{R} l_q \sum_{v \in V_q} (v, \varphi_j)^2 = R \sum_{q=0}^{R} l_q \sum_{v \in V_q} \sum_{j=1}^{n} (v, \varphi_j)^2 \\ &\leqslant R \sum_{q=0}^{R} l_q \sum_{v \in V_q} \|v\|_H^2 \leqslant R \sum_{q=0}^{R} l_q (\#V_q) \cdot 2^{-q} \leqslant R \sum_{q=0}^{R} l_q h_q, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Пусть при $d = 2, 3, \dots$

$$\pi_d = \{X_P; P = (0, t_1) \times \dots (0, t_d),\ 0 < t_i < 1,\ 1 \leqslant i \leqslant d\}$$

– множество характеристических функций d-мерных промежутков, рассматриваемое как подмножество в $L^2(0,1)^d$.

Следствие. *При* $d=2,3,\dots$

$$OM_n(\pi_d) \asymp (\log n)^d, \qquad n\to\infty.$$

Доказательство. Для простоты ограничимся случаем $d=2$.

а) Оценка сверху. Пусть при $r=1,2,\dots$

$$\pi_2(r)=\left\{X_P : P=\left(0,\frac{a}{2^r}\right)\times\left(0,\frac{b}{2^r}\right),\ a,b\in\{1,\dots,2^r-1\}\right\}.$$

Для данного n выберем натуральное r так, что

$$2^{r-1}<n\leqslant 2^r. \tag{6}$$

Легко проверить, что для любой функции $f\in\pi_2$ найдется $\tilde f\in\pi_2(r)$ с $\|f-\tilde f\|_{L^2}\leqslant cn^{-1/2}$, откуда следует, что

$$OM_n(\pi_2)\leqslant OM_n(\pi_2(r))+C, \tag{7}$$

где C – абсолютная постоянная.

Пусть промежуток P имеет вид

$$P=\left(0,\frac{a}{2^r}\right)\times\left(0,\frac{b}{2^r}\right), \qquad a,b\in\{1,\dots,2^r-1\}.$$

С точностью до конечного множества точек имеет место равенство

$$\left(0,\frac{a}{2^r}\right)=\bigsqcup_{s\in\Lambda}\Delta_s,$$

где знак $\bigsqcup$ обозначает, как обычно, объединение непересекающихся множеств, Δ_s некоторый двоичный интервал длины 2^{-s} (т.е. интервал вида $((c-1)/2^s, c/2^s)$, $c\in\{1,\dots,2^s\}$), а Λ – некоторое подмножество набора $\{1,\dots,r\}$. Аналогично

$$\left(0,\frac{b}{2^r}\right)=\bigsqcup_{m\in\Lambda'}\Delta'_m$$

и

$$X_P=\sum_{s\in\Lambda,m\in\Lambda'}X_{\Delta_s\times\Delta'_m}. \tag{8}$$

Нетрудно проверить, что при $q=1,2,\dots,2r$ в представление (8) входит $\leqslant 2q$ характеристических функций двумерных двоичных интервалов площади 2^{-q}. Всего же имеется $\leqslant 2q\cdot 2^q$ двоичных промежутков площади 2^{-q}, лежащих в $(0,1)^2$. Применяя теорему в случае, когда $F=\pi_2(r)$, $R=2r$ и при $q=0,1,\dots,R$, V_q – семейство двумерных двоичных интервалов площади 2^{-q}, мы находим

$$OM_n(\pi_2(r))\leqslant\left(R\cdot\sum_{q=1}^{R}q^2\right)^{1/2}\leqslant 4R^2\leqslant 16r^2\leqslant 16(\log_2 n+1)^2.$$

Из последнего неравенства и (7) вытекает оценка сверху.

б) Оценка снизу получается, если при $n=p^2$, $p=2,3,\dots$, взять в качестве о.н.с. $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$ двукратную систему

$$\{\psi_{j_1}(x)\psi_{j_2}(y),\ 1\leqslant j_1,j_2\leqslant p\},$$

где $\{\psi_j(x)\}_{j=1}^p$ – функции о.н.с. Меньшова (см., например, [2; теорема 9.6]), для которых

$$\int_o^{t_j}\psi_j(x)\,dx>c(\log p)p^{-1/2}, \qquad t_j\in(0,1), \quad 1\leqslant j\leqslant\frac{p}{2}\,.$$

Тогда

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{1\leqslant j_1,j_2\leqslant p/2} (\psi_{j_1}(x)\psi_{j_2}(y), X_{[0,t_{j_1}]\times[0,t_{j_2}]}(x,y)) \geqslant \frac{1}{p} \sum_{1\leqslant j_1,j_2\leqslant p/2} c^2(\log p)^2/p \geqslant c'(\log n)^2, \qquad c'>0,$$

что и требовалось.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Б. С. Кашин, *Матем. заметки*, **72**:4 (2002), 509–515. **[2]** Б. С. Кашин, А. А. Саакян, *Ортогональные ряды*, АФЦ, М., 1999.

Б. С. Кашин
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: kashin@mi.ras.ru

Поступило
01.08.2008