Математические заметки

том 72 выпуск 4 октябрь 2002

УДК 517.5

О НИЖНИХ ОЦЕНКАХ n-ЧЛЕННЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ПЛОСКИХ ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВ И СМЕЖНЫХ ВОПРОСАХ

Б. С. Кашин

В работе установлены оценки снизу n-членных приближений в метрике $L^2(I^2)$ характеристических функций плоских выпуклых подмножеств квадрата I^2 по произвольным ортогональным системам. Показано, что при $n \to \infty$ эти величины не могут убывать быстрее, чем $1/n$.

Библиография: 12 названий.

Пусть $I^d = [0,1]^d$ – единичный куб в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$, $d = 1, 2, \dots$. Через $\mathfrak{M}_d$ обозначим совокупность всех выпуклых подмножеств куба I^d и положим

$$K_d = \{\chi_A(x),\ A \in \mathfrak{M}_d\},$$

где для $x \in I^d$

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A, \\ 0, & \text{если } x \notin A. \end{cases}$$

В заметке установлены оценки снизу наилучших n-членных приближений семейства K_2 по произвольной ортонормированной системе в метрике гильбертова пространства $L^2(I^2)$. Кроме того, в связи с задачами теории приближения введена и для семейства $K_2 \subset L^2(I^2)$ изучена одна количественная характеристика "массивности" произвольного подмножества элементов единичного шара гильбертова пространства.

1. Пусть H – гильбертово пространство, $\Phi = \{\varphi_j\}$ – ортонормированная система (о.н.с.) в H, $f \in H$.

Определение 1. *Наилучшим n-членным приближением* элемента f по системе Φ называется величина

$$e_n(f, \Phi) = \inf_{P \in \Sigma_n} \|f - P\|_H, \tag{1}$$

где для $n = 1, 2, \dots$

$$\Sigma_n \equiv \biggl\{\sum_{j \in \Lambda} a_j \varphi_j;\quad a_j \in \mathbb{R},\quad \#\Lambda \leqslant n\biggr\},$$

а через $\#\Lambda$ мы обозначаем число элементов в (конечном) множестве натуральных чисел Λ.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-00315.

Далее, если $\mathscr{F} \subset H$, то при $n = 1, 2, \dots$

$$e_n(\mathscr{F}, \Phi) = \sup_{f \in \mathscr{F}} e_n(f, \Phi). \tag{2}$$

Аналогично определяются наилучшие n-членные приближения по произвольным системам элементов Φ в нормированных пространствах (см. подробнее [1], [2]). Активизация исследований n-членных приближений в последние годы в значительной степени связана с их приложениями в задачах сжатия изображений. При этом изучаются величины (2) для различных классов "достаточно хороших" функций, рассматриваемых как подмножества функционального нормированного пространства. Далеко не очевиден ответ на вопрос о том, какие функциональные классы $\mathscr{F}$ хорошо описывают изображения, встречающиеся в реальной практике. С этой точки зрения представляется весьма естественной поставленная в 1993 г. С. В. Конягиным задача о возможном поведении при $n \to \infty$ величин

$$e_n(K_d, \Phi), \qquad d = 1, 2, \dots, \quad \Phi \text{ – о.н.с.} \tag{3}$$

При $d = 1$ величины (3) могут убывать экспоненциально; это так, если Φ – система Хаара. С другой стороны, в [3] установлено существование такой абсолютной постоянной $C > 0$, что для любой о.н.с. Φ

$$e_n(K_1, \Phi) \geqslant C^{-n}, \qquad n = 1, 2, \dots .$$

Оказывается, что одномерный случай является в определенном смысле вырожденным и при $d > 1$ характер поведения величин (3) меняется. В частности, имеет место

Теорема 1. *Существует абсолютная постоянная $c > 0$ такая, что для любой о.н.с. Φ в $L^2(I^2)$ при $n = 1, 2, \dots$ имеет место оценка*

$$e_n(K_2, \Phi) \geqslant \frac{c}{n}.$$

В доказательстве теоремы 1 нам потребуется

Теорема A [4]. *Пусть для некоторого $m \in \mathbb{N}$ подмножество K гильбертова пространства H содержит семейство Q всех вершин некоторого $2m$-мерного куба*

$$Q = \left\{ \sum_{i=1}^{2m} \varepsilon_i, \psi_i, \quad \varepsilon_i = \pm 1, \quad \{\psi_i\}_{i=1}^{2m} \quad \text{– о.н.с.} \right\}.$$

Тогда для любой о.н.с. Φ

$$e_m(K, \Phi) \geqslant c_1 m^{1/2},$$

где $c_1 > 0$ – абсолютная постоянная.

Положим

$$\Delta_2(K_2) = \{f_1 + f_2 - 2f_3,\ f_i \in K_2,\ i = 1, 2, 3\}.$$

Легко видеть, что при $n = 1, 2, \dots$

$$e_{3n}(\Delta_2(K_2), \Phi) \leqslant 4e_n(K, \Phi).$$

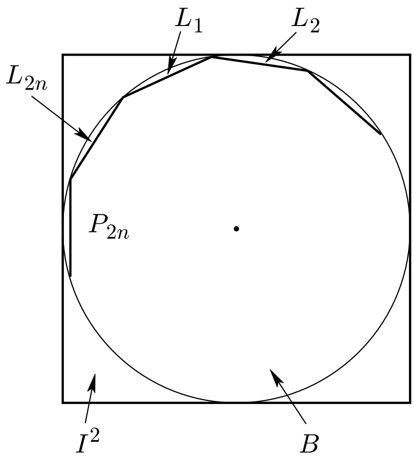

Рис. 1

Поэтому для доказательства теоремы 1 достаточно проверить, что при $n = 2, 3, \dots$ для любой о.н.с. Φ

$$e_n(\Delta_2(K_2), \Phi) \geqslant c_2 n^{-1}, \qquad c_2 > 0. \tag{4}$$

Рассмотрим замкнутый круг B радиуса $1/2$ с центром в точке $(1/2, 1/2) \in I^2$, и пусть P_{2n} – замкнутый правильный $2n$-угольник, вписанный в круг B (см. рис. 1).

Тогда разность $B \setminus P_{2n}$ состоит из $2n$ круговых сегментов $L_1, \dots, L_{2n}$. Для нас важно, что для любого набора натуральных чисел $\Lambda \subset \{1, 2, \dots, 2n\}$ множество

$$V(\Lambda) = P_{2n} \cup \left\{ \bigcup_{i \in \Lambda} L_i \right\}$$

является выпуклым множеством. Пусть $f_1 = \chi_B$, $f_2 = \chi_{P_{2n}}$, $f_3 = \chi_{V(\Lambda)}$, где $\Lambda \subset \{1, \dots, 2n\}$. Тогда $f_1 + f_2 - 2f_3 \in \Delta_2(K_2)$, причем

$$f_1(x) + f_2(x) - 2f_3(x) = \begin{cases} +1, & \text{если } x \in L_i,\ i \notin \Lambda, \\ -1, & \text{если } x \in L_i,\ i \in \Lambda, \\ 0 & \text{иначе}. \end{cases} \tag{5}$$

Таким образом, при любом выборе знаков $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^{2n}$, $\varepsilon_i = \pm 1$, имеет место включение

$$\sum_{i=1}^{2n} \varepsilon_i \chi_{L_i} \subset \Delta_2(K_2), \tag{6}$$

причем функции χ_{L_i}, $1 \leqslant i \leqslant 2n$, попарно ортогональны, имеют одинаковую норму в $L^2(I^2)$ и

$$\|\chi_{L_i}\|_{L^2(I^2)} \geqslant c_3 n^{-3/2}. \tag{7}$$

Применение теоремы A с учетом соотношений (6), (7) приводит к оценке

$$e_n(\Delta_2(K_2), \Phi) \geqslant c_4 n^{-1},$$

справедливой для любой о.н.с. Φ. Неравенство (4), а значит, и теорема 1 доказаны.

Замечание. Оценка сверху вида $e_n(K_2,\Phi_0) \leqslant Cn^{-1/2}$ в случае, когда Φ_0 – кратная система Хаара, вытекает из результатов работы [5]. Отметим еще работу [6], в которой рассматриваются n-членные приближения характеристических функций плоских множеств с гладкой границей.

Пусть теперь $\Phi = \{\varphi_j\}$ – произвольный фрейм в гильбертовом пространстве H и для $f \in H$

$$\sigma_n(f,\Phi) = \inf_{\Lambda\subset\mathbb{N},\ \#\Lambda\leqslant n}\biggl\| f - \sum_{j\in\Lambda}(f,\tilde{\varphi}_j)\varphi_j\biggr\|_H,$$

где $\{\tilde{\varphi}_j\}$ – фрейм, двойственный к Φ (см. подробнее [7]). В [8] было проверено, что аналог теоремы А сохраняется для фреймов общего вида, если величину $e_n(K,\Phi)$ заменить на

$$\sigma_n(K,\Phi) = \sup_{f\in K}\sigma_n(f,\Phi).$$

Поэтому рассуждения, приведенные в доказательстве теоремы 1, показывают, что справедлива

Теорема 2. *Для произвольного фрейма Φ в $L^2(I^2)$ при $n = 1,2,\dots$ имеет место неравенство*

$$\sigma_n(K_2,\Phi) \geqslant \frac{c}{n}, \qquad c = c(\Phi) > 0.$$

2. Пусть K – подмножество единичного шара гильбертова пространства H. Для $n = 1,2,\dots$ положим

$$OM_n(K) = n^{-1/2}\sup_{\substack{\{\psi_j\}_{j=1}^n\text{ – о.н.с.}\\ \{f_j\}_{j=1}^n\subset K}}\sum_{j=1}^n(\psi_j,f_j), \tag{8}$$

где $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ – скалярное произведение в H. Поведение последовательности

$$\{OM_n(K)\}_{n=1}^\infty, \tag{9}$$

которую можно назвать "характеристикой ортомассивности" множества K, содержит полезную информацию о K. Легко видеть, что всегда

$$\sup_{f\in K}\|f\|_H \leqslant OM_n(K) \leqslant n^{1/2}, \qquad n = 1,2,\dots.$$

Нетрудно заметить также связь величин $OM_n(K)$ с n-поперечниками по Колмогорову множества K в пространстве H.

Если $K = K_1 \subset L^2(0,1)$, то

$$OM_n(K_1) \asymp \log n, \qquad n\to\infty.$$

Этот результат есть следствие теоремы Меньшова–Радемахера (см. [9, с. 333, 336]). Более общо, если при $d = 2,3,\dots$ π_d есть множество характеристических функций d-мерных промежутков, лежащих в I^d, со сторонами, параллельными осям координат, то из результатов работ [10], [11] вытекает соотношение

$$OM_n(\pi_d) \asymp (\log n)^d, \qquad n\to\infty.$$

Оказывается, что при $d > 1$ последовательность $OM_n(K_d)$ растет существенно быстрее, чем в одномерном случае.

Теорема 3. *При* $n = 1, 2, \dots$

$$OM_n(K_2) \geqslant c_5 n^{1/6}, \qquad c_5 > 0.$$

Доказательство. Не ограничивая общности, считаем, что $n = m^3 = 2^{3r}$, $r = 1, 2, \dots$. Внутри кольца

$$\frac{1}{4} \leqslant \left| x - \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right| \leqslant \frac{1}{2}, \qquad x \in I^2,$$

рассмотрим $p \geqslant c_6 n^{2/3}$, $c_6 > 0$, колец Ω_ν с центром в точке $(1/2, 1/2) \in I^2$ таких, что граница Ω_ν состоит из окружностей C_ν^{ext} и C_ν^{int} радиусов r_ν^{ext} и r_ν^{int} соответственно, причем

1) $C_\nu^{\mathrm{int}} = C_{\nu+1}^{\mathrm{ext}}$, $\nu = 1, 2, \dots, p-1$;

2) если $\mathscr{D}_\nu$ – какой-то правильный m-угольник, вписанный в C_ν^{ext}, то

$$\mathscr{D}_\nu \supset C_\nu^{\mathrm{int}}, \qquad \nu = 1, \dots, p;$$

3) $0 < c_7 n^{-2/3} \leqslant r_\nu^{\mathrm{ext}} - r_\nu^{\mathrm{int}} < c_8 n^{-2/3}$, $\nu = 1, \dots, p$.

Аналогично доказательству теоремы 1, круговые секторы, на которые разбивается множество $\Omega_\nu \setminus \mathscr{D}_\nu$, обозначим L_i^ν, $i = 1, \dots, m$.

Пусть $\{w_j\}_{j=1}^m$ – первые m функций ортонормированной системы Уолша [9, с. 150]. Перенесем эти функции, принимающие значения $+1$ или -1, на множество $\omega_\nu = \bigcup_{i=1}^m L_i^\nu$ (при $\nu = 1, 2, \dots, p$), положив

$$\psi_j^\nu(x) = \begin{cases} \alpha_\nu w_j \left(\dfrac{i - 1/2}{m} \right) & \text{для } x \in L_i^\nu,\ i = 1, \dots, m, \\ 0 & \text{для } x \notin \omega_\nu, \end{cases} \tag{10}$$

где $\alpha_\nu > 0$ – нормирующий множитель такой, что $\|\psi_j^\nu\|_{L^2(I^2)} = 1$, $\nu = 1, \dots, p$, $j = 1, \dots, m$, причем нетрудно проверить, что

$$\alpha_\nu = \{\operatorname{meas} \omega_\nu\}^{-1/2} \asymp n^{1/3}, \qquad \nu = 1, \dots, p. \tag{11}$$

Полученная в итоге система функций

$$\{\psi_j^\nu,\quad \nu = 1, \dots, p,\ j = 1, \dots, m\} \ \text{ – о.н.с. в } L^2(I^2). \tag{12}$$

Далее, пусть при $\nu = 1, \dots, p$ и $j = 1, \dots, m$

$$Q_j^\nu = \bigcup_{i\colon \psi_j^\nu(x) > 0 \text{ для } x \in L_i^\nu} L_i^\nu, \qquad E_j^\nu = \mathscr{D}_\nu \cup Q_j^\nu.$$

Тогда (см. доказательство теоремы 1) E_j^ν – выпуклое множество, т.е.

$$f_j^\nu = \chi_{E_j^\nu} \in K_2, \qquad \nu = 1, \dots, p, \quad j = 1, \dots, m.$$

При этом (см. (10), (11))

$$\sum_{(\nu,j)} \int_{I^2} f_j^\nu \psi_j^\nu \, dx = \frac{1}{2} \sum_{(\nu,j)} \int_{I^2} |\psi_j^\nu| \, dx = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{p} \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{\alpha_\nu} \geqslant c_9 n^{2/3}, \qquad c_9 > 0,$$

т.е. $OM_n(K_2) \geqslant c_9 n^{1/6}$, что и требовалось доказать.

Поясним, как могут использоваться оценки скорости роста последовательности (8). Пусть для данного n набор элементов $\{f_j\}_{j=1}^n \subset K$ почти максимизирует выражение (7), т.е. найдется о.н.с. $\{\psi_j\}_{j=1}^n$, для которой

$$\frac{1}{n^{1/2}} \sum_{j=1}^{n} (\psi_j, f_j) \geqslant \frac{1}{2} OM_n(K).$$

Далее, пусть $\{\varphi_i\}_{i=1}^s$ – произвольная нормированная система элементов в H такая, что при $j = 1, 2, \ldots, n$

$$f_j = \sum_{i=1}^{s} c_i^j \varphi_i + \Delta_j, \qquad \text{где} \quad \|\Delta_j\|_H \leqslant n^{-1/2}, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{13}$$

Тогда имеет место неравенство

$$\sum_{i=1}^{s} \biggl(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} (c_i^j)^2 \biggr)^{1/2} \geqslant \frac{1}{2} OM_n(K) - 1. \tag{14}$$

Действительно,

$$\frac{1}{2} OM_n(K) \leqslant \frac{1}{n^{1/2}} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{s} c_i^j (\psi_j, \varphi_i) + \frac{1}{n^{1/2}} \sum_{j=1}^{n} (\psi_j, \Delta_j),$$

откуда, учитывая (13) и неравенство Бесселя, мы находим

$$\frac{1}{2} OM_n(K) - 1 \leqslant \sum_{i=1}^{s} \biggl(\frac{1}{n^{1/2}} \sum_{j=1}^{n} c_i^j \psi_j, \varphi_i \biggr) \leqslant \sum_{i=1}^{s} \biggl(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} (c_i^j)^2 \biggr)^{1/2},$$

что и требовалось.

При наличии дополнительной информации о системе $\{\varphi_i\}_{i=1}^s$ можно в некоторых случаях выводить из (14) оценки снизу величин коэффициентов c_i^j, $1 \leqslant i \leqslant s$, при некотором фиксированном j (см. подробнее [3], [12], где неравенства, близкие к (14), применялись в частном случае, когда $K = K_1 \subset L^2(0,1)$, а Φ – произвольная ортонормированная система в $L^2(0,1)$).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] DeVore R. A. Nonlinear approximation // Acta Numerica. 1998. V. 7. P. 51–150.

[2] Temlyakov V. N. Nonlinear Methods of Approximations. IMI Preprint 2001:09: University of South Carolina, 2001.

[3] Kashin B. S. On lower estimates for n-term approximation in Hilbert space // Approximation Theory. Volume Dedicated to B. Sendov. Sofia: Darba, 2002. P. 241–257.

[4] Кашин Б. С. Об аппроксимационных свойствах полных ортонормированных систем // Тр. МИАН. 1985. Т. 172. С. 187–191.

[5] Cohen A., DeVore R., Petrushev P., Xu H. Nonlinear approximation and the Space $BV(\mathbb{R}^2)$ // Amer. J. Math. 1999. V. 121. P. 587–628.

[6] Donoho D. L. Sparse components of images and optimal atomic decompositions // Constr. Approx. 2001. V. 17. №3. P. 353–382.

[7] Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. М.–Ижевск: РХД, 2001.

[8] Кашин Б. С., Куликова Т. Ю. Замечание об аппроксимационных свойствах фреймов общего вида // Матем. заметки. 2002. Т. 72. №2. С. 312–315.

[9] Кашин Б. С., Саакян А. А. Ортогональные ряды. 2-е изд. М.: АФЦ, 1999.

[10] Agnew R. P. On double orthogonal series // Proc. London Math. Soc. Ser. 2. 1932. V. 33. №6. P. 420–434.

[11] Moricz F. Multiparameter strong laws of large numbers. I // Acta Sci. Math. 1978. V. 40. P. 143–156.

[12] Кашин Б. С. О коэффициентах разложения одного класса функций по полным системам // Сиб. матем. ж. 1977. Т. 18. №1. С. 122–131.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: `kashin@mi.ras.ru`

Поступило
30.04.2002