Математические заметки

том 80 выпуск 2 август 2006

УДК 517.5

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ НЕРАВЕНСТВ ДЛЯ ОРТОНОРМИРОВАННЫХ СИСТЕМ

Б. С. Кашин

В заметке предложен подход к доказательству неравенств типа Либа–Тирринга, использующий стандартный аппарат теории ортогональных рядов.

Библиография: 5 названий.

В 1976 г. в работе Либа и Тирринга [1] была установлена следующая

Теорема A. *Для произвольной ортонормированной системы* $\Phi = \{\varphi_j\}_{j=1}^N \subset L^2(\mathbb{R}^d)$ *имеет место неравенство*

$$\biggl(\int_{\mathbb{R}^d} \rho_\Phi^{p/(p-1)}\,dx\biggr)^{2(p-1)/d} \leqslant C_{p,d}\sum_{j=1}^N \|\nabla\varphi_j\|_2^2, \tag{1}$$

если $\max(1,d/2) < p \leqslant 1+d/2$, *где*

$$\rho_\Phi \equiv \sum_{j=1}^N \varphi_j^2(x) \tag{2}$$

и, как обычно, $\nabla\varphi = \bigl(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial\varphi}{\partial x_d}\bigr)$.

В дальнейшем серия неравенств типа (1) для конечных ортонормированных систем была установлена различными авторами. В частности, Ильиным [2] была доказана

Теорема B. *Пусть* $\{\varphi_j\}_{j=1}^N \subset L^2(S^1)$ *– ортонормированная система функций, заданных на единичной окружности* S^1, *причем* $\varphi_j \perp 1$, $j=1,\dots,N$. *Тогда имеет место неравенство*

$$\int_{S^1} \rho_\Phi^2\,d\mu \leqslant C\sum_{j=1}^N \|\varphi_j^{(1/2)}\|_{L^2(S^1)}^2,$$

где для $f(z)=\sum_{k\ne0}\hat f(k)z^k \in L^2(S^1)$

$$f^{(1/2)} = \sum_{k\ne0}|k|^{1/2}\hat f(k)z^k$$

– производная порядка $1/2$ *от функции* f, *а* μ *– нормированная мера Лебега на* S^1.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 05-01-00062.

Интерес к неравенствам типа Либа–Тирринга связан с их приложениями в теории дифференциальных уравнений с частными производными (см. подробнее [3], а также [2]). Известные методы доказательства этих неравенств основаны на нетривиальных результатах из спектральной теории, используют информацию о поведении отрицательных собственных значений операторов типа Шредингера (см., например, [2]). В этой заметке предлагается подход к неравенствам типа Либа–Тирринга, основанный на стандартном аппарате теории ортогональных рядов: неравенствах для случайных рядов и классической теореме Литлвуда–Пэли. Ниже мы продемонстрируем этот подход, установив некоторое обобщение теоремы B. При этом рассуждения, приведенные ниже, применимы, по всей видимости, и для доказательства других неравенств указанного типа. Кроме того, наш подход позволяет в определенной степени прояснить вопрос о том, для каких систем $\{\varphi_j\}$ неравенства типа Либа–Тирринга "точны по порядку".

Пусть

$$\Phi = \{\varphi_j\}_{j=1}^N \subset L^2(S^1), \qquad \text{причем} \quad \varphi_j \perp 1, \quad 1 \leqslant j \leqslant N. \tag{3}$$

Определим оператор

$$P_\Phi \colon l_2^N \to L^2(S^1),$$

действующий по правилу:

$$P_\Phi(\{c_j\}_{j=1}^N) = \sum_{j=1}^N c_j \varphi_j.$$

Пусть также при $\nu = 0, 1, \ldots$

$$\pi_\nu \colon L^2(S^1) \to T_{2^\nu}$$

– ортопроектор на пространство тригонометрических полиномов вида

$$T_{2^\nu} = \left\{ t(z) \colon t = \sum_{2^\nu \leqslant |k| < 2^{\nu+1}} a_k z^k \right\},$$

и пусть

$$\lambda_\nu(\Phi) = \|\pi_\nu \cdot P_\Phi \colon l_2^N \to T_{2^\nu}\|. \tag{4}$$

Очевидно, что $\lambda_\nu \leqslant 1$, $\nu = 0, 1, \ldots$, если Φ – ортонормированная (или субортонормированная) система. Поэтому следующее неравенство обобщает теорему B.

Теорема 1. *Для любой системы действительных функций Φ вида* (3)

$$\int_{S^1} \rho_\Phi^2 \, d\mu \leqslant C \sum_{\nu=0}^\infty \gamma_\nu(\Phi) \cdot \sum_{j=1}^N \sum_{2^\nu \leqslant |k| < 2^{\nu+1}} |\widehat{\varphi}_j(k)|^2,$$

где при $\nu = 0, 1, 2, \ldots$

$$\gamma_\nu(\Phi) = \sum_{\beta=0}^\nu 2^\beta \cdot \lambda_\beta^2(\Phi), \tag{5}$$

функция ρ_Φ определена в (2), *числа $\lambda_\beta(\Phi)$ в* (4), *а C – абсолютная постоянная.*

Прежде чем перейти к доказательству теоремы 1, напомним некоторые нужные нам факты.

Пусть $1 \leqslant p < \infty$ и $\varphi_j \in L^p(S^1)$, $1 \leqslant j \leqslant N$. Тогда, положив $\mathscr{F} = \bigl(\sum \varphi_j^2\bigr)^{1/2}$, имеем (см. [4; с. 52]):

$$C_1(p)\|\mathscr{F}\|_{L^p(S^1)}^p \leqslant \int_{S^1}\biggl\|\sum_{j=1}^N r_j(t)\varphi_j\biggr\|_{L^p(S^1)}^p dt \leqslant C_2(p)\|\mathscr{F}\|_{L^p(S^1)}^p, \qquad (6)$$

где $\{r_j(t)\}$ – функции Радемахера, $C_1(p) > 0$.

Далее нам потребуется известное следствие теоремы Литлвуда–Пэли (см., например, [5; с. 56]): если, принимающая действительные значения, функция $f \in L^p(S^1)$, $1 < p < \infty$, $f \perp 1$ и

$$f = \sum_{\nu=0}^\infty \delta_\nu(f), \qquad \delta_\nu(f) = \sum_{2^\nu \leqslant |k| < 2^{\nu+1}} \hat f(k) z^k,$$

то

$$C_3(p)\|f\|_{L^p(S^1)} \leqslant \biggl\|\Bigl(\sum \delta_\nu^2\Bigr)^{1/2}\biggr\|_{L^p(S^1)} \leqslant C_4(p)\|f\|_{L^p(S^1)}, \qquad C_3(p) > 0. \qquad (7)$$

Нам потребуется также следующая простая

Лемма. *Для любой системы функций* Φ *вида* (3) *при* $\beta = 0, 1, \dots$ *справедливо неравенство*

$$A = \biggl\|\sum_{j=1}^N \delta_\beta^2(\varphi_j)\biggr\|_{L^\infty(S^1)} \leqslant 2^{\beta+1}\cdot\lambda_\beta^2.$$

Действительно, пусть $z_0 \in S^1$ – такая точка, что

$$\biggl(\sum_{j=1}^N \delta_\beta^2(\varphi_j)(z_0)\biggr)^{1/2} = A^{1/2}.$$

Найдется набор чисел $\{c_j\}_{j=1}^N$ с $\sum_{j=1}^N c_j^2 = 1$ такой, что для тригонометрического многочлена

$$\sum_{j=1}^N c_j\delta_\beta(\varphi_j) = P(z) = \sum_{2^\beta \leqslant |k| < 2^{\beta+1}} a_k z^k$$

имеют место неравенства

$$\|P\|_{L^\infty(S^1)} \geqslant |P(z_0)| = A^{1/2},$$

а значит (см. (4)),

$$\begin{aligned} A^{1/2} &\leqslant \|P\|_{L^\infty(S^1)} \leqslant \sum_{2^\beta \leqslant |k| < 2^{\beta+1}} |a_k| \leqslant 2^{(\beta+1)/2}\biggl(\sum_{2^\beta \leqslant |k| < 2^{\beta+1}} |a_k|^2\biggr)^{1/2} \\ &= 2^{(\beta+1)/2}\|P\|_{L^2(S^1)} \leqslant 2^{(\beta+1)/2}\lambda_\beta, \end{aligned}$$

что и требовалось (фактически мы использовали неравенство Никольского разных метрик, сводящееся в данном случае к неравенству Коши).

Доказательство теоремы 1. Используя (6), а затем (7) и вводя обозначение $\delta_\nu(t,z)=\delta_\nu\bigl(\sum_{j=1}^N r_j(t)\varphi_j(z)\bigr)$, имеем

$$Q\equiv\int_{S^1}\rho_\Phi^2\,d\mu\leqslant C_5\int_0^1\Bigl\|\sum r_j(t)\varphi_j\Bigr\|_{L^4}^4\,dt \leqslant C_6\int_0^1\int_{S^1}\biggl[\sum_{\nu=0}^\infty\delta_\nu^2(t,z)\biggr]^2\,d\mu\,dt.$$

Следовательно

$$\frac{Q}{C_6}\leqslant\sum_{\nu,\beta=0}^\infty\int_0^1\int_{S^1}\delta_\nu^2(t,z)\delta_\beta^2(t,z)\,d\mu\,dt. \tag{8}$$

При этом

$$\delta_\nu^2(t,z)=\biggl(\sum_{j=1}^N r_j(t)\delta_\nu(\varphi_j)(z)\biggr)^2=\sum_{j,q=1}^N r_j(t)r_q(t)\delta_\nu(\varphi_j)\delta_\nu(\varphi_q),$$

а потому для каждого t

$$\int_{S^1}\delta_\nu^2(t,z)\delta_\beta^2(t,z)\,d\mu=\sum_{j,q,h,s=1}^N r_j(t)r_q(t)r_h(t)r_s(t) \times\int_{S^1}\delta_\nu(\varphi_j)\delta_\nu(\varphi_q)\delta_\beta(\varphi_h)\delta_\beta(\varphi_s)\,d\mu.$$

Учитывая, что интеграл $\int r_jr_qr_hr_s\,dt\neq0$, только если в наборе (j,q,h,s) каждое число встречается четное число раз (и тогда этот интеграл равен единице), мы находим

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_{\nu,\beta}\equiv\int_0^1\int_{S^1}\delta_\nu^2(t,z)\delta_\beta^2(t,z)\,d\mu\,dt&=\sum_{j=1}^N\sum_{h=1}^N\int_{S^1}\delta_\nu^2(\varphi_j)\delta_\beta^2(\varphi_h)\,d\mu\\ &+2\sum_{j=1}^N\sum_{q=1}^N\int_{S^1}\delta_\nu(\varphi_j)\delta_\beta(\varphi_j)\delta_\nu(\varphi_q)\delta_\beta(\varphi_q)\,d\mu-2\sum_{j=1}^N\int_{S^1}\delta_\nu^2(\varphi_j)\delta_\beta^2(\varphi_j)\,d\mu\\ &\leqslant\int_{S^1}\sum_{j=1}^N\delta_\nu^2(\varphi_j)\cdot\sum_{j=1}^N\delta_\beta^2(\varphi_j)\,d\mu+2\int_{S^1}\biggl[\sum_{j=1}^N\delta_\nu(\varphi_j)\delta_\beta(\varphi_j)\biggr]^2\,d\mu.\end{aligned}$$

Применяя неравенство Коши к сумме в последнем интеграле, находим

$$\mathrm{I}_{\nu,\beta}\leqslant3J_{\nu,\beta},\qquad\text{где}\quad J_{\nu,\beta}\equiv\int_{S^1}\sum_{j=1}^N\delta_\nu^2(\varphi_j)\cdot\sum_{j=1}^N\delta_\beta^2(\varphi_j)\,d\mu.$$

Поэтому (см. (8))

$$\frac{Q}{C_6}\leqslant3\sum_{\nu,\beta=0}^\infty J_{\nu,\beta}\leqslant6\sum_{\nu,\beta:\ \beta\leqslant\nu}J_{\nu,\beta}. \tag{9}$$

Используя для оценки слагаемых в сумме (9) лемму, имеем (см. также (5))

$$\frac{Q}{C_6} \leqslant 6\sum_{\nu=0}^{\infty}\biggl[\sum_{\beta=0}^{\nu}2^{\beta+1}\lambda_\beta^2\biggr]\cdot\int_{S^1}\sum_{j=1}^{N}\delta_\nu^2(\varphi_j)\,d\mu = 12\sum_{\nu=0}^{\infty}\gamma_\nu(\Phi)\biggl[\sum_{j=1}^{N}\sum_{2^k\leqslant|k|<2^{k+1}}|\widehat{\varphi}_j(k)|^2\biggr].$$

Теорема 1 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] E. Lieb, W. Thirring, “Inequalities for the moments of the eigenvalues of the Schrödinger hamiltonian and their relation to Sobolev inequalities”, *Studies in Mathematical Physics*, Essays in honor of Valentine Bargmann, Princeton Univ. Press, Princeton, 1976, 269–303.

[2] А. А. Ильин, “Интегральные неравенства Либа–Тирринга и их приложения к аттракторам уравнений Навье–Стокса”, *Матем. сб.*, **196**:1 (2005), 33–66.

[3] R. Temam, *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*, Springer-Verlag, New York, 1997.

[4] Б. С. Кашин, А. А. Саакян, *Ортогональные ряды*, АФЦ, М., 1999.

[5] С. М. Никольский, *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения*, Физматлит, М., 1977.

Б. С. Кашин
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

Поступило
07.02.2006