Математические заметки

том 54 выпуск 1 июль 1993

О СЛУЧАЙНЫХ МНОЖЕСТВАХ РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ

Б.С. Кашин. Л.А. Цафрири

П.Л. Ульянов поставил в [1] вопрос о характеризации множеств $\sigma \subset \mathbb{Z}$, для которых функции $\{e^{2\pi inx}\}_{n\in\sigma}$ образуют базис в порожденном ими подпространстве пространства $C(0,1)$. Другими словами, требуется выяснить для каких множеств σ конечна величина

$$U(\sigma) = \sup_{s,\{a_n\}} \frac{\left\| \sum\limits_{n\in\sigma\cap[-s,s]} a_n e^{2\pi inx} \right\|_\infty}{\left\| \sum\limits_{n\in\sigma} a_n e^{2\pi inx} \right\|_\infty},$$

где верхняя грань берется относительно всех $s \in \mathbb{N}$ и всех финитных последовательностей $\{a_n\}_{n\in\sigma} \neq 0$.

Множество σ, для которого величина $U(\sigma)$ конечна, мы будем называть множеством равномерной сходимости (U.C. множеством).

Статья [1] содержит два основных вопроса: один из них – выяснить является ли $\sigma = \{k^2\}_{k\in\mathbb{N}}$ множеством равномерной сходимости, второй, более общего характера, – определить насколько плотными могут быть U.C. множества.

Первая задача полностью решена К.И. Осколковым [2] (см. также [3]), который показал, что для любого многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами $\sigma = \{P(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ не является U.C, множеством.

Задача о возможной плотности множеств равномерной сходимости остается открытой. Она может быть сведена к вопросу о нахождении для данного N подмножества $\sigma \subset \{-N,\dots,N\}$ с максимально возможным числом элементов, для которого $U(\sigma)$ ограничена константой, не зависящей от N. Эта задача может быть рассмотрена и для других ортонормированных систем. В частности, для системы Уолша $\{W_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Простейшими примерами множеств равномерной сходимости являются множества Сидона, при этом известно, что их плотность весьма мала. Более точно, для множества Сидона $\sigma \in \mathbb{Z}$, $|\sigma \cap [-N,N]| \leq C\log N$, где

$C < \infty$ – некоторая постоянная, $N = 1, 2, \ldots$; множества большей плотности порядка $(\log N)^2$ были построены в [4], порядка $(\log N)^k$, $k \in \mathbb{N}$, – в [5]. До настоящего времени не известны примеры U.C. множеств большей плотности.

Цель настоящей заметки – рассмотреть случайные подмножества $\sigma \subset \{-N, \ldots, N\}$ тригонометрической системы $\{e^{2\pi inx}\}_{n=-N}^{N}$ или $\sigma \subset \{1, \ldots, N\}$ – в случае системы Уолша $\{W_i\}_{i=1}^{2^r=N}$. В обоих случаях оценки констант Лебега (т.е. норм операторов частных сумм) гарантируют, что $U(\sigma) \leq C \log N$ для всех σ, N и некоторой постоянной C.

В [6] было показано (см. также [7, с. 283]), что для любой равномерно ограниченной ортонормированной системы $\{\varphi_n\}_{n=1}^{N}$ случайное множество $\sigma \subset \{1, \ldots, N\}$ с числом элементов $|\sigma| \leq (1/6) \log N$ есть множество Сидона с константой Сидона, не зависящей от N. Следовательно, для случайного множества σ с числом элементов $|\sigma| \leq (1/6) \log N$ мы имеем $U(\sigma) \leq C$ с константой C , не зависящей от N.

Основной результат этой работы состоит в том, что для случайного подмножества $\sigma \in \{1, \ldots, N\}$ с числом элементов $\gg \log N$ $U(\sigma) \to \infty$ при $N \to \infty$ и, более того, если число элементов случайного множества σ удовлетворяет условию $|\sigma| \geq N^{\varepsilon}$ для некоторого $\varepsilon > 0$, то с большой вероятностью $U(\sigma)$ имеет максимально возможный порядок, т.е. $\log N$.

Сначала мы рассмотрим случай системы Уолша. Для натуральных q и N таких, что $1 \leq q \leq N$, обозначим через S_N^q семейство всех множеств $\sigma \subset \{1, \ldots, N\}$ с $|\sigma| = q$ и через ν нормированную считающую меру на S_N^q. Пусть для $\sigma \subset S_N^q$

$$U(\sigma) = \sup \left\{ \frac{\left\| \sum_{j=1}^{s} a_j W_j \right\|_\infty}{\left\| \sum_{j=1}^{N} a_j W_j \right\|_\infty}; \quad 1 \leq s \leq N, \quad \operatorname{supp}\left(\{a_j\}\right) \subset \sigma, \right\}.$$

Теорема 1. *Существует абсолютная постоянная $c > 0$ такая, что если $N = 2^r$ для некоторого натурального r и $1 \leq q \leq N/2$, то*

$$\nu \left\{ \sigma \in S_N^q : U(\sigma) \leq c \log\left(2 + \frac{q}{\log N}\right) \right\} < \frac{1}{N^2}.$$

Доказательство. В случае, когда q не очень велико по сравнению с $\log N$, можно найти такую постоянную $c > 0$, что

$$c \log\left(2 + \frac{q}{\log N}\right) < 1,$$

и следовательно, рассматриваемая в теореме мера равна нулю, так как $U(\sigma) \geq 1$ для любого множества σ. Поэтому ниже мы предполагаем, что N достаточно велико и $q \geq 20 \log N$.

Пусть $\delta = \frac{q}{N}$, отметим, что $0 < \delta \leq \frac{1}{2}$. Далее, пусть $\{\xi_i\}_{i=1}^N$ – набор независимых случайных величин, определенных на некотором вероятностном пространстве (Ω, Σ, μ), принимающих значения 0 или 1 со средним значением δ. Для $\omega \in \Omega$ положим

$$\sigma(\omega) = \{i;\ 1 \leq i \leq N,\ \xi_i(\omega) = 1\}.$$

Ниже мы покажем, что для некоторой постоянной $c > 0$

$$\mu\Big\{\omega \in \Omega;\ U(\sigma(\omega)) < c \log\Big(2 + \frac{q}{\log N}\Big)\Big\} \leq \frac{5}{N^3}. \qquad (*)$$

Тем самым мы докажем теорему 1, поскольку

$$\mu\{\omega \in \Omega;\ |\sigma(\omega)| = q = \delta N\} \geq \frac{B}{\sqrt{N}}$$

для некоторой постоянной $B > 0$, не зависящей от N и $\left(\frac{5}{N^3}\right)\Big/\left(\frac{B}{\sqrt{N}}\right) < \frac{1}{N^2}$ для достаточно больших N.

При доказательстве оценки $(*)$ нам потребуются вспомогательные леммы.

Лемма 1. *Пусть $b = (b_1, b_2, \dots, b_{2^r})$ – такая последовательность, что для $s = 1, 2, \dots, r-1$ и некоторого $\beta_0 > 0$ множество*

$$\Delta_s = \Big\{k;\ \frac{1}{2^{s+1}} < |b_k| \leq \frac{1}{2^s}\Big\}$$

имеет мощность $|\Delta_s| \geq \beta_0 2^s$. Тогда для любой последовательности $a = (a_1, a_2, \dots, a_{2^r})$ с $||a||_1 \leq \lambda$, при некотором $1 \leq \lambda \leq (r-2)\beta_0/8$ справедливо неравенство

$$||a - b||_2 \geq 2^{-4\lambda/\beta_0} \frac{\sqrt{\beta_0}}{8}.$$

Доказательство. Зафиксируем $a = (a_1, a_2, \dots, a_{2^r})$ с $\|a\|_1 \le \lambda$ и для каждого s положим $\lambda_s = \sum_{k\in\Delta_s} |a_k|$. Так как

$$\lambda \ge \sum_{s=1}^{(8\lambda/\beta_0)+1} \lambda_s \ge \frac{8\lambda}{\beta_0} \min_{1\le s\le(8\lambda/\beta_0)+1} \lambda_s,$$

мы можем найти натуральное $1 \le s_0 \le \frac{8\lambda}{\beta_0} + 1$ такое, что $\lambda_{s_0} \le \frac{\beta_0}{8}$. Положим

$$\Delta'_{s_0} = \left\{k \in \Delta_{s_0};\ |a_k| \ge \frac{1}{2^{s_0+2}}\right\}$$

и отметим, что

$$\frac{\beta_0}{8} \ge \sum_{k\in\Delta'_{s_0}} |a_k| \ge \frac{|\Delta'_{s_0}|}{2^{s_0+2}},$$

т.е.

$$|\Delta'_{s_0}| \le \frac{\beta_0 2^{s_0+2}}{8} = \frac{\beta_0 2^{s_0}}{2}.$$

Следовательно,

$$\|a-b\|_2^2 \ge \sum_{k\in\Delta_{s_0}} |a_k - b_k|^2 \ge \sum_{k\in\Delta_{s_0}\setminus\Delta'_{s_0}} \big(|b_k| - |a_k|\big)^2 \ge \frac{|\Delta_{s_0}\setminus\Delta'_{s_0}|}{2^{2s_0+4}}$$
$$\ge \frac{\beta_0 2^{s_0}}{2^{2s_0+5}} = \frac{\beta_0}{2^{s_0+5}} = \frac{\beta_0}{32}\cdot\frac{1}{2^{s_0}},$$

и мы получаем

$$\|a-b\|_2 \ge \sqrt{\frac{\beta_0}{32}}\cdot\frac{1}{2^{s_0/2}} \ge \frac{\sqrt{\beta_0}}{8}\frac{1}{2^{4\lambda/\beta_0}}.$$

Лемма 2. *Предположим, что $\{\varphi_i\}_{i=1}^m$ – набор элементов гильбертова пространства H такой, что для некоторого $0 < \varepsilon < 1$ и любого вектора $c = (c_1, c_2 \dots, c_m)$ справедливо неравенство*

$$(1-\varepsilon)\|c\|_2 \le \left\|\sum_{i=1}^m c_i\varphi_i\right\| \le (1+\varepsilon)\|c\|_2.$$

Тогда

$$(1-\varepsilon)^4\|c\|_2^2 \le \sum_{k=1}^m \left|\Big(\sum_{i=1}^m c_i\varphi_i, \varphi_k\Big)\right|^2 \le (1+\varepsilon)^4\|c\|_2^2$$

для того же $\varepsilon > 0$ и каждого $c \in l_2^m$.

Доказательство. Наше предположение влечет

$$(1-\varepsilon)^2\|c\|^2 \le \sum_{i,j=1}^{m} c_i c_j (\varphi_i, \varphi_j) \le (1+\varepsilon)^2 \|c\|_2^2$$

для любого $c \in l_2^m$, т.е. матрица $G = \{(\varphi_i, \varphi_j)\}_{i,j=1}^m$ положительно определена и ее собственные значения $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ удовлетворяют неравенствам.

$$(1-\varepsilon)^2 \le \lambda_i \le (1+\varepsilon)^2; \qquad 1 \le i \le m.$$

Следовательно, собственные значения матрицы $GG^* = G^2$ лежат между $(1-\varepsilon)^4$ и $(1+\varepsilon)^4$. В частности,

$$(1-\varepsilon)^4\|c\|_2^2 \le (c, GG^*c) \le (1+\varepsilon)^4\|c\|_2^2$$

для любого $c \in l_2^m$. Это завершает доказательство, поскольку

$$\sum_{k=1}^{m} \Big|\Big(\sum_{i=1}^{m} c_i\varphi_i, \varphi_k\Big)\Big|^2 = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i,j=1}^{m} c_i c_j (\varphi_i, \varphi_k)(\varphi_j, \varphi_k) = (c, GG^*c).$$

Лемма 3. *В предположениях леммы 2 для элемента $f = \sum_{i=1}^m c_i\varphi_i$ справедливо неравенство*

$$\Big\|f - \sum_{i=1}^{m}(f, \varphi_i)\varphi_i\Big\| \le 3\sqrt{\varepsilon}\Big(\sum_{i=1}^{m} |(f, \varphi_i)|^2\Big)^{1/2},$$

если ε достаточно мало.

Доказательство. В силу леммы 2

$$\begin{aligned} 0 &\le \Big\|f - \sum_{i=1}^{m}(f,\varphi_i)\varphi_i\Big\|^2 = \|f\|^2 + \Big\|\sum_{i=1}^{m}(f,\varphi_i)\varphi_i\Big\|^2 - 2\sum_{i=1}^{m}|(f,\varphi_i)|^2 \\ &\le \|f\|^2 - (1-\varepsilon)^4\|c\|_2^2 + (2\varepsilon+\varepsilon^2)\sum_{i=1}^{m}|(f,\varphi_i)|^2 \\ &\le \big[(1+\varepsilon)^2 - (1-\varepsilon)^4 + (2\varepsilon+\varepsilon^2)(1+\varepsilon)^4\big]\|c\|_2^2. \end{aligned}$$

Поэтому, если ε достаточно мало, мы получаем

$$0 \le \Big\|f - \sum_{i=1}^{m}(f,\varphi_i)\varphi_i\Big\|^2 \le 8.5\,\varepsilon\|c\|_2^2 \le 9\,\varepsilon\sum_{i=1}^{m}|(f,\varphi_i)|^2.$$

Лемма 4. *Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что как только задан набор $\{\varphi_i\}_{i=1}^m$ элементов гильбертова пространства H, удовлетворяющий условию*

$$(1-\varepsilon)\|c\|_2 \le \Big\|\sum_{i=1}^m c_i\varphi_i\Big\|_H \le (1+\varepsilon)\|c\|_2,$$

для некоторого $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ и любого $c = (c_1,\dots,c_m) \in l_2^m$, то для любого $z \in H$ и любого вектора $c = (c_1,\dots,c_m)$

$$\Big\|z - \sum_{i=1}^m c_i\varphi_i\Big\| \ge (1-\varepsilon)\Big[\sum_{i=1}^m \big((z,\varphi_i) - c_i\big)^2\Big]^{1/2} - 3\sqrt{\varepsilon}\Big(\sum_{i=1}^m |(z,\varphi_i)|^2\Big)^{1/2}.$$

Доказательство. Пусть R – ортогональная проекция из H на $L = [\varphi_i]_{i=1}^m$. Тогда

$$\Big\|z - \sum_{i=1}^m c_i\varphi_i\Big\| \ge \Big\|Rz - \sum_{i=1}^m c_i\varphi_i\Big\|$$

и $(Rz,\varphi_i) = (z,\varphi_i)$; $1 \le i \le m$, т.е. достаточно установить искомое неравенство для Rz вместо z. Другими словами, мы можем предполагать, что $z \in L$. Тогда в силу нашего предположения и леммы 3 мы находим:

$$\begin{aligned}\Big\|z - \sum_{i=1}^m c_i\varphi_i\Big\| &\ge \Big\|\sum_{i=1}^m \big[(z,\varphi_i) - c_i\big]\varphi_i\Big\| - \Big\|z - \sum_{i=1}^m (z,\varphi_i)\varphi_i\Big\| \\ &\ge (1-\varepsilon)\Big[\sum_{i=1}^m \big((z,\varphi_i) - c_i\big)^2\Big]^{1/2} - 3\sqrt{\varepsilon}\Big(\sum_{i=1}^m |(f,\varphi_i)|^2\Big)^{1/2}.\end{aligned}$$

Для того, чтобы оценить $U(\sigma)$, нам потребуется

Лемма 5. *Пусть $\{W_j\}_{j=1}^{N=2^r}$ – первые N функций Уолша, определенные на $[0,1]$, и пусть $\sigma \subset \{1,2,\dots,N\}$. Тогда*

$$U(\sigma) = \max_{\substack{1\le p\le N \\ z\in Z(\sigma)}} |(v_p,z)|,$$

где $v_p = (\overbrace{1,1,\dots,1}^{p \text{ раз}},0,\dots,0)$ *и*

$$Z(\sigma) = \Big\{z = (z_1,\dots,z_N) \in \mathbb{R}^N,\ \operatorname{supp}(z) \subset \sigma,\ \Big\|\sum_{i=1}^N z_i W_i\Big\|_\infty \le 1\Big\}.$$

Доказательство. Зафиксируем $1 \le p \le N$ и $z \in Z(\sigma)$. Тогда для любого $0 < \tau < \frac{1}{N}$

$$|(v_p, z)| = \Big|\sum_{j=1}^{p} z_j\Big| = \Big|\sum_{j=1}^{p} z_j W_j(\tau)\Big| \le \Big\|\sum_{j=1}^{p} z_j W_j\Big\|_\infty \le U(\sigma).$$

Для того, чтобы доказать обратное неравенство зафиксируем функцию $f = \sum_{k=1}^{N} \widehat{f}(k) W_k$ такую, что $\operatorname{supp}\{\widehat{f}(k)\} \subset \sigma$, $\|f\|_\infty = 1$ и для некоторых $1 \le p \le N$ и $0 \le \tau_0 \le 1$ имеет место равенство

$$U(\sigma) = \sum_{k=1}^{p} \widehat{f}(k) W_k(\tau_0).$$

Положим

$$g(x) = \sum_{k=1}^{N} \widehat{f}(k) W_k(\tau_0) W_k(x), \qquad x \in [0,1],$$

и отметим, что $g(x) = \sum_{k=1}^{N} \widehat{f}(k) W_k(x \oplus_d \tau_0)$, где $x \oplus_d \tau_0$ обозначает сложение x и τ_0 по модулю 2 (см. [7, с. 135]). Поэтому

$$g(x) = f(x \oplus_d x_0)$$

и, значит, $\|g\|_\infty \le 1$. Следовательно, $z^0 = \big\{\widehat{f}(k) W_k(\tau_0)\big\}_{k=1}^{N} \in Z(\sigma)$ и, значит,

$$U(\sigma) = (v_p, z^0) \le \max_{\substack{1 \le p \le N \\ z \in Z(\sigma)}} |(v_p, z)|.$$

Лемма 6. *Для $N = 2^r$ рассмотрим дискретную систему Уолша $W_i = (w_{i,j})_{j=1}^{N}$, $1 \le i \le n$, как набор векторов, нормированных в l_∞^N, т.е. таких, что $|w_{i,j}| = 1$ для всех $1 \le i, j, \le N$. Пусть при этом $\{W^{(j)}\}_{j=1}^{N}$ – столбцы матрицы Уолша. Тогда для любого $\sigma \subset \{1, 2, \dots, N\}$*

$$U(\sigma) = \inf\Big\{\lambda;\ \forall\, 1 \le p \le N,\ R_\sigma v_p = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j R_\sigma W^{(j)} \quad \text{с} \quad \sum_{j=1}^{N} |\lambda_j| \le \lambda\Big\},$$

где $v_p = (\overbrace{1, \dots, 1}^{p\ \text{раз}}, 0, \dots, 0)$ и R_σ – оператор ортогонального проектирования на $[e_i]_{i \in \sigma}$ ($\{e_i\}_{i=1}^{N}$ обозначает канонический базис в $\mathbb{R}^N$).

Доказательство. Покажем сначала, что для любого $1 \le p \le N$ и $\sigma \subset \{1, 2, \ldots, N\}$

$$R_\sigma v_p \in \operatorname{conv}\{\pm U(\sigma) R_\sigma W^{(j)};\ 1 \le j \le N\}.$$

В самом деле, если бы это включение нарушалось при некотором $1 \le p \le N$, то стандартное рассуждение, основанное на свойстве отделимости выпуклых множеств, влекло бы существование вектора $b = (b_1, \ldots, b_N)$ такого, что $(b, R_\sigma v_p) > 1$, но $|(b, U(\sigma) R_\sigma W^{(j)})| \le 1$ для всех $1 \le j \le N$. Положим тогда $z = U(\sigma) R_\sigma b$ и отметим, что для рассматриваемого p $|(z, v_p)| > U(\sigma)$. С другой стороны, $|(z, W^{(j)})| \le 1$ для всех $1 \le j \le N$, т.е. $z \in Z(\sigma)$, что в силу леммы 5 влечет $|(z, v_p)| \le U(\sigma)$, и мы приходим к противоречию.

Как немедленное следствие, мы имеем

$$R_\sigma v_p = \sum_{j=1}^{N} \mu_j U(\sigma) R_\sigma W^{(j)},$$

для любого $1 \le p \le N$ с $\sum_{j=1}^{N} |\mu_j| \le 1$. Следовательно,

$$\inf\Big\{\lambda;\ \forall\, 1 \le p \le N,\ R_\sigma v_p = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j R_\sigma W^{(j)} \ \text{ с } \ \sum_{j=1}^{N} |\lambda_j| \le \lambda\Big\} \le U(\sigma).$$

С другой стороны, если для некоторого $1 \le p \le N$ мы имеем, что

$$R_\sigma v_p = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j R_\sigma W^{(j)}$$

с $\sum_{j=1}^{N} |\lambda_j| \le \lambda$, то для $z \in Z(\sigma)$

$$|(v_p, z)| = |(R_\sigma v_p, z)| = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j (z, W^{(j)}) \le \lambda \max_{1 \le j \le N} |(z, W^{(j)})| \le \lambda,$$

т.е. $U(\sigma) \le \lambda$.

Для полноты изложения приведем также следующий известный вероятностный результат.

Лемма 7. *Пусть $0 < \delta \leq \frac{1}{2}$ и пусть $\{\xi_k\}_{k=1}^N$ – набор независимых случайных величин, определенных на некотором вероятностном пространстве (Ω, Σ, μ), принимающих значения 0 или 1 со средним значением δ. Тогда для любых $|a_k| \leq 1$, $1 \leq k \leq N$, и $0 \leq \gamma \leq \delta N$ мы имеем*

$$\mu\Big\{\omega \in \Omega; \quad \Big|\sum_{k=1}^{N} a_k\big(\xi_k(\omega) - \delta\big)\Big| \geq \gamma\Big\} \leq 2e^{-\gamma^2/(4\delta N)}.$$

Доказательство. Зафиксируем $1 \leq k \leq N$ и положим $X_k(\omega) = \xi_k(\omega) - \delta$, отметим, что для $0 \leq t \leq 1$

$$\begin{aligned}\int_\Omega e^{tX_k(\omega)}\,d\mu(\omega) &= \int_\Omega \Big[1 + tX_k(\omega) + \sum_{j=2}^{\infty}\frac{t^j}{j!}X_k^j(\omega)\Big]\,d\mu(\omega) \\ &\leq 1 + t^2\int_\Omega X_k^2(\omega)\,d\mu(\omega)\sum_{j=2}^{\infty}\frac{1}{j!} \\ &= 1 + t^2\delta(1-\delta)(e-2) \leq e^{t^2\delta(1-\delta)}.\end{aligned}$$

В частности,

$$\int e^{ta_kX_k(\omega)}\,d\mu(\omega) \leq e^{t^2\delta(1-\delta)},$$

при условии, что $0 \leq t \leq 1$. Следовательно, по теореме 15 из [8, с. 52] мы получаем, что

$$\mu\Big\{\omega \in \Omega; \sum_{k=1}^{N} a_k\big(\xi_k(\omega) - \delta\big) \geq \gamma\Big\} \leq e^{-\gamma^2/(4\delta(1-\delta)N)} \leq e^{-\gamma^2/(4\delta N)}$$

при условии, что $0 \leq \gamma \leq 2\delta(1-\delta)N$ и, в частности, если $0 \leq \gamma \leq \delta N$. Лемма 7 доказана.

Прежде чем доказывать теорему 1 отметим, что для $1 \leq j \leq N$

$$|(v_p, W^{(j)})| \leq \frac{N}{j} \tag{i}$$

для каждого $1 \leq p \leq N$ и

$$\text{если}\quad p = [N/3] \quad\text{и}\quad b_j = \frac{(v_p, W^{(j)})}{N}, \quad 1 \leq j \leq N, \tag{ii}$$

то мощность множества

$$\Delta_s = \left\{k;\ \frac{1}{2^{s+1}} < |b_k| \le \frac{1}{2^s}\right\}$$

удовлетворяет неравенству $|\Delta_s| \ge \frac{2^s}{4}$ для всех $0 < s < \log_2 N$.

Для $\sigma \subset \{1, 2, \ldots, N\}$ и $p = [N/3]$ из леммы 6 следует, что

$$R_\sigma v_p = \sum_{j=1}^{N} \nu_j^p(\sigma) R_\sigma W^{(j)},$$

где $\sum_{j=1}^{N} |\nu^p(\sigma)| \le U(\sigma)$.

Для фиксированных δ и N таких, что $\delta N \ge 20 \log N$, пусть

$$m = \left[\left(\frac{\delta N}{20 \log N}\right)^{3/8}\right],$$

отметим при этом, что

$$\begin{aligned}
&\Big\| R_\sigma v_p - \sum_{j=1}^{m} \nu_j^p(\sigma) R_\sigma W^{(j)} \Big\|_2^2 \\
&\quad = \Big(\sum_{h=m+1}^{N} \nu_h(\sigma) R_\sigma W^{(h)}, R_\sigma v_p - \sum_{j=1}^{m} \nu_j^p(\sigma) R_\sigma W^{(j)} \Big) \\
&\quad \le U(\sigma) \max_{m<h\le N} |(v_p, R_\sigma W^{(h)})| + U(\sigma)^2 \max_{\substack{1\le j\le m \\ m<h\le N}} |(W^{(h)}, R_\sigma W^{(j)})|.
\end{aligned}$$

Чтобы оценить сверху правую часть последнего неравенства, мы сначала применим лемму 7 при фиксированном h, $m < h \le N$, и $0 \le \gamma \le \delta N$ и получим

$$\mu\Big\{\omega \in \Omega;\ \Big|\sum_{i=1}^{p} w_{i,h}(\xi_i(\omega) - \delta)\Big| \ge \gamma\Big\} \le 2e^{-\gamma^2/(4\delta N)},$$

где $\{\xi_i\}_{i=1}^{N}$, как обычно, $(0,1)$-значные независимые случайные величины со средним δ для некоторого $0 < \delta < 1$, определенные на некотором вероятностном пространстве (Ω, Σ, μ). Следовательно,

$$\mu\Big\{\omega \in \Omega,\ \max_{m<h\le N} \Big|\sum_{i=1}^{p} w_{i,h}(\xi_i(\omega) - \delta)\Big| \ge \gamma\Big\} \le 2Ne^{-\gamma^2/(4\delta N)},$$

а потому с вероятностью $\geq 1 - 2Ne^{-\gamma^2/(4\delta N)}$ мы имеем

$$\max_{m<h\leq N} |(R_\sigma v_p, W^{(h)}) - \delta(v_p, W^{(h)})| \leq \gamma.$$

В силу сделанного выше замечания (i)

$$\max_{m<h\leq N} |(R_\sigma v_p, W^{(h)}| \leq \frac{\delta N}{m} + \gamma$$

с вероятностью $\geq 1 - 2Ne^{-\gamma^2/(4\delta N)}$.

Положим $\gamma = \sqrt{20\delta N \log N}$ и отметим, что имеет место неравенство $0 < \gamma \leq \delta N$. Тогда для $\varepsilon = \left(\frac{\delta N}{20 \log N}\right)^{-1/16}$ справедливо равенство

$$m = \left[\varepsilon^2 \sqrt{\frac{\delta N}{20 \log N}}\right],$$

используя которое, мы без труда выводим, что

$$\max_{m<h\leq N} |(R_\sigma v_p, W^{(h)}| \leq \left(1 + \frac{1}{\varepsilon^2}\right)\sqrt{20\delta N \log N} \leq \frac{2}{\varepsilon^2}\sqrt{20\delta N \log N}$$

с вероятностью $\geq 1 - \frac{2}{N^4}$.

Аналогичный подсчет, использующий лемму 7 и ортогональность матрицы Уолша, показывает, что

$$\mu\left\{\omega \in \Omega;\ \left|\sum_{i=1}^{N} w_{i,h} w_{i,j} \xi_i(\omega)\right| \geq \gamma\right\} \leq 2e^{-\gamma^2/(4\delta N)}$$

для любых $0 < \gamma \leq \delta N$, $m < h \leq N$ и $1 \leq j \leq m$. Поэтому с вероятностью $\geq 1 - \frac{2}{N^3}$ мы имеем:

$$\max_{\substack{1\leq j\leq m \\ m<h\leq N}} |(W^{(h)}, R_\sigma W^{(j)})| \leq \sqrt{20\delta N \log N}.$$

В итоге получаем, что

$$\begin{aligned}
&\left\|R_\sigma v_p - \sum_{j=1}^{m} \nu_j^p(\sigma) R_\sigma W^{(j)}\right\|_2^2 \\
&\leq \frac{2}{\varepsilon^2}\, U(\sigma)\sqrt{20\delta N \log N} + U(\sigma)^2\sqrt{20\delta N \log N} \\
&\leq \left(\frac{2}{\varepsilon^2} + U(\sigma)\right) U(\sigma)\sqrt{20\delta N \log N}
\end{aligned}$$

с вероятностью $\geq 1 - \frac{4}{N^3}$.

Чтобы оценить снизу левую часть последнего неравенства, положим

$$\varphi_j = \frac{R_\sigma W^{(j)}}{\sqrt{\delta N}}; \qquad 1 \leq j \leq m,$$

и отметим, что, рассуждая как выше, мы получим

$$\mu\Big\{\omega \in \Omega;\ \Big|\sum_{i=1}^{N} w_{i,j} w_{i,l}(\xi_i(\omega) - \delta)\Big| \geq \gamma\Big\} \leq 2e^{-\gamma^2/(4\delta N)}$$

для любых $1 \leq j, l \leq m$. Это влечет, что с вероятностью $\geq 1 - \frac{2}{N^3}$ имеет место неравенство

$$\big|(R_\sigma W^{(j)}, R_\sigma W^{(l)}) - \delta(W^{(j)}, W^{(l)})\big| \leq \sqrt{20\delta N \log N}, \qquad 1 \leq j, l \leq m.$$

Следовательно, с той же вероятностью $\geq 1 - \frac{2}{N^3}$

$$\Big|(\varphi_j, \varphi_l) - \Big(\frac{W^{(j)}}{\sqrt{N}}, \frac{W^{(l)}}{\sqrt{N}}\Big)\Big| \leq \sqrt{\frac{20 \log N}{\delta N}}, \qquad 1 \leq j, l \leq m.$$

Поэтому для каждого вектора $c = (c_j)_{j=1}^m$

$$\begin{aligned}
&\Big|\Big\|\sum_{j=1}^{m} c_j \varphi_j\Big\|^2 - \|c\|_2^2\Big| \\
&\quad \leq \sum_{j,l=1}^{m} |c_j||c_l|\Big|(\varphi_j, \varphi_l) - \Big(\frac{W^{(j)}}{\sqrt{N}}, \frac{W^{(l)}}{\sqrt{N}}\Big)\Big| \\
&\quad \leq \Big(\sum_{j=1}^{m} |c_j|\Big)^2 \sqrt{\frac{20 \log N}{\delta N}} \leq m\|c\|_2^2 \sqrt{\frac{20 \log N}{\delta N}} \leq \varepsilon^2 \|c\|_2^2,
\end{aligned}$$

т.е.

$$(1 - \varepsilon)\|c\|_2 \leq \Big\|\sum_{j=1}^{m} c_j \varphi_j\Big\| \leq (1 + \varepsilon)\|c\|_2.$$

Следовательно, пользуясь леммой 4, примененной в случае, когда $z = \frac{R_\sigma v_p}{\sqrt{\delta N}}$ и $c_j = \nu_j^p(\sigma)$, $1 \leq j \leq m$, мы получим, что

$$\begin{aligned}
&\Big\|\frac{R_\sigma v_p}{\sqrt{\delta N}} - \sum_{j=1}^{m} \nu_j^p(\sigma) \frac{R_\sigma W^{(j)}}{\sqrt{\delta N}}\Big\|_2 \\
&\quad \geq (1 - \varepsilon)\Big(\sum_{j=1}^{m} \Big|\Big(\frac{R_\sigma v_p}{\sqrt{\delta N}}, \frac{W^{(j)}}{\sqrt{\delta N}}\Big) - \nu_j^p(\sigma)\Big|^2\Big)^{1/2} \\
&\quad - 3\sqrt{\varepsilon}\Big(\sum_{j=1}^{m} \Big|\Big(\frac{R_\sigma v_p}{\sqrt{\delta N}}, \frac{R_\sigma W^{(j)}}{\sqrt{\delta N}}\Big)\Big|^2\Big)^{1/2},
\end{aligned}$$

т.е.

$$\begin{aligned}
&\Big\|R_\sigma v_p - \sum_{j=1}^{m} \nu_j^p(\sigma) R_\sigma W^{(j)}\Big\|_2 \\
&\geq (1-\varepsilon)\sqrt{\delta N}\Big(\sum_{j=1}^{m}\Big|\Big(\frac{R_\sigma v_p}{\sqrt{\delta N}}, \frac{W^{(j)}}{\sqrt{\delta N}}\Big) - \nu_j^p(\sigma)\Big|^2\Big)^{1/2} \\
&\quad - \frac{3\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\delta N}}\Big(\sum_{j=1}^{m}\Big|(R_\sigma v_p, R_\sigma W^{(j)})\Big|^2\Big)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Выше мы ввели предположение, что $q(\log N)^{-1} = \delta N(\log N)^{-1}$ настолько велико (или, что эквивалентно, ε настолько мало), что мы можем использовать лемму 4. Повторяя вычисления, сделанные ранее, мы заключаем, что

$$\big|(v_p, R_\sigma W^{(j)}) - \delta(v_p, W^{(j)})\big| \leq \sqrt{20\delta N \log N}, \qquad 1 \leq j \leq m,$$

с вероятностью $\geq 1 - \frac{2}{N^4}$. Это влечет, что

$$\begin{aligned}
&\Big\|R_\sigma v_p - \sum_{j=1}^{m} \nu_j^p(\sigma) R_\sigma W^{(j)}\Big\| \\
&\geq (1-\varepsilon)\sqrt{\delta N}\Big(\sum_{j=1}^{m}\Big|\Big(\frac{v_p}{\sqrt{N}}, \frac{W^{(j)}}{\sqrt{N}}\Big) - \nu_j^p(\sigma)\Big|^2\Big)^{1/2} \\
&\quad - (1-\varepsilon)\sqrt{\delta N} m^{1/2}\sqrt{\frac{20\log N}{\delta N}} - \frac{3\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\delta N}}\delta\Big(\sum_{j=1}^{m}|(v_p, W^{(j)})|^2\Big)^{1/2} \\
&\quad - \frac{3\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\delta N}} m^{1/2}\sqrt{20\delta N\log N} \\
&\geq (1-\varepsilon)\sqrt{\delta N}\Big(\sum_{j=1}^{m}\Big|\Big(\frac{v_p}{\sqrt{N}}, \frac{W^{(j)}}{\sqrt{N}}\Big) - \nu_j^P(\sigma)\Big|^2\Big)^{1/2} \\
&\quad - 3\sqrt{\frac{\varepsilon\delta}{N}}\Big(\sum_{j=1}^{m}|(v_p, W^{(j)})|^2\Big)^{1/2} \\
&\quad - (1-\varepsilon)\varepsilon(20\delta N\log N)^{1/4} - 3\varepsilon^{3/2}(20\delta N\log N)^{1/4} \\
&\geq (1-\varepsilon)\sqrt{\delta N}\Big(\sum_{j=1}^{m}\Big|\Big(\frac{v_p}{\sqrt{N}}, \frac{W^{(j)}}{\sqrt{N}}\Big) - \nu_j^p(\sigma)\Big|^2\Big)^{1/2} \\
&\quad - 3\sqrt{\frac{\varepsilon\delta}{N}}\Big(\sum_{j=1}^{m}|(v_p, W^{(j)})|^2\Big)^{1/2} - 4\varepsilon(20\delta N\log N)^{1/4}.
\end{aligned}$$

В силу сделанного выше замечания (ii) и леммы 1 справедливо неравенство

$$\Big(\sum_{j=1}^{m}\Big|\Big(\frac{v_p}{\sqrt{N}},\frac{W^{(j)}}{\sqrt{N}}\Big)-\nu_j^p(\sigma)\Big|^2\Big)^{1/2}\geq\frac{1}{16}\Big[\frac{1}{2^{16U(\sigma)}}-\frac{1}{N^{1/3}}\Big]$$

при условии $U(\sigma)\leq\frac{r-2}{32}$, что позволяет использовать лемму 1. Если же $U(\sigma)>\frac{r-2}{32}$, то последнее неравенство очевидно выполняется, так как правая часть становится отрицательной. Кроме того, в силу неравенства Бесселя

$$\Big(\sum_{j=1}^{m}|(v_p,W^{(j)})|^2\Big)^{1/2}\leq N.$$

Следовательно, с вероятностью $\geq 1-\frac{5}{N^3}$

$$\begin{aligned}&\Big(\frac{2}{\varepsilon^2}+U(\sigma)\Big)(20\delta N\log N)^{1/4}\\&\geq\Big(\frac{2}{\varepsilon^2}+U(\sigma)\Big)^{1/2}U(\sigma)^{1/2}(20\delta N\log N)^{1/4}\\&\geq\frac{(1-\varepsilon)(\delta N)^{1/2}}{16\cdot 2^{16U(\sigma)}}-\frac{(1-\varepsilon)(\delta N)^{1/2}}{16N^{1/3}}-3(\varepsilon\delta N)^{1/2}-4\varepsilon(20\delta N\log N)^{1/4}\\&\geq\frac{(\delta N)^{1/2}}{30\cdot 2^{16U(\sigma)}}-4(\varepsilon\delta N)^{1/2}.\end{aligned}$$

Чтобы завершить доказательство оценки (*) и, следовательно, теоремы 1 достаточно проверить, что неравенства, приведенные выше, влекут

$$U(\sigma)\geq c\log\Big(\frac{\delta N}{\log N}\Big)$$

для некоторой абсолютной положительной постоянной c. В самом деле, если $\frac{1}{30\cdot 2^{16U(\sigma)}}\leq 10\varepsilon^{1/2}$, то $30\cdot 2^{16U(\sigma)}\geq\frac{1}{10}\Big(\frac{\delta N}{20\log N}\Big)^{1/32}$, т.е.

$$\log 30+16U(\sigma)\log 2\geq\frac{1}{32}\log\Big(\frac{\delta N}{20\log N}\Big)-\log 10.$$

Следовательно,

$$U(\sigma)\geq c\log\Big(\frac{\delta N}{\log N}\Big),$$

где $c>0$ – абсолютная постоянная. С другой стороны, если $\frac{1}{30 2^{16U(\sigma)}}\geq 10\varepsilon^{1/2}$, то, так как

$$\frac{2}{\varepsilon^2}=2\Big(\frac{\delta N}{20\log N}\Big)^{1/8}\gg U(\sigma),$$

мы получаем, что

$$3 \cdot \left(\frac{\delta N}{20 \log N}\right)^{1/8} (20\delta N \log N)^{1/4} \geq \frac{(\delta N)^{1/2}}{60 \cdot 2^{16U(\sigma)}}$$

или

$$180 \cdot 2^{16U(\sigma)} \geq \left(\frac{\delta N}{20 \log N}\right)^{1/8},$$

т.е. снова

$$U(\sigma) \geq c \log \left(\frac{\delta N}{\log N}\right).$$

Рассмотрим теперь случай тригонометрической системы. Для величины $U(\sigma)$, определенной в начале статьи, имеет место аналогичная теореме 1 оценка.

Теорема 2. *Существует абсолютная постоянная $b > 0$ такая, что при $N = 2, 3, \ldots$ и $1 \leq q \leq N$ справедливо неравенство*

$$\nu\left\{\sigma \in S^q_{2N+1};\ U(\{\sigma - N - 1\}) \leq b \log\left(2 + \frac{q}{\log N}\right)\right\} < \frac{1}{N^2}.$$

Мы использовали выше обычное обозначение: множество

$$\sigma - N - 1 = \{k - N - 1; \quad k \in \sigma\}$$

– подмножество множества

$$\{-N, -N+1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, N-1, N\}.$$

Доказательство теоремы 2. Первый шаг в доказательстве теоремы 2 состоит в рассмотрении для данного N дискретной тригонометрической системы

$$\varphi_k = \left\{\varphi_{k,j} = e^{2\pi i k j/(2N+1)}\right\}_{j=0}^{2N} \in \mathbb{C}^{2N+1}, \qquad -N \leq k \leq N.$$

Как и в предыдущем случае, мы обозначаем через $\varphi^{(j)}$, $0 \leq j \leq 2N$, столбцы матрицы $\{\varphi_{k,j}\}_{k=-N, j=0}^{N \quad 2N}$.

Повторяя доказательство теоремы 1 для системы $\{\varphi_k\}_{k=-N}^{N}$ вместо системы Уолша $\{W_k\}_{k=1}^{N}$ и для $p = [N/2]$ вместо $p = [N/3]$, мы найдем, что $\nu(A) \geq 1 - \frac{1}{N^2}$, где A – множество всех подмножеств $\sigma \subset S^q_{2N+1}$, для которых можно найти последовательность $a^\sigma = (a_k^\sigma)_{k=-N}^N$ с носителем в $\sigma - N - 1$ такую, что

$$\Big\| \sum_{k=-N}^{N} a_k^\sigma \varphi_k \Big\|_\infty = 1 \quad \text{и} \quad \Big\| \sum_{k=-p}^{p} a_k^\sigma \varphi_k \Big\|_\infty \geq c \log\Big(2 + \frac{q}{\log N}\Big),$$

где $c > 0$ – абсолютная постоянная. Мы рассматриваем при этом, в отличие от системы Уолша, симметричные векторы

$$v_p = (\overbrace{0, 0, \dots, 0}^{N-p \text{ раз}}, \overbrace{1, 1, \dots, 1}^{2p+1 \text{ раз}}, \overbrace{0, 0, \dots, 0}^{N-p \text{ раз}}) \in \mathbb{R}^{2n+1},$$

которые, очевидно, удовлетворяют соотношению

$$(v_p, \varphi^{(j)}) = D_p(2\pi j/(2N+1))$$

для всех $0 \leq j \leq 2N$, где D_p обозначает обычное комплексное ядро Дирихле.

Для того, чтобы вывести теорему 2 из дискретного случая, разобранного выше, для любого $\sigma \in A$ рассмотрим многочлен $t^\sigma(x) = \sum_{k=-N}^{N} a_k^\sigma e^{2\pi i k x}$ и его средние Валле Пуссена:

$$T^\sigma(x) = \frac{1}{p} \sum_{n=p}^{2p-1} \sum_{k=-n}^{n} a_k^\sigma e^{2\pi i k x}.$$

Тогда, используя стандартные свойства ядра Валле Пуссена, мы без труда получим, что $\|T^\sigma\|_\infty \leq 10$. С другой стороны,

$$\Big\| \sum_{k=-p}^{p} \widehat{T}^\sigma(n) e^{2\pi i k x} \Big\|_\infty = \Big\| \sum_{k=-p}^{p} a_k^\sigma e^{2\pi i k x} \Big\|_\infty$$
$$\geq \Big\| \sum_{k=-p}^{p} a_k^\sigma \varphi_k \Big\|_\infty \geq c \log\Big(2 + \frac{q}{\log N}\Big).$$

Следовательно, для любого $\sigma \in A$

$$U(\sigma) \geq \frac{c}{10} \log\Big(2 + \frac{q}{\log N}\Big).$$

Замечание. Подход, использованный в доказательстве теоремы 1, может быть применен и для других ортогональных систем. В частности, тот же результат без изменения доказательства устанавливается для каждой перестановки дискретной тригонометрической системы.

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН,
Москва, Россия;
Institut of Mathematics, the Hebrew University,
Jerusalem, Israel

Поступило
24.05.93

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Ульянов П.Л. Некоторые вопросы теории ортогональных и биортогональных рядов // Изв. АН АзССР. Сер. Физ.-техн., матем. наук. 1965. №6. С. 11–13.

[2] Осколков К.И. О спектрах равномерной сходимости // ДАН СССР. 1986. Т. 228. С. 54–58.

[3] Архипов Г.И., Осколков К.И. О специальных тригонометрических рядах и их приложениях // Матем. сб. 1987. Т. 134. №2.

[4] Figa-Talamanca A. An example in the theory of lacunary Fourier series // Boll. Un. Mat. Ital. 1970. V. 4. №3. P. 375–378.

[5] Pedemonte L. Sets of uniform convergence // Colloq. Math. 1975. V. 33. P. 123–132.

[6] Кашин Б.С. О некоторых свойствах пространства тригонометрических полиномов с равномерной нормой // Труды МИАН. 1980. Т. 145. С. 111–116.

[7] Kashin B.S., Saakyan A.A. Orthogonal Series, AMS translations of Math. monographs, v. 75. Providence, 1989.

[8] Petrov V.V. Sums of Independent Random Variables. Berlin: Springer, 1975.