Математические заметки

том 56 выпуск 6 декабрь 1994

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ОЦЕНКА СНИЗУ МАКСИМУМА СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Б. С. Кашин, Л. А. Цафрири

Ниже мы рассматриваем случайные процессы вида

$$\sum_{j=1}^{n} \xi_j(t)\varphi_j(x),$$

где $\{\xi_j\}$ – набор независимых случайных величин, заданных на вероятностном пространстве $(T, \mathscr{T}, \tau)$, а $\{\varphi_j\}_{j=1}^{n}$ – набор функций из $L^2(X, \Sigma, \mu)$, где (X, Σ, μ) – другое вероятностное пространство.

Многие задачи анализа и теории вероятностей приводят к необходимости оценки математического ожидания

$$\mathsf{E}\biggl(\biggl\|\sum_{j=1}^{n} \xi_j(t)\varphi_j(x)\biggr\|_{L^\infty(\mu)}\biggr). \tag{1}$$

Общеизвестным примером такого результата является оценка

$$\mathsf{E}\biggl(\biggl\|\sum_{j=1}^{n} r_j(t)e^{2\pi ijx}\biggr\|_{L^\infty}\biggr) \leqslant C(n\log n)^{1/2}, \qquad n = 2, 3, \dots, \tag{2}$$

($r_j(t)$ – функции Радемахера), впервые сформулированная в явном виде Салемом и Зигмундом [1] и нашедшая очень большое число применений. В [1] установлена и точность неравенства (2), т.е. показано, что

$$\mathsf{E}\biggl(\biggl\|\sum_{j=1}^{n} r_j(t)e^{2\pi ijx}\biggr\|_{L^\infty}\biggr) \geqslant c(n\log n)^{1/2}; \qquad c > 0, \quad n = 1, 2, \dots. \tag{3}$$

Участие первого автора в выполнении этой работы поддержано Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 93-01-00240).

Позднее (см. [2]) аналогичные вопросы исследовались в теории гауссовских процессов при нахождении необходимых и достаточных условий непрерывности для п.в. t траекторий процесса

$$\sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j(t) \cdot a_j \cdot e^{2\pi i j x},$$

где $a_j \in R,\ \{\gamma_j(t)\}_{j=1}^{\infty}$ – последовательность независимых гауссовских случайных величин с $\mathsf{E}(\gamma_j) = 0,\ \mathsf{E}(\gamma_j^2) = 1,\ j = 1, 2, \dots$.

В работах Маркуса, Пизье, Таланграна и др. исследовалось поведение величин (1) в случае, когда $\{\varphi_j(x)\},\ x \in V,$ – система характеров локально-компактной абелевой группы G и V – компактная окрестность нуля в G. Эти исследования подробно изложены в книгах [3], [4]. Подход к оценкам снизу, использованный в [3], [4], основан на сравнении (1) с величиной

$$\mathsf{E}\biggl(\Bigl\|\sum_{j=1}^{n} \gamma_j(t)\varphi_j(x)\Bigr\|_{L^\infty(\mu)}\biggr) \tag{4}$$

и использовании затем для оценки (4) результатов типа известной леммы Слепьяна. Реализация этой схемы не является тривиальной даже в достаточно простых ситуациях.

В настоящей заметке применяется другой подход к оценкам снизу величин (1), использующий точные (с оценками остаточного члена) варианты центральной предельной теоремы для сумм независимых векторов в R^2. Этот подход представляет собой в определенном смысле возвращение к методу работы Салема и Зигмунда [1] (хотя прямо их рассуждения в рассматриваемом нами случае не применимы). Возможности метода не ограничиваются доказанной ниже теоремой и могут быть использованы при исследовании более общих процессов.

Теорема. *Для каждого M найдется постоянная $c_M > 0$ такая, что для любой системы функций $\{\varphi_j\}_{j=1}^n \subset L^2(X,\mu)$ с*

$$\|\varphi_j\|_{L^2(\mu)} = 1, \quad \|\varphi_j\|_{L^3(\mu)} \leqslant M, \qquad 1 \leqslant j \leqslant n,$$

и такой, что

$$\Bigl\|\sum_{j=1}^{n} a_j\varphi_j\Bigr\|_{L^2(\mu)} \leqslant M\biggl(\sum_{j=1}^{n} a_j^2\biggr)^{1/2}, \qquad \{a_j\}_{j=1}^n \in R^n,$$

и для любой системы независимых случайных величин $\{\xi_j\}_{j=1}^n$ с

$$\mathsf{E}(\xi_j) = 0, \quad \mathsf{E}(\xi_j^2) = 1, \quad \bigl\{\mathsf{E}(|\xi_j|^3)\bigr\}^{1/3} \leqslant M, \qquad 1 \leqslant j \leqslant n,$$

справедливо неравенство

$$\mathsf{E}\left(\Big\|\sum_{j=1}^n \xi_j\varphi_j(x)\Big\|_{L^\infty(\mu)}\right) \geqslant c_M(n\log n)^{1/2}.$$

При доказательстве теоремы оцениваем снизу величину (1) через

$$\mathsf{E}\left(\max_{1\leqslant\nu\leqslant n}\Big|\sum_{j=1}^n \xi_j\varphi_j(x_\nu)\Big|\right), \tag{5}$$

где $\{x_\nu\}_{\nu=1}^n \subset X$ – такой набор точек, что при $\nu = 1, 2, \ldots, n$

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \varphi_j^2(x_\nu) > c_1(M), \qquad \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \big|\varphi_j(x_\nu)\big|^3 \leqslant C_2(M)$$

и

$$\frac{1}{n^2}\sum_{\nu,\nu'=1}^n\left(\sum_{j=1}^n \varphi_j(x_\nu)\varphi_j(x_{\nu'})\right)^2 \leqslant C_3(M)\cdot n \tag{6}$$

(существование набора $\{x_\nu\}$ со свойством (6) непосредственно вытекает из условий теоремы). Затем, полагая для $\rho > 0$

$$E_\nu^\rho = \left\{t\in T\colon \sum_{j=1}^n \xi_j(t)\varphi_j(x_\nu) > \rho(n\log n)^{1/2}\right\}$$

мы с использованием точных версий центральной предельной теоремы для сумм одномерных и двумерных независимых векторов проверяем, что для малых ρ, $0 < \rho \leqslant \rho(M)$

$$C_M\cdot\big\|\chi_\rho\big\|_{L^1} \geqslant \big\|\chi_\rho\big\|_{L^2}, \qquad \chi_\rho = \sum_{\nu=1}^n \chi_{E_\nu^\rho}(t), \tag{7}$$

где использовано обычное обозначение:

$$\chi_E(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t\in E,\\ 0, & \text{если } t\notin E.\end{cases}$$

Из (7) непосредственно вытекает завершающая доказательство теоремы оценка $\tau\left(\bigcup_{\nu=1}^n E_\nu^\rho\right) \geqslant c_4(M) > 0$.

Отметим, что сравнение норм L^1 и L^2 (см. (7)) характерно и для метода работы [1] и применялось недавно также С. Конягиным [5] при оценке минимума на единичной окружности модуля случайного тригонометрического многочлена.

Процесс выбора точек $\{x_\nu\}$ со свойством (6) устанавливает некоторую связь использованного нами подхода с теоремами об ограничении оператора на координатное подпространство, рассмотренными в [6]–[9]. Пользуясь случаем, приведем два результата, дополняющие исследования из [6]–[9]. Мы рассматриваем линейные операторы $A\colon l_2^n \to l_2^n$ ранга q, $1 \leqslant q \leqslant n$, $n = 1, 2, \dots$. Через $\|A\|_{2\to 2}$ обозначим норму оператора A. Если $\{e_j\}_{j=1}^n$ – стандартный базис в l_2^n и $\sigma \subset \{1, \dots, n\}$, то через R_σ обозначаем ортопроектор на подпространство

$$L_\sigma = \Big\{x \in l_2^n : x = \sum_{j\in\sigma} x_j e_j\Big\}.$$

Предложение 1. *Существует абсолютная постоянная C такая, что для любых $n = 1, 2, \dots$, $1/n \leqslant \delta \leqslant 1$, и произвольного оператора A ранга $\leqslant q$ в l_2^n найдутся множества $\sigma' \subset \{1, \dots, n\}$, $\sigma'' \subset \{1, \dots, n\}$ с $|\sigma'| \geqslant \delta n$, $|\sigma''| \geqslant \delta n$ и такие, что*

$$\big\|R_{\sigma'} A R_{\sigma''}\big\|_{2\to 2} \leqslant C\Big(\delta + \Big(\frac{\delta q}{n}\Big)^{1/2}\Big)\|A\|.$$

Предложение 2. *Существует абсолютная постоянная C_1 такая, что для любых $n = 1, 2, \dots$, $1/n \leqslant \delta \leqslant 1$, и произвольного оператора A ранга $\leqslant q$ в l_2^n с*

$$\langle Ae_j, e_j\rangle = 0, \qquad 1 \leqslant j \leqslant n,$$

найдется множество $\sigma \subset \{1, \dots, n\}$ с $|\sigma| \geqslant \delta n$ такое, что

$$\big\|R_\sigma A R_\sigma\big\|_{2\to 2} \leqslant C_1\Big(\delta + \Big(\frac{\delta q}{n}\Big)^{1/2}\Big)\|A\|.$$

Математический институт
им. В. А. Стеклова РАН,
Москва, Россия;
Institute of Mathematics,
the Hebrew University,
Jerusalem, Israel

Поступило
20.10.94

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Salem R., Zygmund A. // Acta Math. 1954. V. 91. P. 245–301. **2**. Fernique X. // Lect. Notes in Math. 1975. V. 480. P. 1–96. **3**. Marcus M., Pisier G. Random Fourier series with applications to harmonic analysis. Princeton Univ. press, 1981. **4**. Ledoux M., Talagrand M. Probability in Banach spaces. Springer, 1991. **5**. Конягин С. В. // Матем. заметки. 1994. Т. 56. № 3. С. 80–101. **6**. Кашин Б. С. // Известия АН Арм.ССР. 1980. Т. 15. С. 379–394. **7**. Bourgain J., Tzafriri L. // Israel J. Math. 1987. V. 57. P. 137–224. **8**. Bourgain J., Tzafriri L. // J. reine angew. Math. 1991. V. 420. P. 1–43. **9**. Лунин А. А. // Матем. заметки. 1989. Т. 45. № 3. С. 94–100.