Математические заметки

том 56 выпуск 5 ноябрь 1994

О НАИЛУЧШИХ m-ЧЛЕННЫХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ И ЭНТРОПИИ МНОЖЕСТВ В ПРОСТРАНСТВЕ L^1

Б. С. Кашин, В. Н. Темляков

В работе при помощи результатов о геометрических свойствах конечномерных выпуклых тел исследуются аппроксимационные характеристики множеств, лежащих в пространствах $L^1(\mathbb{R}^d)$, $L^p(\mathbb{R}^d)$, $p > 1$. Работа разбита на два параграфа. В §1 для достаточно широкого класса систем $\Phi = \{\varphi_n(x)\}$ даются оценки снизу наилучших приближений функций из соболевских классов всевозможными полиномами вида

$$\sum_{i=1}^{m} a_{n_i}\varphi_{n_i}(x), \qquad 1 \leqslant n_1 < n_2 < \dots < n_m,$$

с коэффициентами a_{n_i} и индексами n_i, зависящими, вообще говоря, от приближаемой функции.

В §2 установлены оценки снизу ε-энтропии, поперечников и наилучших m-членных тригонометрических приближений классов функций многих переменных с ограниченной смешанной производной или разностью. Развитый здесь метод позволяет, например, получить точную по порядку оценку снизу для энтропийных чисел класса W_p^r в пространстве L^q при $p = \infty$, $q = 1$ и четных r. Как известно, в этой проблематике получение точных результатов в "крайних случаях", т.е. когда параметры p и q принимают значения 1 или ∞ представляет, обычно, наиболее сложную задачу.

§1. О наилучших m-членных приближениях

Пусть D – ограниченная область в $\mathbb{R}^d$ $(d = 1, 2, \dots)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ и $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – система функций из пространства $L^p(D)$. Для $f \in L^p(D)$ положим

$$\sigma_m(f, \Phi)_p = \inf_{\substack{\{n_i\}=\Lambda\subset\mathbb{Z}^+, |\Lambda|=m,\\ \{c_i\}\in\mathbb{R}^m}} \left\| f(x) - \sum_{i=1}^{m} c_i\varphi_{n_i}(x)\right\|_{L^p(D)} \tag{1}$$

(через $|\Lambda|$ мы обозначаем число элементов в конечном множестве Λ). Далее, если $K \subset L^p(D)$ – некоторый класс функций, то пусть

$$\sigma_m(K,\Phi)_p = \sup_{f\in K} \sigma_m(f,\Phi). \tag{2}$$

Величину (1) мы называем наилучшим m-членным приближением функции f по системе Φ в пространстве $L^p(D)$. Отличие этой величины от обычного наилучшего приближения

$$E_m(f,\Phi) = \inf_{\varphi\in\Phi(N)} \|f-\varphi\|_{L^p(D)},$$

(где $\Phi(N) = \left\{\sum\limits_{i=1}^{m} c_i\varphi_i(x)\right\}$ – пространство полиномов порядка $\leqslant m$ по системе Φ) состоит в возможности выбора спектра приближающего полинома, т.е. набора Λ (см. (1)), в зависимости от приближаемой функции f. Ясно, что всегда $\sigma(f,\Phi)_p \leqslant E_m(f,\Phi)_p$. Еще в семидесятые годы было выяснено, что для многих естественных функциональных компактов K и систем Φ величины (2) убывают при $m\to\infty$ существенно быстрее, чем

$$E_m(K,\Phi) = \sup_{f\in K} E_m(f,\Phi)$$

(см. [1], [2]). В последнее время интерес к изучению m-членных приближений возрос, в частности, в связи с их приложениями в вопросах "images processing". При этом по мнению ряда авторов (см. [3], [4]) особый интерес для приложений имеет случай, когда $p=1$. Именно этот случай и рассматривается ниже. При некоторых предположениях относительно свойств системы Φ мы установим, в частности, оценку снизу величины (2) при $p=1$ и

$$K = \operatorname{Lip}\alpha = \{f : \|f\|_\infty \leqslant 1,\ |f(x)-f(y)| \leqslant |x-y|^\alpha,\ 0\leqslant x,y\leqslant 1\},$$

$0 < \alpha \leqslant 1$, из которой вытекает, что в этом случае использование m-членных приближений не имеет существенных преимуществ по сравнению с обычными приближениями. Отметим сразу же, что рассмотрение величин (1), (2) имеет смысл в случае, когда система Φ обладает некоторым свойством "минимальности" (иначе возможна ситуация, когда функции $\{\varphi_n\}$ образуют плотное множество на сфере в $L^p(D)$ и уже $\sigma_1(f,\Phi) = 0$ для любой $f \in L^p(D)$). Обычным свойством такого типа является ортогональность системы Φ. Как показано в [5] при рассмотрении приближений в $L^2(D)$ ортогональности системы Φ достаточно для получения нетривиальных нижних оценок величин $\sigma_m(K,\Phi)$, зависящих от геометрических свойств функционального класса K. В [5] установлено, например, что для любой ортонормированной системы Φ

$$\sigma_m(\operatorname{Lip}\alpha, \Phi)_2 \geqslant cm^{-\alpha}, \qquad c > 0, \qquad m = 1, 2, \dots .$$

Ситуация меняется при переходе к приближениям в $L^1(D)$. Это становится ясным после рассмотрения следующего утверждения (доказательство которого приводится в конце параграфа).

Предложение 1. *Существует полная в $L^2(0,1)$ ортонормированная система $\Phi = \{\varphi_n\}$ такая, что множество $A(\Phi) = \{\lambda\varphi_n,\ \lambda > 0,$ $n = 1, 2, \dots\}$ плотно в $L^1(0,1)$ и, следовательно, $\sigma_1(f, \Phi)_1 = 0$ для любой функции $f \in L^1(0,1)$.*

Итак, для получения нетривиальных оценок снизу для $\sigma_m(K, \Phi)$ следует ограничить класс рассматриваемых систем Φ. Мы будем предполагать, что система $\Phi = \{\varphi_n\}$ удовлетворяет следующим двум условиям:

I) Существуют положительные постоянные K_1, K_2, K_3 такие, что для каждого $N = 1, 2, \dots$ найдется конечное множество $\Omega_N \subset D$ такое, что $|\Omega_N| \leqslant K_1 \cdot N$ и для любой функции $\varphi \in \Phi(N)$ и любого p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, справедливы неравенства

$$K_2\biggl(\frac{1}{|\Omega_N|}\sum_{x\in\Omega_N}|\varphi(x)|^p\biggr)^{1/p} \leqslant \|\varphi\|_p \leqslant K_3\biggl(\frac{1}{|\Omega_N|}\sum_{x\in\Omega_N}|\varphi(x)|^p\biggr)^{1/p} \qquad (3)$$

II) Существуют постоянные K_4 и K_5 такие, что для любых $N = 1, 2, \dots,$ $m = 1, 2, \dots, p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, и любой функции $\varphi \in \Phi(N)$ справедливо неравенство

$$\sigma_m\bigl(\varphi, \{\varphi_n\}_{n=1}^{K_4N}\bigr) \leqslant K_5\sigma_m(\varphi, \Phi) \qquad (4)$$

Отметим, что условиям I), II) удовлетворяют классические ортонормированные системы: тригонометрическая, Хаара, Уолша, Франклина, а также различные системы “wavelets”.

Системы, обладающие свойством (3) при $p = \infty$ (понимаемом как эквивалентность величин $\|\varphi\|_p$ и $\sup_{x\in\Omega_N}|\varphi(x)|$) были названы в [6] квазиматричными системами. Условия типа I) естественно возникают во многих задачах теории функций. Для тригонометрической системы выполнение условия I) было установлено Марцинкевичем (см. [7]). Что касается условия II), то для системы линейно независимых функций Φ оно выполняется всякий раз, когда имеет место условие

II$'$) Для каждого $n = 1, 2, \dots$ найдется мультипликатор $\Lambda_N = \{\lambda_{N,n}\}$ (т.е. линейный оператор, определяемый на полиномах по системе Φ

соотношениями $\Lambda_N(\varphi_n) = \lambda_n\varphi_n$, $n = 1, 2, \dots$) такой, что $\lambda_{N,n} = 1$, $n \leqslant N$, $\lambda_{N,n} = 0$, $n > K_4 N$, и

$$\|\Lambda_N(\varphi)\|_p \leqslant K_5\|\varphi\|_p, \qquad 1 \leqslant p \leqslant \infty,$$

для любого полинома по системе Φ.

Для $p \in [1, \infty]$ и $N = 1, 2, \dots$ положим

$$\Phi(N)_p = \{f \in \Phi(N) : \|f\|_{L^p(D)} \leqslant 1\}.$$

Справедлива

Лемма 1. *Пусть система линейно независимых функций Φ удовлетворяет условиям* I) *и* II). *Тогда существуют постоянные $\gamma > 0$ и $c > 0$ такие, что при $n = 1, 2, \dots$ и $m < \gamma n$*

$$\sigma_m(\Phi(n)_\infty, \Phi)_1 \geqslant c. \tag{4}$$

Доказательство. Пользуясь условиями I), II) и свойством линейной независимости функций системы Φ, сведем задачу об оценке левой части в (4) к соответствующей задаче в конечномерном пространстве $\mathbb{R}^M$. Ниже через B_p^M будем обозначать единичный шар в пространстве ℓ_p^M, а через $B_{p,r}^M(x)$ – множество $x + r \cdot B_p^M$. Введем дискретный аналог величин (1), (2). Пусть $U = \{u_i\}_{i=1}^n$ – набор векторов пространства $\mathbb{R}^M$. Положим при $m \leqslant n$

$$\sigma_m(x, U)_1 = \inf_{\{c_i\},\{k_i\}} \left\| x - \sum_{i=1}^m c_i u_{k_i} \right\|_{\ell_1^M}, \tag{5}$$

$$\sigma_m(G, U)_1 = \sup_{x \in G} \sigma_m(x, U)_1, \tag{6}$$

где в (5) нижняя грань берется по всем m-элементным подмножествам $\{k_i\}_{i=1}^m$ набора $\{1, \dots, n\}$ и всем коэффициентам $\{c_i\}$.

Условие II) показывает, что для доказательства леммы 1 достаточно установить неравенство

$$\sigma_m(\Phi(n)_\infty, \{\varphi_i\}_{i=1}^{K_4 n})_1 > c' > 0, \tag{7}$$

в предположении, что $m \leqslant \gamma n$.

Для данного n пусть P – оператор ограничения функции φ на конечное множество $\Omega_{K_4 n} = \{x_i\}$ (см. I)):

$$P(\varphi) = \{\varphi(x_i)\}_{i=1}^M \in \mathbb{R}^M,$$
$$M = |\Omega_{K_4 n}| \leqslant K_1 \cdot K_4 \cdot n.$$

Используя теперь условие I), мы видим, что (7) будет установлено, если показать, что для любого набора векторов $U = \{u_i\}_{i=1}^M \in \mathbb{R}^M$ при $m \leqslant n/2$

$$\sigma_m(P(n), U)_1 \geqslant cM > 0, \tag{8}$$

где $P(n) = \{P(\varphi),\ \varphi \in \Phi(n)_\infty\}$, а постоянная c зависит лишь от K_i, $1 \leqslant i \leqslant 5$.

В силу линейной независимости функций системы Φ и условия I) (при $p = \infty$) множество векторов $\{P(\varphi),\ \varphi \in \Phi(n)\}$ есть n-мерное подпространство в $\mathbb{R}^M$, а $P(n)$ содержит n-мерное сечение куба $K_3^{-1} B_\infty^M$. Таким образом, для доказательства леммы 1 достаточно показать, что справедлива

Лемма 2. *Пусть натуральные числа n и M связаны неравенствами: $\alpha M < n \leqslant M$. Тогда для $m \leqslant n/2$, любого n-мерного сечения G_n куба B_∞^M и любой системы векторов $U = \{u_i\} \subset \mathbb{R}^M$ справедливо неравенство*

$$\sigma_m(G_n, U)_1 \geqslant cM, \qquad c = c(\alpha) > 0.$$

С учетом известных оценок объема сечений куба (см. [8], а также [9], [10]) лемма 2 в свою очередь вытекает из следующего более общего результата:

Теорема 1. *Пусть натуральные числа n и M связаны неравенствами: $\alpha M \leqslant n \leqslant M$. Пусть в $\mathbb{R}^M$ задано семейство Ω систем векторов U^j, $j = 1, \dots, s$, $s \leqslant K^M$ (для каждого j $U^j = \{u_i^j\}_{i=1}^M \subset \mathbb{R}^M$). Пусть, наконец, $L_n \subset \mathbb{R}^M$ – n-мерное подпространство, $G \subset L_n \cap B_2^M$, и*

$$\mathrm{Vol}_n G \geqslant \beta^n \mathrm{Vol}_n B_2^n, \qquad \beta > 0.$$

Тогда для $m \leqslant n/2$ имеем

$$\rho_m \equiv \sup_{x \in G} \inf_j \sigma_m(x, U^j)_1 > cM^{1/2}, \qquad c = c(\alpha, \beta, K) > 0.$$

Замечание 1. Через $\mathrm{Vol}_n G$ мы обозначаем n-мерную меру Лебега (объем) множества $G \subset L \subset \mathbb{R}^M$, $\dim L = n$. Если G – n-мерное сечение куба B_∞^M, то, применяя теорему 1 и пользуясь включением $G \subset M^{1/2} \cdot (B_2^M \cap L)$ и оценкой (см. [8]) $\mathrm{Vol}_n G \geqslant 1 \geqslant c^n M^{n/2} \mathrm{Vol}\, B_2^n$, мы получаем утверждение леммы 2.

Замечание 2. Теорема 1 показывает, что в ее условиях, даже фиксируя достаточно широкий класс систем и выбирая в этом классе систему, по которой берется m-членное приближение, в зависимости от приближаемого элемента, мы не получим существенного улучшения аппроксимации по сравнению с тривиальным способом аппроксимации любого элемента из G нулевым элементом.

Замечание 3. В условиях теоремы 1 вместо систем векторов U^j, состоящих из M элементов можно рассмотреть системы векторов, состоящие из $b \cdot M$ элементов (b – фиксированная постоянная). Этот случай сводится к предыдущему, если вместо $U^j = \{u_i^j\}_{i=1}^{bM}$ рассмотреть все M-членные наборы из u_i^j как отдельные системы векторов. Тогда их число возрастет в $\leqslant [c(b)]^M$ раз, что повлияет лишь на величину константы K.

Доказательство теоремы 1. Ясно, что достаточно рассмотреть случай, когда $m = [n/2]$. Пусть $\rho = \rho_{[n/2]}$. Пусть также для данного j U_m^j обозначает множество всех подпространств X в $\mathbb{R}^m$, порожденных m элементами системы U^j:

$$U_m^j = \bigl\{X : X = \operatorname{span}\bigl(\{u_{i_k}^j\}_{k=1}^m\bigr)\bigr\}.$$

По определению числа ρ (см. формулировку теоремы 1) справедливо включение

$$G \subset \bigcup_{j=1}^{s} \bigcup_{X \subset U_m^j} (X + B_{1,\rho}^M).$$

Кроме того, по условию $G \subset L_n \cap B_2^M$. Таким образом,

$$G \subset \bigcup_{j=1}^{s} \bigcup_{X \subset U_m^j} \bigl\{(X + B_{1,\rho}^M) \cap L_n \cap B_2^n\bigr\}. \tag{9}$$

Для фиксированных j и X оценим n-мерный объем множества

$$H = (X + B_{1,\rho}^M) \cap L_n \cap B_2^M.$$

Ясно, что

$$H \subset F = P_{L_n}\bigl\{(X + B_{1,\rho}^M)\bigr\} \cap B_2^M, \tag{10}$$

где P_L – оператор ортогонального проектирования на подпространство $L \subset \mathbb{R}^M$. Далее,

$$P_{L_n}(X + B_{1,\rho}^M) = Q + B'_\rho,$$

где $Q = P_{L_n}(X)$, $B'_\rho = P_{L_n}(B^M_{1,\rho})$. При этом $l = \dim Q \leqslant \dim X \leqslant m$ и каждый элемент $x \in F$ представим в виде

$$x = q + y, \qquad q \in Q, \quad y \in B'_\rho, \quad \|x\|_2 \leqslant 1. \tag{11}$$

Пусть $Q^\perp$ – ортогональное дополнение подпространства Q до L_n. Отметим, что $\dim Q^\perp \geqslant n-m$. Представим элемент y в (11) в виде $y = y - P_{Q^\perp}y + P_{Q^\perp}y$. Тогда имеем

$$x = (q + y - P_{Q^\perp}(y)) + P_{Q^\perp}(y)$$

и

$$q + y - P_{Q^\perp}(y) \in Q \cap B^M_2, \qquad P_{Q^\perp}(y) \in P_{Q^\perp}(B'_\rho).$$

Следовательно, для n-мерного объема множества F справедливо неравенство

$$\operatorname{Vol}_n F \leqslant \operatorname{Vol}_l B^l_2 \cdot \operatorname{Vol}_{n-l} P_{Q^\perp}(B'_\rho). \tag{12}$$

Поскольку $Q^\perp \subset L_n$, из определения множества B'_ρ имеем

$$P_{Q^\perp}(B'_\rho) = P_{Q^\perp} P_{L_n}(B^M_{1,\rho}) = P_{Q^\perp}(B^M_{1,\rho}).$$

Воспользуемся следующей известной оценкой объема:

$$\operatorname{Vol}_r P_Y(B^M_1) \leqslant c^r_\gamma \cdot r^{-r}, \qquad Y \subset \mathbb{R}^M, \quad \dim Y = r \geqslant \gamma M \tag{13}$$

(неравенство (13) вытекает из известных оценок объемов многогранников с учетом того факта, что $P_Y(B^M_1)$ есть выпуклый многогранник, вписанный в r-мерный евклидов шар и имеющий $\leqslant 2M$ вершин (см. [11], [12]); отметим также, что (13) непосредственно вытекает и из простейшей оценки мощности покрытия октаэдра B^M_1 евклидовыми шарами: найдется абсолютная постоянная K и точки $x_1, \dots, x_k$ в $\mathbb{R}^M$ с $k \leqslant K^M$ такие, что

$$B^M_1 \subset \bigcup_{i=1}^{K^M} B^M_{2,M^{-1/2}}(x_i)$$

(см., например, [13, с. 56]).

Из соотношений (12) и (13) находим:

$$\operatorname{Vol}_n F \leqslant c^n l^{-l/2} \rho^{n-l} (n-l)^{-(n-l)}. \tag{14}$$

Условия теоремы 1, включение (9) и оценка (14) влекут следующие неравенства

$$(n-l)^{-n/2} < 2^{n/2} n^{-n/2} < (c')^n l^{-l/2} (n-l)^{-(n-l)} \rho^{n-l} \tag{15}$$

(мы учли также, что $l \leqslant n/2$). Сравнивая левую и правую части в (15) и учитывая, что функция y^y ограничена снизу положительной постоянной для $y > 0$, находим

$$\rho \geqslant c'' n^{1/2} \geqslant c M^{1/2}.$$

Теорема 1 доказана.

Замечание 4. Нетрудно видеть, что в формулировке и доказательстве теоремы 1 норму ℓ_1^M можно заменить на любую такую норму, заданную на $\mathbb{R}^M$ с единичным шаром B, что имеет место аналог неравенства (13):

$$\operatorname{Vol}_r(P_Y(B)) \leqslant c_\gamma^M \operatorname{Vol}_r(B_2^M \cdot M^{-1/2} \cap Y), \qquad \dim Y = r \geqslant \gamma M. \qquad (\star)$$

В свою очередь, последняя оценка справедлива, например, если евклидов шар $M^{-1/2} \cdot B_2^M$ есть эллипсоид максимального объема, вписанный в B и $\operatorname{Vol}(B) \leqslant C^M \cdot M^{-M/2} \cdot \operatorname{Vol}(B_2^M)$.

Приведем следствия теоремы 1 и леммы 1 для приближений функциональных классов. Начнем с одномерного случая.

Теорема 2. *Пусть система линейно независимых функций* Φ, *заданных на* $D = (0,1)$, *удовлетворяет условиям* I), II), *и, кроме того, при некотором* $r > 0$ *для системы* Φ *имеет место "неравенство Бернштейна": существует постоянная* $c = c(r)$ *такая, что для любого* $N = 1, 2, \dots$ *и* $\varphi \in \Phi(N)$

$$\|\varphi^{(r)}\|_\infty \leqslant c \cdot N^r \|\varphi\|_\infty \qquad (16)$$

(*для дробных* r *производная понимается в смысле Вейля*). *Тогда для класса*

$$W_\infty^r = \{f : \|f\|_\infty + \|f^{(r)}\|_\infty \leqslant 1\}$$

имеет место оценка снизу

$$\sigma_m(W_\infty^r, \Phi)_1 \geqslant c_1 \cdot m^{-r}, \qquad m = 1, 2, \dots . \qquad (17)$$

Доказательство. В силу неравенства (16) имеем:

$$\Phi(N)_\infty \subset c_2 n^r \cdot W_\infty^r. \qquad (18)$$

Пусть γ – постоянная из леммы 1. При данном m полагаем $n = [m/\gamma] + 1$ и применяем лемму 1. Из (4) и (18) вытекает искомая оценка (17).

В качестве следствия теоремы 2 получаем оценку снизу для наилучших m-членных тригонометрических приближений, установленную в [14]:

$$\sigma_m(W_\infty^r, \mathbb{T})_1 \geqslant c(r) m^{-r}, \qquad m = 1, 2, \dots .$$

В многомерном (d-мерном) случае справедлив следующий аналог теоремы 2.

Теорема 3. *Пусть система линейно независимых функций* Φ, *заданных на области* $D \subset \mathbb{R}^d$, *удовлетворяют условиям* I), II), *и, кроме того, для некоторого натурального* r *и любых* $N = 1, 2, \dots, \varphi \in \Phi(N)$ *и вектора* $l = (l_1, \dots, l_d)$ *с* $l_1 + \dots + l_d \leqslant r$, $l_i \geqslant 0$ *– целые, справедливы неравенства*

$$\|D^l \varphi\|_\infty \equiv \left\| \frac{\partial^{l_1+\dots+l_d}}{\partial x_1^{l_1} \dots \partial x_d^{l_d}} \right\|_\infty \leqslant c N^{r/d} \|\varphi\|_\infty.$$

Тогда для изотропного класса Соболева

$$SW_\infty^r = \left\{ f : \sum_{\|l\|_1 \leqslant r} \|D^l f\|_\infty \leqslant 1 \right\}$$

имеет место оценка снизу

$$\sigma_m(SW_\infty^r, \Phi)_1 \geqslant c_1 m^{-r/d}.$$

Доказательство этой теоремы повторяет доказательство теоремы 2.

Дадим теперь приложение теоремы 1. Пусть, как и раньше, D – ограниченная область в $\mathbb{R}^d$, M – натуральное число, $\{D_k\}_{k=1}^M$ – разбиение области D (с точностью до множества нулевой меры) на такие подобласти, что

$$\alpha \frac{|D|}{M} \leqslant |D_k| \leqslant \beta \frac{|D|}{M},$$

где $|E|$ обозначает меру Лебега множества E. Пусть, далее, $S^M = S(\{D_k\}_{k=1}^M)$ – пространство функций, постоянных на подобластях D_k, $k = 1, \dots, M$, и $S_\infty^M = \{f \in S^M : \|f\|_\infty \leqslant 1\}$ – единичный L^∞-шар в этом пространстве.

Теорема 4. *Пусть в* S^M *задано семейство систем функций* U^j, $U^j = \{u_i^j\}_{i=1}^M$, $j = 1, \dots, s$, $s \leqslant K^M$. *Тогда для всех* $m \leqslant M/2$ *имеем*

$$\sup_{f \in S_\infty^M} \inf_j \sigma(f, U^j)_1 \geqslant c, \qquad c = c(\alpha, \beta, K) > 0. \tag{19}$$

Доказательство. Пусть $\varphi \in S^M$ и $\varphi(x) = \varphi_k$ при $x \in D_k$, $k = 1, 2, \dots, M$. Тогда для $1 \leqslant p \leqslant \infty$

$$\|\varphi\|_p = \left(\sum_{k=1}^M |\varphi_k|^p |D_k| \right)^{1/p} \asymp \left(\frac{1}{M} \sum_{k=1}^M |\varphi_k|^p \right)^{1/p}. \tag{20}$$

Ставя в соответствие каждой функции $\varphi \in S^M$ вектор $(\varphi_1, \dots, \varphi_M) \in \mathbb{R}^M$, мы сведем задачу к "конечномерному случаю". При этом теорема 1 (с $n = M$, $G = B_\infty^M$) и соотношение (20) приводят к искомой оценке (19).

В заключение параграфа приведем

Доказательство предложения 1. Ясно, что заботиться о полноте системы Φ нет необходимости: неполная система Φ с плотным $A(\Phi)$ всегда может быть пополнена. Нетрудно также понять, что достаточно построить О.Н.С. Φ, для которой $A(\Phi)$ плотно по норме пространства L^1 на единичной сфере пространства $L^2(0,1)$.

Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ и для любой функции $f \in L^1(0,1)$ найдется $g \in L^2(0,1)$, $\|g\|_2 > 0$, с $\|f-g\|_{L_1} < \varepsilon/2$. Если, в свою очередь, для g найдутся n и $\lambda > 0$ такие, что

$$\left\|\frac{g}{\|g\|_2} - \lambda\varphi_n\right\|_{L^1} < \frac{\varepsilon}{2\|g\|_2}\,,$$

то $\big\|f - \lambda\|g\|_2\varphi_n\big\|_{L^1} < \varepsilon$.

Пусть $g_n(x)$, $\|g_n\|_2 = 1$, $n = 1,2,\dots,$ – последовательность функций, плотная по норме пространства $L^2(0,1)$ на единичной сфере в $L^2(0,1)$ и такая, что

$$g_n(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \big(0, \tfrac{1}{n+1}\big), \quad n = 1,2,\dots, \tag{21}$$

(существование такой последовательности устанавливается без труда). Положим

$$f_n(x) = g_n(x)\cdot 10^{-n}, \qquad n = 1,2,\dots. \tag{22}$$

Легко видеть, что

$$\big\|\{f_n\}_{n=1}^\infty\big\|_{(0,1)} \leqslant \tfrac{2}{10},$$

где для последовательности $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset L^2(\Omega)$

$$\big\|\{f_n\}_{n=1}^\infty\big\|_\Omega \equiv \sup_{\sum a_n^2 \leqslant 1}\left\|\sum_{n=1}^\infty a_n f_n\right\|_{L^2(\Omega)}.$$

Построим сначала вспомогательную систему $\{\psi_n\}$, функции которой будут отличаться от функций φ_n только множителем:

$$\varphi_n(x) = \rho_n\psi_n(x), \qquad \rho_n = \text{const}, \quad n = 1,2,\dots.$$

Функцию ψ_n определим сначала на интервале $\big(\frac{1}{n+1},1\big)$, положив

$$\psi_n(x) = f_n(x), \qquad n = 1,2,\dots, \quad x \in \big(\tfrac{1}{n+1},1\big).$$

Чтобы завершить определение функций ψ_n, достаточно при $N = 1, 2, \ldots$ определить набор $\{\psi_n\}_{n=1}^N$ на интервале $\left(\frac{1}{N+2}, \frac{1}{N+1}\right)$. При этом будем следить за тем, чтобы выполнялись соотношения

$$\frac{1}{10} \leqslant \left\|\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}\right\|_{\left(\frac{1}{s+2}, 1\right)} \leqslant \frac{2}{10} + \sum_{n=1}^{s} 10^{-n}, \qquad s = 1, 2, \ldots. \tag{23}$$

Фиксируем $N \geqslant 1$ и (считая, что функции ψ_n, $n = 1, 2, \ldots$, уже определены на интервале $\left(\frac{1}{N+1}, 1\right)$, и имеет место (23) для $s = N - 1$) определим набор $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^N$, $x \in \left(\frac{1}{N+2}, \frac{1}{N+1}\right)$.

В силу теоремы Шура (см. [15, с. 256]) мы можем это сделать таким образом, что функции $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^N$ станут попарно ортогональными на $\left(\frac{1}{N+2}, 1\right)$ и (см. (22), (23)) при $n = 1, 2, \ldots, N$

$$\begin{aligned}\|\psi_n\|_{L^2\left(\frac{1}{N+2}, 1\right)} &= \left\|\{\psi_n\}_{n=1}^N\right\|_{\left(\frac{1}{N+1}, 1\right)} \\ &\leqslant \left\|\{\psi_n\}_{n=1}^{N-1}\right\|_{\left(\frac{1}{N+1}, 1\right)} + \|\psi_N\|_{L^2(0,1)} \\ &\leqslant \frac{2}{10} + \sum_{n=1}^{N-1} 10^{-n} + 10^N.\end{aligned}$$

Тем самым неравенство (23) имеет место и при $s = N$. Кроме того, за счет соответствующего сжатия и умножения на константу (без изменения нормы в $L^2\left(\frac{1}{N+2}, \frac{1}{N+1}\right)$) можно обеспечить малость норм $\|\psi_n\|_{L^1\left(\frac{1}{N+2}, \frac{1}{N+1}\right)}$, $n = 1, 2, \ldots, N$ (см. также замечание на с. 258 в [15]). Точнее, можно считать, что

$$\|\psi_n\|_{L^1\left(\frac{1}{N+2}, \frac{1}{N+1}\right)} \leqslant \frac{\|f_n\|_{L^1}}{4^N}, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Проводя указанные построения для всех N, получим систему функций $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in (0, 1)$, таких, что

1) $\{\psi_n\}$ – ортогональная система;

2) $\frac{1}{10} \leqslant \|\psi_n\|_{L^2(0,1)} \leqslant \frac{4}{10}$, $n = 1, 2, \ldots$;

3) $\|f_n - \psi_n\|_{L^1} \leqslant \|f_n\|_{L^1} \cdot \sum\limits_{s=n}^{\infty} 4^{-s} \leqslant \frac{\|f\|_{L^1}}{3^n}$, $n = 1, 2, \ldots$.

Из последнего неравенства вытекает также, что

$$\|g_n - 10^n \psi_n\|_{L^1} \leqslant \frac{\|g_n\|_{L^1}}{3^n} \leqslant \frac{1}{3^n}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

а, значит, для любой функции $f \in L^2$, $\|f\|_{L^2(0,1)} = 1$, и любого $\varepsilon > 0$

$$\|f - 10^{n^*} \cdot \psi_{n^*}\|_{L^1} < \varepsilon, \tag{24}$$

если n^* достаточно велико и такого, что $\|f - g_{n^*}\|_{L^1} < \varepsilon/2$.

Положив, наконец, $\varphi_n(x) = \dfrac{\psi_n(x)}{\|\psi_n\|_{L^2(0,1)}}$, $n = 1, 2, \dots$, мы, в силу (24) (см. также (23)), получим ортонормированную систему $\Phi = \{\varphi_n\}$, для которой множество $A(\Phi)$ плотно по норме $L^1(0,1)$ на единичной сфере в $L^2(0,1)$. Предложение 1 доказано.

§ 2. Оценки снизу аппроксимационных характеристик классов функций с ограниченной смешанной производной или разностью

В этом параграфе получены точные по порядку оценки снизу наилучших m-членных тригонометрических приближений в метрике L^p классов функций с ограниченной смешанной разностью H^r_∞ или производной $W^r_{q,\alpha}$ при $1 < p \leqslant q < \infty$ (определение классов см. ниже). При этом задача о свойствах функционального класса сводится к дискретной (т.е. к задаче о свойствах множества в конечномерном пространстве) с использованием “квазиматричности” пространства тригонометрических полиномов с гармониками из параллелепипедов. Соответствующие оценки сверху для m-членных приближений известны и достигаются при приближении полиномами с гармониками из гиперболических крестов (см. [16]–[18], где изложена и история рассматриваемых в этом параграфе вопросов).

Вторая часть параграфа посвящена оценкам ε-энтропии и поперечников по Колмогорову класса $W^r_{\infty,\alpha}$. Применение результатов конечномерной геометрии затруднено здесь тем, что неизвестно является ли пространство полиномов с гармониками из гиперболического краста “квазиматричным”. Однако, в ряде случаев удается обойти эту трудность и получить новые точные по порядку результаты. Наш подход, помимо современных глубоких результатов из геометрии выпуклых множеств, существенно использует единственность эллипсоида максимального объема, вписанного в центрально-симметричное выпуклое тело.

Введем обозначения и определения, которыми будем пользоваться ниже. Через $f * g$ будем обозначать свертку функций f и g. В этом параграфе мы рассматриваем 2π-периодические по каждой переменной функции, для них

$$(f * g)(x) = (2\pi)^{-d} \int_{[0,2\pi]^d} f(x-y)g(y)\,dy.$$

Нам удобно следующее определение L^p-нормы:

$$\|f\|_p = \left((2\pi)^{-d}\int_{[0,2\pi]^d} |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}, \qquad 1 \leqslant p < \infty.$$

Для $r > 0$ определим ядра Бернулли

$$F_r(x,\alpha) = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} k^{-r}\cos\left(kx - \frac{\alpha\pi}{2}\right), \qquad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R};$$

$$F_r(x,\alpha) = \prod_{j=1}^{d} F_r(x_j,\alpha_j), \quad x = (x_1,\dots,x_d) \in \mathbb{R}^d, \ \alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_d) \in \mathbb{R}^d.$$

Обозначим I_α^r оператор свертки с ядром $F_r(x,\alpha)$: $I_\alpha^r\varphi = F_r(x,\alpha) * \varphi(x)$. При $r = 0$ можно корректно определить этот оператор на множестве тригонометрических полиномов. Нам будет удобно использовать обозначение $I_\alpha = I_\alpha^0$. Определим класс функций $W_{q,\alpha}^r$ следующим образом:

$$W_{q,\alpha}^r = \{f : f = I_\alpha^r\varphi, \ \|\varphi\|_q \leqslant 1\},$$

здесь $r > 0, 1 \leqslant q \leqslant \infty, \alpha \in \mathbb{R}^d$.

Определим классы H_∞^r. Пусть $\Delta_{t_j}^l$ обозначает оператор l-кратной разности с шагом t_j по переменной x_j, $j = 1,\dots,d$. Для набора натуральных чисел a из $[1,d]$ обозначим $\Delta_t^l(a) = \prod_{j\in a}\Delta_{t_j}^l$. Пусть $l = [r]+1$, где $[r]$ обозначает целую часть числа r. Определим класс H_∞^r следующим образом:

$$H_\infty^r = \left\{f : \text{ для всех } a \subset [1,d] \text{ имеем } \|\Delta_t^l(a)f\|_\infty \leqslant \prod_{j\in a}|t_j|^r\right\}.$$

Нам понадобятся следующие хорошо известные тригонометрические полиномы:

одномерное ядро Фейера

$$\mathcal{K}_n(x) = \sum_{|k|<n}\left(1 - \frac{|k|}{n}\right)e^{ikx};$$

многомерное ядро Фейера

$$\mathcal{K}_{\mathbb{N}}(x) = \prod_{j=1}^{d}\mathcal{K}_{N_j}(x_j), \qquad \mathbb{N} = (N_1,\dots,N_d), \quad x = (x_1,\dots,x_d);$$

одномерное ядро Валле-Пуссена

$$V_m(x) = 2\mathcal{K}_{2m}(x) - \mathcal{K}_m(x);$$

многомерное ядро Валле-Пуссена

$$V_{\mathbb{N}}(x) = \prod_{j=1}^{d} V_{N_j}(x_j).$$

Нам понадобятся также следующие ядра

$$\mathcal{A}_m(x) = V_{2^{m-1}}(x) - V_{2^{m-2}}(x), \qquad m \geqslant 2,$$
$$\mathcal{A}_1(x) = V_1(x) - 1, \qquad \mathcal{A}_0(x) \equiv 1, \qquad x \in \mathbb{R},$$

и для $s = (s_1, \dots, s_d)$, $s_j \geqslant 0$, $j = 1, \dots, d$, $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\mathcal{A}_s(x) = \prod_{j=1}^{d} \mathcal{A}_{s_j}(x_j).$$

Оператор свертки с ядром $\mathcal{A}_s(x)$ обозначим A_s.

Наряду с L^p-нормой будем рассматривать норму $B_{q,\theta}$, аналогичную норме пространства Бесова, которую определим для тригонометрических полиномов

$$\|t\|_{B_{q,\theta}} = \left(\sum_s \|A_s(t)\|_q^\theta\right)^{1/\theta}, \qquad 1 \leqslant q \leqslant \infty, \quad 1 \leqslant \theta \leqslant \infty,$$

с естественной модификацией определения для $\theta = \infty$.

Аналогично определим норму $\|f\|_{B_{q,\theta}}$ для функций $f \in L^1$ при условии сходимости ряда $\sum\limits_s \|A_s(f)\|_q^\theta$. Нормы $B_{q,\theta}$ играют ниже вспомогательную роль.

Определим пространства тригонометрических полиномов с гармониками из множеств, связанных с гиперболическими крестами. Пусть для $s = (s_1, \dots, s_d) \in \mathbb{Z}_+^d$

$$\rho(s) = \left\{k = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}_+^d : [2^{s_j - 1}] \leqslant k_j < 2^{s_j},\ j = 1, \dots, d\right\},$$
$$\bar{\rho}(s) = \left\{k \in \mathbb{Z}_+^d : 2^{s_j - 1} < k_j < 2^{s_j},\ j = 1, \dots, d\right\},$$
$$D_n = \bigcup_{\|s\|_1 = n} \rho(s), \qquad |D_n| \asymp 2^n \cdot n^{d-1},$$
$$\theta_n = \left\{s : \|s\|_1 = 2[n/2],\ s_j - \text{четно},\ s_j > 0,\ j = 1, \dots, d\right\},$$

и, наконец,

$$Y_n = \bigcup_{s \in \theta_n} \bar{\rho}(s).$$

Для множества $\Lambda \subset \mathbb{Z}_+^d$ обозначим

$$\mathcal{T}(\Lambda) = \Big\{ t : t(x) = \sum_{|k| \in \Lambda} c_k e^{i(k,x)} \Big\}.$$

Для нормированного пространства функций X $\mathcal{T}(\Lambda)_X$ обозначает единичный X-шар в пространстве $\mathcal{T}(\Lambda)$.

Докажем одно утверждение о приближении полиномов из $\mathcal{T}(Y_n)_{B_{\infty,\infty}}$, из которого выведем затем оценки снизу для приближений классов H_∞^r и $W_{q,\alpha}^r$ m-членными тригонометрическими полиномами.

Теорема 2.1. *Существует постоянная $c(d) > 0$ такая, что для любого набора функций $\Phi = \{\varphi_j\}_{j=1}^s \subset B_{1,1}$, $s \leqslant c'|Y_n|$, имеет место оценка*

$$\sigma_m(\mathcal{T}(Y_n)_{B_{\infty,\infty}}, \Phi)_{B_{1,1}} \geqslant c_1 n^{d-1}, \qquad c_1 = c_1(d, c') > 0,$$

для всех $m \leqslant c(d)|Y_n|$.

Доказательство. Нам удобно будет рассмотреть вместо $\mathcal{T}(Y_n)$ его подпространство размерности $\geqslant c(d)|Y_n|$. Опишем это подпространство. Пусть для $\mathbb{N} = (N_1, \dots, N_d)$ пространство действительных тригонометрических полиномов d переменных степени $\leqslant N_j$ по переменной x_j, $j = 1, \dots, d$, обозначается $RT(\mathbb{N})$. Рассмотрим

$$\mathcal{T}'(Y_n) = \Big\{ t : t(x) = \sum_{s \in \theta_n} e^{i(k^s, x)} t_s^1(x),\ t_s^1 \in RT(2^{s-2} - \mathbb{I}) \Big\},$$

где $k^s = (k_1^s, \dots, k_d^s)$, $k_j^s = 2^{s_j - 1} + 2^{s_j - 2}$, $s_j \geqslant 2$, $2^{s-2} = (2^{s_1 - 2}, \dots, 2^{s_d - 2})$, $\mathbb{I} = (1, \dots, 1)$. Ясно, что $\mathcal{T}'(Y_n)_{B_{\infty,\infty}} \subset \mathcal{T}(Y_n)_{B_{\infty,\infty}}$.

Дискретизацию в этом пространстве проведем следующим образом. Пусть

$$\Omega(\mathbb{N}) = \Big\{ x^k = \Big(\frac{2\pi k_1}{2N_1 + 1}, \dots, \frac{2\pi k_d}{2N_d + 1} \Big),\ k_j = 0, 1, \dots, 2N_j,\ j = 1, \dots, d \Big\}$$

Полиному $t \in \mathcal{T}'(Y_n)$ поставим в соответствие вектор

$$J(t) = \{ t_s^1(x^k) \}_{x^k \in \Omega(2^{s-2} - \mathbb{I}), s \in \theta_n}$$

из $\mathbb{R}^M$ с $M=\sum_{s\in\theta_n} v(2^{s-2}-\mathbb{I})$, где $v(\mathbb{N})=\prod_{j=1}^d(2N_j+1)$.

Обратно, вектору $y = \{y(x^k)\}_{x^k\in\Omega(2^{s-2}-\mathbb{I}),s\in\theta_n} \in \mathbb{R}^M$ поставим в соответствие полином

$$J^{-1}(y)=\sum_{s\in\theta_n} e^{i(k^s,x)}\{v(2^{s-2}-\mathbb{I})\}^{-1}\sum_{x^k\in\Omega(2^{s-2}-\mathbb{I})} y(x^k)D_{2^{s-2}-\mathbb{I}}(x-x_k),$$

где

$$D_{\mathbb{N}}(x)=\prod_{j=1}^d D_{N_j}(x_j)$$

– многомерное ядро Дирихле, нормированное так, что $D_{\mathbb{N}}(0)=v(\mathbb{N})$.

В пространстве $\mathbb{R}^M$ рассмотрим следующее множество

$$H=\coprod_{s\in\theta_n} S_\infty(2^{s-2}-\mathbb{I}),$$

где $\coprod$ – знак прямого произведения, а

$$S_\infty(\mathbb{N})=\Big\{y=\{y(x^k)\}_{x^k\in\Omega(\mathbb{N})}\in\mathbb{R}^{v(\mathbb{N})}:$$
$$\|t(x,y)\|_\infty\leqslant 1 \text{ и } t(x,y)=v(\mathbb{N})^{-1}\sum_{x^k\in\Omega(\mathbb{N})} y(x^k)D_{\mathbb{N}}(x-x^k)\Big\}.$$

Известно (см. [18], лемма 1.1), что

$$\mathrm{Vol}(S_\infty(\mathbb{N}))\geqslant c(d)^{-v(\mathbb{N})},$$

и, следовательно,

$$\mathrm{Vol}\,H\geqslant\prod_{s\in\theta_n} c(d)^{-v(2^{s-2}-\mathbb{I})}\geqslant c(d)^{-|Y_n|}.$$

Нам понадобится следующий оператор K^n, отображающий L^1 в $\mathcal{T}(Y_n)$. Рассмотрим полином

$$\mathcal{K}^n(x)=\sum_{s\in\theta_n} e^{i(k^s,x)}\mathcal{K}_{2^{s-2}}(x)$$

и оператор K^n свертки с ядром $\mathcal{K}^n(x)$. Понятно, что область значений этого оператора лежит в $\mathcal{T}(Y_n)$. Кроме того, этот оператор ограничен как оператор из $B_{1,1}$ в $B_{1,1}$. В самом деле, имеем

$$\|A_\mu(K^n f)\|_1 = \|K^n A_\mu(f)\|_1 = \Bigl\| \sum_{\mu-\mathbb{I}\leqslant s\leqslant\mu} e^{i(k^s,x)}\mathcal{K}_{2^{s-2}} * A_\mu(f) \Bigr\|_1 \leqslant c(d)\|A_\mu(f)\|_1.$$

Откуда вытекает
$$\|K^n(f)\|_{B_{1,1}} \leqslant c(d)\|f\|_{B_{1,1}}.$$

Далее, оператор JK^nJ^{-1} отображает множество H в множество H', которое по-прежнему будет выпуклым и центрально-симметричным с оценкой объема
$$\operatorname{Vol} H' \geqslant c(d)^{-|Y_n|}. \tag{2.2}$$

Поясним соотношение (2.2). Рассмотрим образ множества $S_\infty(2^{s-2}-\mathbb{I})$ при действии оператора JK^nJ^{-1}. Сначала отметим, что действие оператора K^n легко описывается в терминах коэффициентов Фурье полиномов t^1_s. Именно, для

$$t(x) = \sum_{s\in\theta_n} e^{i(k^s,x)} t^1_s(x)$$

имеем
$$\widehat{K^n t}(k) = \widehat{\mathcal{K}}_{2^{s-2}}(k-k^s)\hat{t}^1_s(k-k^s), \qquad k\in\bar\rho(s).$$

Рассмотрим оператор, ставящий в соответствие набору коэффициентов Фурье полинома $t\in RT(\mathbb{N})$ (по синусам и косинусам) вектор

$$\{v(\mathbb{N})^{-1/2} t(x^k)\}_{x^k\in\Omega(\mathbb{N})}.$$

Этот оператор является ортогональным оператором в $\mathbb{R}^{v(\mathbb{N})}$. Отметим, кроме того, что
$$\prod_{k\in\bar\rho(s)} \widehat{\mathcal{K}}_{2^{s-2}}(k-k^s) \geqslant c(d)^{|\bar\rho(s)|}. \tag{2.3}$$

Соотношение (2.3) и предыдущие замечания влекут оценку (2.2).

Ясно, что $H'\subset B^{|Y_n|}_\infty \subset |Y_n|^{1/2}B^{|Y_n|}_2$.

Функции $K^n f$ имеют следующий вид

$$K^n f = t = \sum_{s\in\theta_n} e^{i(k^s,x)} t_s(x), \qquad t_s\in T(2^{s-2}-\mathbb{I}).$$

Определим на функциях такого вида оператор R

$$R(t) = \sum_{s\in\theta_n} e^{i(k^s,x)} t_s^1(x), \qquad t_s^1 = \operatorname{Re} t_s.$$

Понятно, что оператор R ограничен как оператор из $B_{1,1}$ в $B_{1,1}$, точнее

$$\|R\|_{B_{1,1}\to B_{1,1}} \leqslant 1.$$

Рассмотрим сейчас вместо набора $\Phi = \{\varphi_j\}_{j=1}^s$ набор функций $\Psi = \{\psi_j\}_{j=1}^s$, $\psi_j = RK^n\varphi_j$. Тогда $\psi_j \in \mathcal{T}'(Y_n)$ и для любых $t \in \mathcal{T}'(Y_n)$ и $\varphi \in \operatorname{span}\bigl(\{\varphi_j\}_{j=1}^s\bigr)$ имеем для $\psi = RK^n\varphi$

$$\|K^n t - \psi\|_{B_{1,1}} = \|RK^n(t-\varphi)\|_{B_{1,1}} \leqslant c(d)\|t-\varphi\|_{B_{1,1}}. \tag{2.4}$$

Рассмотрим систему функций $U = \{u_j\}_{j=1}^s$, $u_j = J\psi_j \in \mathbb{R}^M$. Применяя замечание 3 к теореме 1.1, из оценки объема (2.2) получим неравенство

$$\sigma_m(H', U)_1 \geqslant c_2(d, c')|Y_n|. \tag{2.5}$$

Далее, для произвольного $t \in \mathcal{T}'(Y_n)$ имеем

$$e^{i(k^s,x)} t_s^1(x) = \sum_{s\leqslant\mu\leqslant s+\mathbb{I}} A_\mu(t),$$

что влечет

$$\|t_s^1\|_1 \leqslant \sum_{s\leqslant\mu\leqslant s+\mathbb{I}} \|A_\mu(t)\|_1.$$

Следовательно, для $t \in \mathcal{T}'(Y_n)$ находим

$$\begin{aligned} \|t\|_{B_{1,1}} &= \sum_{s\in\theta_n} \sum_{s\leqslant\mu\leqslant s+\mathbb{I}} \|A_\mu(t)\|_1 \geqslant \sum_{s\in\theta_n} \|t_s^1\|_1 \\ &\geqslant c(d) \sum_{s\in\theta_n} \{v(2^{s-2}-\mathbb{I})\}^{-1} \sum_{x^k\in\Omega(2^{s-2}-\mathbb{I})} |t_s^1(x^k)| \\ &\geqslant c(d) 2^{-n} \|Jt\|_1. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Сопоставляя соотношения (2.6), (2.5) и (2.4), завершаем доказательство теоремы 2.1.

Теорема 2.1 применима для изучения m-членных тригонометрических приближений, т.е. приближений по системе $\mathbb{T} = \{e^{i(k,x)}\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$.

Следствие 1. *При* $m = 1, 2, \ldots$ *имеют место следующие оценки снизу*

$$\sigma_m(H^r_\infty, \mathbb{T})_p \geqslant c(r,d,p)m^{-r}(\log m)^{(d-1)(r+1/2)}, \qquad 1 < p \leqslant \infty, \qquad (*)$$

и

$$\sigma_m(W^r_{q,\alpha}, \mathbb{T})_p \geqslant c(r,d,q,p)m^{-r}(\log m)^{(d-1)r}, \qquad 1 < p \leqslant q < \infty. \qquad (**)$$

Доказательство этих оценок опирается на теорему 2.1 и следующие хорошо известные неравенства. Неравенство (аналог см. [16, с. 36])

$$\|f\|_p \leqslant c(d,p)\|f\|_{B_{p,2}}, \qquad 2 \leqslant p < \infty, \tag{2.7}$$

является простым следствием теоремы Литтлвуда–Пэли. Двойственное к (2.7) неравенство имеет вид

$$\|f\|_p \geqslant c(d,p)\|f\|_{B_{p,2}}, \qquad 1 < p \leqslant 2. \tag{2.8}$$

Сначала докажем первое соотношение в следствии. Из характеризационной теоремы (см. [16, с. 32]) для классов H^r_∞ вытекает существование положительного числа $a(r,d)$ такого, что

$$a(r,d)2^{-rn}\mathcal{T}(Y_n)_{B_{\infty,\infty}} \subset H^r_\infty. \tag{2.9}$$

Далее, пусть P_{Y_n} обозначает оператор ортогонального проектирования на $\mathcal{T}(Y_n)$. Известно (см., например, [16, с. 7]), что этот оператор ограничен из L^p в L^p, $1 < p < \infty$. Следовательно,

$$\sigma_m(\mathcal{T}(Y_n)_{B_{\infty,\infty}}, \mathbb{T})_p \geqslant c(p,d)\sigma_m(\mathcal{T}(Y_n)_{B_{\infty,\infty}}, \{e^{i(k,x)}\}_{k\in Y_n})_p. \tag{2.10}$$

Для оценки правой части неравенства (2.10) будем применять теорему 2.1 с $\Phi = \{e^{i(k,x)}\}_{k\in Y_n}$ и $s = |Y_n|$.

Правая часть соотношения $(*)$ не зависит от p (за исключением постоянной), что показывает, что достаточно доказать $(*)$ для $1 < p \leqslant 2$. В этом случае оценка снизу нормы в L^p дается неравенством (2.8). Отметим, что для полиномов из $\mathcal{T}(Y_n)$ имеем

$$\|t\|_{B_{1,1}} \leqslant c(d)n^{(d-1)/2}\|t\|_{B_{1,2}} \leqslant c(d)n^{(d-1)/2}\|t\|_{B_{p,2}}, \qquad 1 \leqslant p \leqslant \infty. \tag{2.11}$$

Объединяя соотношения (2.8)–(2.11) и применяя теорему 2.1, получим оценку $(*)$.

Соотношение $(**)$ доказывается аналогично, с той лишь разницей, что вместо включения (2.9) используется следующее включение

$$a(r,d,q)n^{-(d-1)/2}2^{-rn}\mathcal{T}(Y_n)_{B_{\infty,\infty}} \subset W^r_{q,\alpha}. \qquad (2.12)$$

Докажем (2.12). Пусть $t \in \mathcal{T}(Y_n)_{B_{\infty,\infty}}$, тогда в силу (2.7) для $2 \leqslant q < \infty$ имеем

$$\|t\|_q \leqslant c(d,q)\|t\|_{B_{q,2}} \leqslant c(d,q)|\theta_n|^{1/2}\|t\|_{B_{\infty,\infty}} \leqslant c(d,q)n^{(d-1)/2}.$$

Далее, в силу неравенства Бернштейна (см. [16]) имеем

$$\|(I^r_\alpha)^{-1}t\|_q \leqslant c(d,r,q)n^{(d-1)/2}2^{rn}. \qquad (2.13)$$

Соотношение (2.13) влечет включение (2.12).

Доказательство следствия 1 завершено.

Пусть теперь Λ – конечное подмножество в $\mathbb{Z}^d$ и

$$T(\Lambda) = \Big\{t : t(x) = \sum_{k\in\Lambda}\hat{t}(k)e^{i(k,x)}\Big\}.$$

Установим ряд свойств пространств $T(\Lambda)$, а затем применим их для оценок аппроксимационных характеристик классов $W^r_{q,\alpha}$, H^r_∞. Мы используем глубокие результаты о конечномерных выпуклых телах, полученные Бургейном и Мильманом [19]. Кроме того, нам потребуется следующий классический факт (см. [20]).

Теорема A. *Пусть B – центрально-симметричное выпуклое тело в $\mathbb{R}^n$. Тогда существует единственный эллипсоид максимального объема, содержащийся в B.*

Напомним следующее

Определение. Константой котипа 2 нормированного пространства X (обозначается $C_2(X)$) называется наименьшая из таких постоянных C, что для любого конечного набора $\{x_1,\dots,x_m\} \subset X$

$$C\cdot\int_0^1\Big\|\sum_{i=1}^m r_i(t)x_i\Big\|_X dt \geqslant \big(\sum\|x_i\|_X^2\big)^{1/2}$$

(здесь $r_i(t)$ – функции Радемахера).

Константа котипа 2 корректно определена для любого конечномерного пространства X и, что для нас важно, для пространств L^p, $1 \leqslant p \leqslant 2$. Из неравенства Хинчина вытекает, что

$$C_2(X) \leqslant 10, \qquad X = L^1(\mathbb{R}^d). \qquad (2.14)$$

Теорема B [19]. *Пусть X – n-мерное действительное нормированное пространство с единичным шаром B, и $Э$ – эллипсоид максимального объема, содержащийся в B. Тогда*

$$\left(\frac{\mathrm{Vol}_n B}{\mathrm{Vol}_n Э}\right)^{1/n} \leqslant KC_2(X)\cdot\log^4 C_2(X).$$

Для данного конечного $\Lambda\subset\mathbb{Z}^d$ определим оператор

$$A = A(\Lambda)\colon T(\Lambda)\to\mathbb{R}^{2|\Lambda|},$$

положив для $t\in T(\Lambda)$

$$A(t)=\{\mathrm{Re}\,\hat t(k),\ \mathrm{Im}\,\hat t(k),\ k\in\Lambda\}\in\mathbb{R}^{2|\Lambda|} \tag{2.15}$$

(порядок координат фиксирован произвольным образом). Пусть

$$B_\Lambda=\{A(t) : t\in T(\Lambda),\ \|t\|_1\leqslant 1\}. \tag{2.16}$$

Ясно, что B_Λ – выпуклое центрально-симметричное тело в $\mathbb{R}^{2|\Lambda|}$. Справедлива

Лемма 2.1. *Единичный шар $B_2^{2|\Lambda|}$ является эллипсоидом максимального объема, лежащим в B_Λ.*

Доказательство. Очевидные соотношения

$$\|t\|_1\leqslant\|t\|_2,\qquad \|t\|_2=\|A(t)\|_{\ell_2^n},\qquad t\in T(\Lambda),$$

влекут включение $B_2^{2|\Lambda|}\subset B_\Lambda$. Покажем теперь, что B_Λ не может содержать эллипсоид объема бо́льшего, чем $\mathrm{Vol}\,B_2^{2|\Lambda|}$. Пусть

$$Э=Э_\Lambda=\left\{a\in\mathbb{R}^{2|\Lambda|} : \sum_{j=1}^{2|\Lambda|}\frac{(a,\tilde c_j)^2}{\tilde\mu_j^2}\leqslant 1\right\}$$

– эллипсоид максимального объема, вписанный в B_Λ, $\{\tilde c_j,\tilde\mu_j\}_{j=1}^{2|\Lambda|}$ – набор направлений полуосей $Э_\Lambda$ и их длин, $\|\tilde c_j\|_2=1$, $1\leqslant j\leqslant 2|\Lambda|$. Рассмотрим оператор

$$J\colon\mathbb{R}^{2|\Lambda|}\to\mathbb{R}^{2|\Lambda|},$$

определенный формулой

$$J\bigl(\{a_k,b_k\}_{k\in\Lambda}\bigr)=\bigl(\{-b_k,a_k\}_{k\in\Lambda}\bigr).$$

J – ортогональный оператор в $\mathbb{R}^{2|\Lambda|}$, $J^2 = -\mathrm{Id}$, и для $t \in T(\Lambda)$

$$J(A(t)) = A(i \cdot t), \qquad \|it\|_1 = \|t\|_1.$$

Последние соотношения и теорема A показывают, что

$$J(\text{Э}_\Lambda) = \text{Э}_\Lambda\,.$$

Кроме того, для любого $a \in \mathbb{R}^{2|\Lambda|}$ $(a, J(a)) = 0$, а двумерное подпространство, порожденное векторами a и $J(a)$ инвариантно для J. Отсюда легко вывести, что эллипсоид Э_Λ может быть записан в виде

$$\text{Э}_\Lambda = \left(a \in \mathbb{R}^{2|\Lambda|} : \sum_{j=1}^{|\Lambda|} \frac{(a, c_j)^2 + (a, J(c_j))^2}{\lambda_j^2} \leqslant 1\right\},$$

где $\|c_j\|_2 = \|J(c_j)\|_2 = 1$ для $j = 1, \dots, |\Lambda|$. Поставим в соответствие каждой паре векторов $\{c_j, J(c_j)\}$ полином $t_j \in T(\Lambda)$ такой, что $c_j = A(t_j)$. Тогда из ортогональности системы полуосей $\{c_j, J(c_j)\}$ вытекает ортогональность полиномов t_j и равенство

$$\text{Э}_\Lambda = \left\{a \in \mathbb{R}^{2|\Lambda|} : \sum_{j=1}^{|\Lambda|} \frac{|(A^{-1}(a), t_j)|^2}{\lambda_j^2} \leqslant 1\right\}. \tag{2.17}$$

Пусть $\widetilde{F}_h$ – оператор сдвига на h: $\widetilde{F}_h(f(x)) = f(x-h)$, и для $a \in \mathbb{R}^{2|\Lambda|}$

$$F_h(a) = A\big[\widetilde{F}_h(A^{-1}(a))\big].$$

Ясно, что F_h – ортогональный оператор в $\mathbb{R}^{2|\Lambda|}$. В силу инвариантности пространства $T(\Lambda)$ и нормы $\|\cdot\|_1$ относительно сдвига для любого $h \in \mathbb{R}^d$ имеем:

$$F_h(\text{Э}_\Lambda) = \text{Э}_\Lambda, \qquad h \in \mathbb{R}^d. \tag{2.18}$$

В свою очередь, из (2.18) следует, что

для любого λ
$E_\lambda = \mathrm{span}\big(\{t_j\},\ j \in \{1, \dots, |\Lambda|\},\ \lambda_j = \lambda\big)$ (2.19)
(линейная оболочка берется над полем комплексных чисел)
инвариантно относительно сдвигов.

Известно, что (2.19) влечет наличие в E_λ базиса из экспонент:

$$E_\lambda = \operatorname{span}\bigl\{e^{i(k_\lambda^1,x)},\dots,e^{i(k_\lambda^s,x)}\bigr\},\qquad s=\dim E_\lambda. \tag{2.20}$$

Из (2.20) и (2.17) заключаем, что

$$Э_\Lambda = \biggl\{a\in\mathbb{R}^{2|\Lambda|}:\ \sum_{\lambda:E_\lambda\ne\varnothing}\ \sum_{k:e^{i(k,x)}\in E_\lambda}\frac{\bigl|(A^{-1}(a),e^{i(k,x)})\bigr|^2}{\lambda^2}\leqslant 1\biggr\},$$

а, значит, эллипсоид $Э_\Lambda$ может быть представлен в виде

$$Э_\Lambda = \biggl\{a:\ \sum_{k\in\Lambda}\frac{\bigl|\widehat{A^{-1}(a)}(k)\bigr|^2}{\mu_k^2}\leqslant 1\biggr\}.$$

То есть $\Bigl\|\sum\limits_{k\in\Lambda}c_k e^{i(k,x)}\Bigr\|_1\leqslant 1$ для любых комплексных чисел c_k с

$$\sum_{k=1}^{|\Lambda|}|c_k|^2\mu_k^{-2}\leqslant 1.$$

Следовательно, $\mu_k^2\leqslant 1$ для любого k и $Э_\Lambda\subset B_2^{2|\Lambda|}$, что завершает доказательство леммы 2.1.

Для полноты приведем вывод соотношения (2.20) из (2.19). Пусть $\psi_1,\dots,\psi_s$ – ортонормированный базис в E_λ. В силу (2.19) для любого $y\in\mathbb{R}^d$ и $m=1,\dots,s$

$$\psi_m(x-y)=\sum_{j=1}^{s}c_j^m(y)\psi_j(x)$$

(функции ψ_m и c_j^m – непрерывны), и, значит, для любого k и $m=1,\dots,s$

$$\begin{aligned}\hat\psi_m(k)\cdot e^{i(k,x)}&=(2\pi)^{-d}\int_{[0,2\pi]^d}\psi_m(x-y)e^{i(k,y)}dy\\&=\sum_{j=1}^{s}b_j^{k,m}\psi_j(x)\in E_\lambda,\end{aligned}$$

откуда непосредственно следует (2.20).

Лемма 2.2. *Существует абсолютная постоянная C такая, что для любого конечного множества $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$*

$$\operatorname{Vol}_s(B_\Lambda) \leqslant C^s \cdot \operatorname{Vol} B_2^s, \qquad s = 2|\Lambda|. \tag{2.21}$$

Доказательство. Пусть X – нормированное пространство, имеющее B_Λ единичным шаром. Тогда из (2.14) вытекает (см. также (2.16)), что $C_2(X) \leqslant 10$. Применяя теперь теорему B и лемму 2.1, получаем утверждение леммы.

Наряду с $T(\Lambda)$ рассмотрим пространство полиномов с действительными коэффициентами

$$T_R(\Lambda) = \{t \in T(\Lambda) : \hat{t}(k) \in R\}$$

и оператор $A_R : T_R(\Lambda) \to \mathbb{R}^{|\Lambda|}$, действующий по правилу:

$$A_R(t) = \{\hat{t}(k)\}_{k \in \Lambda}.$$

Пусть также

$$B_{R,1}(\Lambda) = \left\{ \{\hat{t}(k)\} \in \mathbb{R}^{|\Lambda|} : \left\| \sum_{k \in \Lambda} \hat{t}(k) e^{i(k,x)} \right\|_1 \leqslant 1 \right\}.$$

Лемма 2.3. *Для любого конечного множества $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ справедлива оценка объема*

$$\operatorname{Vol}_{|\Lambda|}\{B_{R,1}(\Lambda)\} \leqslant C^{|\Lambda|} \cdot \operatorname{Vol} B_2^{|\Lambda|},$$

где C – абсолютная постоянная.

Доказательство. Представим $R^{2|\Lambda|}$ в виде

$$R^{2|\Lambda|} = R^{|\Lambda|} \otimes R^{|\Lambda|} \equiv A(T_R(\Lambda)) \otimes A(iT_R(\Lambda)).$$

Тогда ясно, что для любых $a \in \frac{1}{2} B_{R,1}(\Lambda)$, $b \in \frac{1}{2} B_{R,1}(\Lambda)$

$$a \otimes b \in B_\Lambda,$$

а, значит,

$$\left[(\tfrac{1}{2})^{|\Lambda|} \cdot \operatorname{Vol}\{B_{R,1}(\Lambda)\} \right]^2 \leqslant \operatorname{Vol} B_\Lambda.$$

Из последнего неравенства и (2.21) вытекает утверждение леммы 2.3.

Для функции f, $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$, и $1 \leqslant p \leqslant \infty$ положим

$$E_\Lambda^\perp(f)_p = \inf_{u : \hat{u}(k) = 0, k \in \Lambda} \|f - u\|_p,$$

и пусть

$$B_{R,\infty}^\perp(\Lambda) = \left\{ \{\hat{t}(k)\} \in \mathbb{R}^{|\Lambda|} : t \in T_R(\Lambda),\ E_\Lambda^\perp(t)_\infty \leqslant 1 \right\}.$$

Лемма 2.4. *Для любого конечного множества* $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ *справедлива оценка объема*

$$\mathrm{Vol}_{|\Lambda|}\bigl\{B^{\perp}_{R,\infty}(\Lambda)\bigr\} \geqslant c^{|\Lambda|}\,\mathrm{Vol}\,B_2^{|\Lambda|}.$$

Доказательство основано на неравенстве Бургейна–Мильмана [19], согласно которому для любого выпуклого центрально-симметричного тела K в $\mathbb{R}^n$

$$\mathrm{Vol}\,K \cdot \mathrm{Vol}\,K^0 \geqslant C^n(\mathrm{Vol}\,B_2^n)^2,$$

где $C > 0$ – абсолютная постоянная, а K^0 – поляра к K, т.е.

$$K^0 = \bigl\{x \in \mathbb{R}^n : \sup_{y\in K}(x,y) \leqslant 1\bigr\}.$$

Пусть $K = B_{R,1}(\Lambda)$. С учетом леммы 2.3 нам достаточно проверить, что $\frac{1}{2}K^0 \subset B^{\perp}_{R,\infty}(\Lambda)$. Следствием теоремы Хана–Банаха является равенство

$$E^{\perp}_{\Lambda}(t)_\infty = \sup_{\substack{g\in T(\Lambda)\\ \|g\|_1\leqslant 1}} |(t,g)|, \qquad t \in T(\Lambda). \tag{2.22}$$

Представим произвольный полином $g \in T(\Lambda)$, $\|g\|_1 \leqslant 1$, в виде

$$g = g' + ig'' \equiv \sum_{k\in\Lambda}\mathrm{Re}\,\hat g(k)e^{i(k,x)} + i\sum_{k\in\Lambda}\mathrm{Im}\,\hat g(k)e^{i(k,x)}.$$

Тогда $g', g'' \in T_R(\Lambda)$ и

$$\|g'\|_1 = \bigl\|\tfrac{1}{2}(g(x) + \bar g(-x))\bigr\|_1 \leqslant 1,$$
$$\|g''\|_1 = \bigl\|\tfrac{1}{2}(g(x) - \bar g(-x))\bigr\|_1 \leqslant 1.$$

Так как

$$|(t,g)| \leqslant 2\max\bigl\{|(t,g')|, |(t,g'')|\bigr\},$$

то из (2.22) следует, что

$$E^{\perp}_{\Lambda}(t)_\infty \leqslant 2\max_{\substack{g\in T_R(\Lambda)\\ \|g\|_1\leqslant 1}} |(t,g)|.$$

Применяя последнее неравенство для $t = A_R^{-1}(a)$, a – произвольный вектор из $\mathbb{R}^{|\Lambda|}$, получаем нужное включение $\frac{1}{2}K^0 \subset B^{\perp}_{R,\infty}(\Lambda)$.

Лемма 2.4 доказана.

Используем эту лемму для доказательства новых оценок снизу для поперечников по Колмогорову и энтропийных чисел классов $W^r_{\infty,\alpha}$. Сформулируем эти оценки в виде теоремы.

Теорема 2.2. *Для всех* $r>0$ *имеем*

$$d_m(W^r_{\infty,\alpha},L_p)\geqslant c(r,d,p)m^{-r}(\log m)^{r(d-1)},\qquad p>1,$$
$$\varepsilon_m(W^r_{\infty,0},L_1)\geqslant c(r,d)m^{-r}(\log m)^{r(d-1)}.$$

Доказательство. Сначала докажем первое соотношение. Воспользуемся следующим утверждением.

Лемма А [9]. *Пусть выпуклое центрально-симметричное тело* A *содержится в единичном шаре* B_2^N *евклидова пространства* $\mathbb{R}^N$ *и* $\mathrm{Vol}(A)\geqslant c_1^{-N}\,\mathrm{Vol}\,B_2^N$, $c_1>0$ *– некоторая постоянная. Тогда для любого подпространства* $L\subset\mathbb{R}^N$ *размерности не меньше* $N/2$ *найдется элемент* $a\in A\cap L$, *для которого* $\|a\|_{\ell_2^N}\geqslant c_2>0$.

Пусть задано произвольное подпространство $\Psi\subset L^p$ размерности m, и n выбрано наименьшим, удовлетворяющим условию $|D_n|\geqslant 4m$. Применим лемму А. В качестве тела A возьмем $B^\perp_{R,\infty}(D_n)$. В силу определения этого множества и оценки объема, содержащейся в лемме 2.4, это тело удовлетворяет условиям леммы А. В качестве подпространства L возьмем

$$L=\bigl\{A_R(t),\ t\in T_R(D_n),\ (I_\alpha t,\psi)=0 \text{ для всех } \psi\in\Psi\bigr\}.$$

Ясно, что $\dim L\geqslant\frac12|D_n|$. Таким образом, по лемме А находим

$$a\in B^\perp_{R,\infty}(D_n)$$

такой, что для $\varphi=A_R^{-1}(a)\in T_R(D_n)$ имеем

$$E^\perp_{D_n}(\varphi)_\infty\leqslant 1,\qquad \|\varphi\|_2\geqslant c_2>0,$$

и для любого $\psi\in\Psi$

$$(I_\alpha\varphi,\psi)=0.$$

Пусть $\varphi^\perp\in\{T(D_n)\}^\perp$ таков, что

$$\|\varphi-\varphi^\perp\|_\infty\leqslant 2. \tag{2.23}$$

Определим

$$f=I^r_\alpha\bigl(\tfrac12(\varphi-\varphi^\perp)\bigr).$$

Тогда $f\in W^r_{\infty,\alpha}$. Возьмем произвольное $\psi\in\Psi$ и оценим снизу $\|f-\psi\|_p$. Пусть $q=\dfrac{p}{p-1}$. Из (2.23) вытекает

$$\|\varphi-\varphi^\perp\|_q\leqslant 2. \tag{2.24}$$

Понятно, что достаточно рассмотреть случай $1 < p \leqslant 2$. Тогда $2 \leqslant q < \infty$, и, пользуясь многомерной теоремой Литтлвуда–Пэли и теоремой Рисса об ограниченности оператора тригонометрического сопряжения как оператора из L^q в L^q, получаем, что ортопроектор на $T(D_n)$ ограничен из L^q в L^q. Отсюда и из (2.24) получаем

$$\|\varphi\|_q \leqslant c_1(q). \tag{2.25}$$

Используя упомянутую выше теорему Рисса, получаем из (2.25)

$$\|I_\alpha \varphi\|_q \leqslant c_2(q). \tag{2.26}$$

Рассмотрим теперь

$$\begin{aligned} b &= (f - \psi, I_\alpha \varphi) = (f, I_\alpha \varphi) \\ &= \frac{1}{2}(I_\alpha^r \varphi - I_\alpha^r \varphi^\perp, I_\alpha \varphi) = \frac{1}{2}(I_\alpha^r \varphi, I_\alpha \varphi) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k \in D_n} \widehat{F}_r(k,0)|\hat{\varphi}(k)|^2 \geqslant 2^{-rn-1}\|\varphi\|_2^2 \\ &\geqslant 2^{-rn-1} c_2^2. \end{aligned} \tag{2.27}$$

С другой стороны,

$$b \leqslant \|f - \psi\|_p \|I_\alpha \varphi\|_q \leqslant c_2(q)\|f - \psi\|_p. \tag{2.28}$$

Из соотношений (2.27) и (2.28), произвольности $\psi \in \Psi$ и произвольности самого пространства Ψ, $\dim \Psi = m$, вытекает первое соотношение в теореме 2.2.

Докажем второе соотношение в теореме 2.2. Воспользуемся леммой 2.4 с $\Lambda = D_n$ и n наименьшим, удовлетворяющим условию $|D_n| \geqslant m$. Оценка объема $B^\perp_{R,\infty}(D_n)$ из леммы 2.4 влечет следующую оценку числа $N_{\varepsilon,n}$ элементов ε-сети множества $B^\perp_{R,\infty}(D_n)$ в метрике $\ell_2^{|D_n|}$:

$$N_{\varepsilon,n} \geqslant \left(\frac{c}{\varepsilon}\right)^{|D_n|}.$$

Следовательно, для $\varepsilon = \varepsilon_0 > 0$ будем иметь

$$N_{\varepsilon,n} > 2^{|D_n|}.$$

Отсюда вытекает, что в $T_R(D_n)$ найдется 2^m полиномов $\{t_j\}_{j=1}^{2^m}$ таких, что

$$\begin{gathered} E^\perp_{D_n}(t_j)_\infty \leqslant 1, \qquad j = 1, \dots, 2^m; \\ \|t_i - t_j\|_2 \geqslant \frac{1}{2}\varepsilon_0, \qquad i \neq j. \end{gathered}$$

Далее, пусть $t_j^{\perp}$, $j = 1, \dots, 2^m$, таковы, что $t_j^{\perp} \in \{T(D_n)\}^{\perp}$ и

$$\|t_j - t_j^{\perp}\|_\infty \leqslant 2. \tag{2.29}$$

Рассмотрим набор функций

$$\varphi_j = \frac{1}{2}(t_j - t_j^{\perp}), \quad f_j = \varphi_j * F_r(x, 0), \qquad j = 1, 2, \dots, 2^m.$$

Тогда $f_j \in W^r_{\infty,0}$, $j = 1, \dots, 2^m$. Оценим снизу $\|f_i - f_j\|_1$ для $i \neq j$. Рассмотрим величины

$$\sigma_{ij} = (f_i - f_j, \varphi_i - \varphi_j).$$

С одной стороны, в силу (2.29) имеем

$$\sigma_{ij} \leqslant 2\|f_i - f_j\|_1.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= \sum_k \widehat{F}_r(k, 0)|\hat{\varphi}_i(k) - \hat{\varphi}_j(k)|^2 \\ &\geqslant \sum_{k \in D_n} F_r(k, 0)|\hat{\varphi}_i(k) - \hat{\varphi}_j(k)|^2 \\ &\geqslant 2^{-rn-2} \sum_{k \in D_n} |\hat{t}_i(k) - \hat{t}_j(k)|^2 \\ &= 2^{-rn-2}\|t_i - t_j\|_2^2.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\|f_i - f_j\|_1 \geqslant 2^{-rn-5}\varepsilon_0^2, \qquad i \neq j.$$

Отсюда, учитывая, что набор функций $\{f_i\}$ состоит из 2^m элементов и $2^n n^{d-1} \leqslant c(d)m$, получаем требуемую оценку.

Сейчас мы вернемся к m-членным приближениям и, используя лемму 2.2, докажем утверждение, близкое к теореме 2.1 для приближений в L^1.

Теорема 2.3. *Существует постоянная $c(d)$ такая, что для любого набора $\Phi = \{\varphi_j\}_{j=1}^N$ функций из $\mathcal{T}(Y_n)$, $N \leqslant K|Y_n|$, имеет место оценка*

$$\sigma_m\big(\mathcal{T}(Y_n)_{B_{\infty,\infty}}, \Phi\big)_1 \geqslant c(d, k)n^{(d-1)/2}$$

для всех $m < c(d)|Y_n|$.

Доказательство. Сведем задачу к задаче в $\mathbb{R}^{2|Y_n|}$. Процесс дискретизации проведем, используя коэффициенты Фурье полиномов из $\mathcal{T}(Y_n)$. Рассмотрим оператор A (см. (2.15) с $\Lambda = Y_n$), определенный следующим образом

$$A(t) = \{\operatorname{Re}\hat{t}(k),\ \operatorname{Im}\hat{t}(k),\ k \in Y_n\}.$$

Пусть

$$A_\infty(Y_n) = \left\{A(t) : t \in \mathcal{T}(Y_n) \text{ и } \Big\| \sum_{k \in \bar\rho(s)} \hat{t}(k) e^{i(k,x)} \Big\|_\infty \leqslant 1,\ s \in \theta_n \right\}.$$

Множество $A_\infty(Y_n)$ является выпуклым и центрально-симметричным. Известна (см. [17, с. 206]) следующая оценка объема этого множества

$$\operatorname{Vol}(A_\infty(Y_n)) \geqslant 2^{-n|Y_n|} c(d)^{-|Y_n|}, \qquad c(d) > 0. \tag{2.30}$$

Мы собираемся воспользоваться замечанием 4 к теореме 1.1. В качестве множества G возьмем

$$G = \bigl\{a \in \mathbb{R}^{2|Y_n|} : a|\theta_n|^{1/2} \in A_\infty(Y_n)\bigr\}.$$

Тогда $G \subset B_2^{2|Y_n|}$, и в силу (2.30) имеем

$$\operatorname{Vol} G \geqslant c(d)^{|Y_n|} \operatorname{Vol}(B_2^{2|Y_n|}). \tag{2.31}$$

Рассмотрим следующую норму в $\mathbb{R}^{2|Y_n|}$, индуцированную L^1-нормой в $\mathcal{T}(Y_n)$: для $a \in \mathbb{R}^{2|Y_n|}$ полагаем

$$\|a\|_B = \|A^{-1}(a)\|_1.$$

Докажем, что эта норма удовлетворяет условию $(\star)$. Здесь мы воспользуемся леммой 2.2 и следующим хорошо известным фактом (см., например, [13, с. 56]): пусть B – выпуклое центрально-симметричное тело в $\mathbb{R}^N$, $B_2^N \subset B$ и $\operatorname{Vol} B \leqslant C_1^N \operatorname{Vol} B_2^N$. Тогда существует постоянная $K = K(c_1)$ и точки $\{x_1, \dots, x_M\} \subset \mathbb{R}^N$, $M \leqslant K^N$, такие, что

$$B \subset \bigcup_{i=1}^{M} B_2^N(x_i). \tag{2.32}$$

Из леммы 2.2 с $\Lambda = Y_n$ и (2.32) с $N = 2|Y_n|$ без труда вытекает, что шар $B = \{a : \|a\|_B \leqslant 1\}$ удовлетворяет условию $(\star)$.

Для завершения доказательства теоремы 2.3 остается применить оценку (2.31) и замечание 4 к теореме 1.1.

Авторы благодарят профессора Р. А. Девора за полезное обсуждение рассматриваемых в работе вопросов.

Математический институт
им. В. А. Стеклова РАН;
Университет Южной Каролины

Поступило
28.04.94

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Осколков К.И. Аппроксимационные свойства суммируемых функций на множествах полной меры // Матем. сб. 1977. Т. 103. №4. С. 563–589.
[2] Майоров В.Е. О линейных поперечниках соболевских классов // ДАН СССР. 1978. Т. 243. №5. С. 1127–1130.
[3] DeVore R.A., Jawerth B., Lucier B.J. Image compression through wavelet transform coding // IEE Trans. on Information Theory. 1992. V. 38. №2. P. 719–746.
[4] Hess R.F., Howell E.R. The threshold contrast sensitivity function in strabismic amblyopia: Evidence for two type classification // Vision Res. 1977. V. 17. P. 1049–1055.
[5] Кашин Б.С. Об аппроксимационных свойствах полных ортонорнированных систем // Труды МИАН. 1985. Т. 172. С. 187–191.
[6] Кашин Б.С. О тригонометрических полиномах с коэффициентами по модулю равными нулю или единице // Труды 3-й Саратовской зимней школы, ч. 1. С. 19–30, Саратов, 1987.
[7] Зигмунд А. Тригонометрические ряды, Т. 2. М.: Мир, 1966.
[8] Vaaler J. A geometric inequality with applications to linear forms // Pacific J. Math. 1979. V. 83. P. 543–553.
[9] Кашин Б.С. О некоторых свойствах пространства тригонометрических полиномов с равномерной нормой // Труды МИАН. 1980. Т. 145. С. 111–116.
[10] Кашин Б.С. О некоторых свойствах пространства тригонометрических полиномов связанных с равномерной сходимостью // Сообщ. АН Груз. ССР. 1979. Т. 93. С. 281–284.
[11] Barany I., Furedi Z. Computing the volume is difficult // Discrete Comput. Geom. 1987. V. 2. P. 319–326.
[12] Глускин Е.Д. Экстремальные свойства ортогональных параллелепипедов и их приложения к геометрии банаховых пространств // Матем. сб. 1988. Т. 136. №1. С. 85–96.
[13] Pisier G. The volume of convex bodies and Banach space geometry: Cambridge Univ. Press, 1989.
[14] DeVore R.A., Temlyakov V.N. Nonlinear approximation by trigonometric sums (to appear).
[15] Кашин Б.С., Саакян А.А. Ортогональные ряды. М.: Наука, 1984.
[16] Темляков В.Н. Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Труды МИАН. 1986. Т. 178.
[17] Temlyakov V.N. Approximation of Periodic Functions: Nova Science Publishers, Inc., 1993.
[18] Темляков В.Н. Оценки асимптотических характеристик классов функций с ограниченной смешанной производной или разностью // Труды МИАН. 1989. Т. 189. С. 138–168.
[19] Bourgain J., Milman V.D. New volume ratio properties for convex symmetric bodies in $\mathbb{R}^n$ // Invent. Math. 1987. V. 88. P. 319–340.
[20] Лейхтвейс К. Выпуклые множества. М.: Физматлит, 1985.