Математические заметки

том 58 выпуск 2 август 1995

ЛОГАРИФМИЧЕСКИЙ РОСТ L^1-НОРМЫ МАЖОРАНТЫ ЧАСТНЫХ СУММ ОРТОГОНАЛЬНОГО РЯДА

Б. С. Кашин, С. Й. Шарек

Пусть $\{\varphi_k\}_{k\geqslant 1}$ – ортонормированная система (О.Н.С.) функций, заданных на некотором пространстве с мерой. Для (возможно формального) ортогонального разложения

$$f(x)\sim\sum_k c_k\varphi_k(x)$$

рассмотрим мажоранту частных сумм

$$S^*f(x)=\sup_n\left|\sum_{k=1}^n c_k\varphi_k(x)\right|.$$

Положим также

$$S_N^*f(x)=\max_{n\leqslant N}\left|\sum_{k=1}^n c_k\varphi_k(x)\right|.$$

Исследование поточечной сходимости и сходимости почти всюду ортогональных рядов в значительной степени сводится к анализу свойств операторов S^*, S_N^*. В этой статье для дискретных ортонормированных систем $\{\varphi_k\}$ изучается поведение величин

$$\|S^*f\|_{L^1},\quad \|S_N^*f\|_{L^1},\qquad f\in L^1.$$

Работа первого автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 93-01-00240) и Международного научного фонда (грант NCJ000).

Интерес представляют, в частности, случаи

$$\begin{aligned} &\text{а)} \quad f(x) = \sum_{k=1}^{N} \varphi_k(x); \\ &\text{б)} \quad f_y(x) = \sum_{k=1}^{N} \varphi_k(y)\varphi_k(x), \qquad N = 1, 2, \dots, \end{aligned} \tag{1}$$

– ядро порядка N системы $\{\varphi_k\}$, рассматриваемое при фиксированном значении переменной y.

Если функции φ_k равномерно ограничены: $\|\varphi_k\|_\infty \leqslant M$, $k = 1, 2, \dots$, то, как утверждает известный результат А.М. Олевского (см. [1], а также [2, гл. 9]),

$$\begin{gathered} \sup_y \max_{1\leqslant n\leqslant N} \Big\| \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(y)\varphi_k(x) \Big\|_{L^1} \geqslant C(M)\log N, \\ \max_{1\leqslant n\leqslant N} \Big\| \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x) \Big\|_{L^1} \geqslant C(M)\log N, \qquad N = 1, 2, \dots, \quad C(M) > 0. \end{gathered} \tag{2}$$

Из (2) вытекает, конечно, что для равномерно ограниченных систем $\{\varphi_k\}$

$$\|S_N^* f\|_{L^1} \geqslant C(M)\log N, \tag{3}$$

если f имеет вид (1) а) и

$$\sup_y \|S_N^* f_y\|_{L^1} \geqslant C(M)\log N, \tag{3$'$}$$

где f_y определена в (1) б).

Хорошо известно, что равномерная ограниченность функций $\{\varphi_k\}$ существенна для справедливости неравенств (2). Вместе с тем оказывается (см., в частности, теорему 1 ниже), что более слабые неравенства (3) и (3$'$) сохраняются и в более общей ситуации.

Ниже мы ограничиваемся рассмотрением дискретных О.Н.С. (т.е. ортонормированных базисов в конечномерных евклидовых пространствах). В этой ситуации полученные результаты можно формулировать как утверждения о свойствах ортогональных матриц – элементов ортогональной группы O^N.

Теорема 1. *Пусть* $A=\{a_{ij}\}_{i,j=1}^N\in O^N$. *Тогда*

$$\sum_{i=1}^N \max_{1\leqslant n\leqslant N}\left|\sum_{j=1}^n a_{ij}\right|\geqslant \frac{1}{30}\,N^{1/2}\log N. \tag{4}$$

Замечания. а) Пример дискретной тригонометрической системы показывает порядковую точность оценки (4). При этом нам не известны примеры систем $\{\varphi_k\}_{k=1}^N$, $N=1,2,\dots$, для которых величины $\left\|\sum_{k=1}^n\varphi_k\right\|_{L^1}$, $n=1,\dots,N$, равномерно ограничены, а L^1-норма мажоранты

$$\left\|S^*\left(\sum_{k\leqslant N}\varphi_k\right)\right\|_{L^1}$$

имеет порядок $\log N$.

б) Рассуждения, примененные ниже при доказательстве неравенства (4) позволяют получить и более общую оценку

$$\sum_{i=1}^N \max_{1\leqslant n\leqslant m}\left|\sum_{j=1}^n a_{ij}\right|\geqslant Cm^{1/2}\log m, \qquad m=1,\dots,N,$$

$C>0$ – абсолютная постоянная. Подобные обобщения могут быть получены и для большинства результатов этой статьи.

в) В доказательстве оценки (4) используется, да и то не в полном объеме, лишь бесселева оценка для матрицы A.

Ниже нам потребуется

Лемма 1 (С.Б. Стечкин [3]). *Для любой* (*конечной или бесконечной*) *последовательности* $\{a_n\}$ *с* $a_1\geqslant a_2\geqslant\dots\geqslant 0$

$$\sum_{n\geqslant 1}a_n\geqslant\frac12\sum_{m\geqslant 1}\left(\frac1m\sum_{j\geqslant m}a_j^2\right)^{1/2}. \tag{5}$$

Схема доказательства. Лемму 1 нетрудно вывести из ее непрерывного аналога

$$\int_0^\infty f(x)\,dx\geqslant\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left(x^{-1}\int_x^\infty f^2(t)\,dt\right)^{1/2}dx, \qquad f\in S, \tag{6}$$

где S – класс невозрастающих на $(0,\infty)$ неотрицательных функций f. Так как правая часть в (6) – выпуклая функция от f, то достаточно проверить (6) для f вида $a^{-1}\chi(0,a)$, $a>0$, составляющих множество крайних точек класса

$$S\cap\left\{f\colon \int_0^\infty f(x)\,dx=1\right\}.$$

Наконец, для $f=a^{-1}\chi(0,a)$ непосредственное вычисление показывает, что (6) обращается в равенство.

Замечания. а) В [3] высказано предположение, что наилучшая постоянная в (5) равна $2/\pi$, однако соответствующая ссылка или доказательство нам неизвестны.

б) Обратные к (5) и (6) неравенства справедливы без предположения монотонности (см. [4, теоремы 337, 338]).

Доказательство теоремы 1. Переформулируем результат в геометрических терминах. Для данного ортонормированного базиса $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ в $\mathbb{R}^N$ и параллелепипеда

$$P=\left\{x=\{x_j\}_{j=1}^N\in\mathbb{R}^N: |x_j|\leqslant\alpha_j,\ j=1,\dots,N\right\}$$

такого, что

$$\sum_{i=1}^n\varphi_i\in P,\qquad n=1,2,\dots,N,$$

мы должны показать, что

$$\sum_{j=1}^N\alpha_j\geqslant\frac{1}{30}N^{1/2}\log N. \tag{7}$$

С этой целью оценим сверху и снизу поперечники по Колмогорову (в евклидовой метрике) множества P:

$$d_k(P)=\inf_{\substack{E\subset\mathbb{R}^N\\ \dim E\leqslant k}}\max_{x\in P}\min_{y\in E}\|x-y\|_{\ell_2^N}. \tag{8}$$

Предполагая без потери в общности, что $\alpha_1\geqslant\alpha_2\geqslant\dots\geqslant\alpha_N$ и полагая $E=\{x: x_i=0,\ i\geqslant k\}$, находим

$$d_{k-1}(P)\leqslant\left(\sum_{j=k}^N\alpha_j^2\right)^{1/2},\qquad k=1,2,\dots,N. \tag{9}$$

С другой стороны, пусть $1 \leqslant k \leqslant N/2$, $s = [N/(2k)]$ и для $q = 1, 2, \dots, 2k$

$$\psi_q = \sum_{i=(q-1)s+1}^{qs} \varphi_i \,.$$

Тогда

1) ψ_q – попарно ортогональны;
2) $\|\psi_q\|_{\ell_2^N} = s^{1/2},\ q = 1, \dots, 2k;$
3) $\psi_q \in 2P,\ q = 1, \dots, 2k.$

С учетом 1) и 2) из стандартной оценки поперечника октаэдра, впервые сформулированной в [5], вытекает:

$$d_k(2P) \geqslant d_k\big(\{\psi_q\}_{q=1}^{2k}\big) \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\, s^{1/2},$$

а следовательно,

$$d_k(P) \geqslant \frac{1}{4\sqrt{2}} \left(\frac{N}{k}\right)^{1/2}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant \frac{N}{2}. \tag{10}$$

Сравнивая (8) и (10) находим:

$$\left(\sum_{j=k}^{N} \alpha_j^2\right)^{1/2} \geqslant \frac{1}{4\sqrt{2}} \left(\frac{N}{k}\right)^{1/2}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant \frac{N}{2}\,.$$

Применим теперь лемму Стечкина:

$$\sum_{j=1}^{N} \alpha_j \geqslant \frac{1}{8\sqrt{2}} \sum_{1 \leqslant k \leqslant N/2} \left(\frac{N}{k^2}\right)^{1/2} \geqslant \frac{1}{30}\, N^{1/2} \log N.$$

Теорема 1 доказана.

По существу те же рассуждения, что были использованы при доказательстве теоремы 1, позволяют получить и следующий результат:

Теорема 1′. *Пусть* $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^N \in O^N$ *и* $\{c_j\}_{j=1}^N$ *– такой набор чисел, что* $\#\{j : |c_j| \geqslant \alpha\} \geqslant \beta N$ *для некоторых* $\alpha, \beta > 0$.[1] *Тогда*

$$\sum_{i=1}^N \max_{1\leqslant n\leqslant N}\left|\sum_{j=1}^n c_j a_{ij}\right| \geqslant cN^{1/2}\log N,$$

$c = c(\alpha,\beta) > 0$.

Для формулировки следующего результата удобнее "нормализовать" считающую меру на $\{1,\dots,N\}$, что приводит к пространствам L_p^N с нормой

$$\|x\|_{L_p^N} = \left(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N |x_j|^p\right)^{1/p}, \qquad x = \{x_j\}_{j=1}^N,$$

а векторы из L_p^N рассматривать как функции на множестве $\{1,\dots,N\}$.

Следствие 1. *Пусть* $\{\varphi_k\}_{k=1}^N$ *– ортонормированный базис в* L_2^N *такой, что* $\|\varphi_k\|_{L_1^N} \geqslant \alpha$, $k = 1,\dots,N$, *для некоторого* $\alpha > 0$. *Тогда*

$$\#\left\{y \in \{1,\dots,N\} : \left\|S_N^*\left(\sum_{k=1}^N \varphi_k(y)\varphi_k\right)\right\|_{L_1^N} \geqslant c(\alpha)\log N\right\} \geqslant c'(\alpha)N.$$

Следующее утверждение общеизвестно (см., например, [2, с. 42]).

Лемма 2. *Пусть* f *– измеримая функция на некотором вероятностном пространстве, причем*

$$\|f\|_{L^2} \leqslant 1, \quad \|f\|_{L^1} \geqslant \alpha, \qquad \alpha > 0.$$

Тогда мера $|E|$ *множества* $E = \{x : |f(x)| \geqslant \alpha/2\}$ *допускает оценку снизу:* $|E| \geqslant \alpha^2/4$. *Аналогично, если* $\|f\|_{L^\infty} \leqslant 1$ *и* $\|f\|_{L^1} \geqslant \alpha$, *то* $|E| \geqslant \alpha/2$.

Доказательство следствия 1. Из леммы 2 вытекает, что

$$\#\left\{y : \#\left\{k : \varphi_k(y) \geqslant \frac{\alpha}{2}\right\} \geqslant \frac{\alpha^2}{8}N\right\} \geqslant \frac{\alpha^2}{8}N,$$

и нам остается применить теорему 1′.

---

[1] Через $\#A$ мы обозначаем число элементов в конечном множестве A.

Перейдем теперь к рассмотрению более общего вопроса, мотивированного, в частности, задачами о кратных ортогональных рядах. Пусть $\{\varphi_k(x)\}_{k\in I}$ – О.Н.С., причем I – произвольное множество индексов (например, $I=\{1,\dots,N\}$, $I=\mathbb{N}$, $I=\{1,\dots,N\}^d$ и т.д.). Далее, пусть Ω – семейство подмножеств I. Для ортогонального разложения

$$f(x)\sim\sum c_k\varphi_k(x)$$

определим “Ω-мажоранту частных сумм”:

$$S_\Omega^* f(x)=\sup_{\Lambda\in\Omega}\Bigl|\sum_{k\in\Lambda}c_k\varphi_k(x)\Bigr|. \tag{11}$$

В “обычном” случае $I=\{1,2,\dots,N\}$ и

$$\Omega=\bigl\{\{1,\dots,k\},1\leqslant k\leqslant N\bigr\}$$

(аналогично при $I=\mathbb{N}$ и $I=\mathbb{Z}$). Основным при введении мажоранты (11) был для нас случай, когда $I=\{1,2,\dots,N\}^d$ и

$$\Omega=\bigl\{\{1,\dots,k_1\}\times\{1,\dots,k_2\}\times\dots\times\{1,\dots,k_d\},\\ 1\leqslant k_j\leqslant N,\ j=1,2,\dots,d\bigr\}, \tag{12}$$

соответствующий рассмотрению максимума “прямоугольных” частных сумм d-кратного ортогонального ряда.

Пусть I,Ω заданы, $\#I<\infty$. Определим $\widetilde{\Omega}\subset\mathbb{R}^I$, положив

$$\widetilde{\Omega}=\{\chi_\Lambda,\ \Lambda\in\Omega\},$$

где евклидово пространство $\mathbb{R}^I$ размерности $\#I$ мы отождествляем с множеством действительных функций на I.

Вполне аналогично доказательству теоремы 1 устанавливается

Теорема 2. *Пусть $\{\varphi_k\}_{k\in I}$ – О.Н.С. в $\mathbb{R}^I$ и Ω – семейство подмножеств I. Тогда*

$$\Bigl\|S_\Omega^*\Bigl(\sum_{k\in I}\varphi_k\Bigr)\Bigr\|_{\ell_1}\geqslant c\sum_{m\geqslant1}\frac{d_{m-1}(\widetilde{\Omega})}{\sqrt{m}},$$

где поперечники $d_m(\cdot)$ определены в (8), а $c>0$ – абсолютная постоянная.

Для успешного применения теоремы 2 необходимы достаточно точные оценки поперечников $d_m(\widetilde{\Omega})$. В некоторых случаях такие оценки можно получить, и теорема 2 приводит к точным по порядку результатам. Справедливо, в частности,

Следствие 2. *Пусть* $I=\{1,\dots,N\}^d$, *семейство* Ω *определено в* (12) *и* $\{\varphi_k\}_{k\in I}$ – *ортонормированный базис в* $\mathbb{R}^I$. *Тогда*

$$\left\|S^*_\Omega\biggl(\sum_{k\in I}\varphi_k\biggr)\right\|_{\ell_1}\geqslant c(d)N^{d/2}(\log N)^d.$$

Замечания. а) Пример дискретной кратной тригонометрической системы показывает порядковую точность следствия 2.

б) В связи с тем, что точный кратный аналог оценки (2) не установлен, следствие 2 дает новые результаты и в "равномерно ограниченном случае" (для ортонормированных систем в $\mathbb{R}^I$ условие равномерной ограниченности сводится к оценке $\|\varphi_i\|_\infty\leqslant C(\#I)^{-1/2}$).

Доказательство следствия 2. Пусть $T\colon\mathbb{R}^I\to L^2(0,1)^d$ – оператор, ставящий в соответствие вектору $a=\{a_k\}_{k\in I}$ кусочно-постоянную функцию $f\in L^2(0,1)^d$ с $f(x)=a_{k_1,\dots,k_d}$ для $x=\{x_j\}_{j=1}^d$, $(k_j-1)/N<x_j\leqslant k_j/N$, $1\leqslant j\leqslant d$. Легко видеть, что тогда

$$\|f\|_{L^2(0,1)^d}=N^{-d/2}\|a\|_{\ell_2^I}.$$

Пусть

$$F=\bigl\{T(\chi_\Lambda),\ \Lambda\subset\Omega\bigr\}\subset L^2(0,1)^d.$$

Тогда

$$d_m(\widetilde{\Omega})=d_m(\widetilde{\Omega},\ell_2^I)=N^{d/2}d_m\bigl(F,L^2(0,1)^d\bigr),\qquad m=0,1,\dots. \tag{13}$$

Далее, пусть

$$G=\biggl\{\chi_P,P=\prod_{j=1}^d(a_j,b_j]\subset(0,1)^d\biggr\}$$

– множество характеристических функций промежутков, лежащих в $(0,1)^d$ и H – подмножество в G, соответствующее промежуткам с вершинами вида $\bigl(k_1/N,\dots,k_d/N\bigr)$, $1\leqslant k_j\leqslant N$, $j=1,\dots,d$. Отметим, что для каждой функции $\chi_P\in G$ найдется $\chi_{P'}\in H$ с

$$\|\chi_P-\chi_{P'}\|_{L^2}\leqslant\frac{c(d)}{N^{1/2}}\,. \tag{14}$$

Учитывая (14) и тот факт, что каждая функция из H представима в виде линейной комбинации $\leqslant 2^d$ из F с коэффициентами ±1, имеем

$$d_m(F,L^2)\geqslant 2^{-d}d_m(H,L^2)\geqslant 2^{-d}d_m(G,L^2)-c(d)N^{-1/2}. \tag{15}$$

Оценим снизу поперечник $d_m(G, L^2)$ с помощью теоремы о поперечниках семейства сдвигов периодической функции (см. Р. С. Исмагилов [6]; отметим еще подход к оценкам нужных нам поперечников, основанный на классической теореме Э. Шмидта, использованный в [7, теорема 3.1.1]). Пусть $g(x)$ – функция, заданная на $\mathbb{R}^d$, 1-периодическая по каждой переменной и такая, что для $x \in (0,1)^d$

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]^d, \\ 0, & x \notin \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]^d. \end{cases}$$

Рассмотрим в $L^2\big((0,1)^d\big)$ семейство функций

$$Q = \big\{g(\cdot - \tau),\ \tau \in \mathbb{R}^d\big\}.$$

Каждая функция из Q представима в виде $\leqslant 2^d$ функций из G, поэтому

$$d_m(Q, L^2) \leqslant 2^d d_m(G, L^2). \tag{16}$$

Объединяя (15) и (16), находим:

$$d_m(F, L^2) \geqslant 2^{-2d} d_m(Q, L^2) - c(d) N^{-1/2}. \tag{17}$$

Далее,

$$\chi_{(1/4,3/4]}(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{k:|k|=2s+1 \\ s=0,1,\dots}} \frac{(-1)^s e^{2\pi i k x}}{|k|},$$

а, следовательно, разложение функции g в ряд Фурье имеет вид

$$g = \frac{1}{\pi^d} \sum_{k \in A} \frac{(-1)^{\alpha(k)}}{|k_1 \cdot \ldots \cdot k_d|} e^{2\pi i k x} + \sum_{k: k_1 \cdot \ldots \cdot k_d = 0} \widehat{g}_k e^{2\pi i k x}, \tag{18}$$

где $A = 2\mathbb{Z}^d + (1, \dots, 1)$,

$$\alpha(k) = \sum_{j=1}^{d} s_j,$$

если $k = (k_1, \dots, k_d)$, $|k_j| = 2s_j + 1$, $j = 1, \dots, d$, а $\widehat{g}_k$ – коэффициент Фурье функции g.

Из теоремы 1 работы Р. С. Исмагилова [6] (см. также теорему 4 и замечание в конце работы [6]) вытекает, что

$$d_m(Q, L^2) \geqslant \left(\sum_{j=m+1}^{\infty} \gamma_j^2 \right)^{1/2}, \tag{19}$$

где $\{\gamma_j\}_{j=1}^{\infty}$ – невозрастающая перестановка множества чисел $\left\{|\widehat{g}_k|\right\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$. Так как при $R \geqslant C(d)$

$$\begin{aligned} &\#\Big\{s : \big|(2s_1+1) \cdot \ldots \cdot (2s_d+1)\big| \leqslant R\Big\} \\ &\qquad \geqslant \#\left\{s : s_j > 0,\ s_1 \cdot \ldots \cdot s_d \leqslant \frac{R}{3^d}\right\} \geqslant c'(d) R (\log R)^{d-1}, \end{aligned}$$

то из (19) и (18) вытекает, что

$$d_{\beta(R)}(Q, L^2) \geqslant c(d) \left[\frac{R(\log R)^{d-1}}{R^2} \right]^{1/2} \geqslant c''(d) \left[\frac{\log^{d-1} R}{R} \right]^{1/2}, \tag{20}$$

если $R \geqslant c(d)$ и

$$\beta(R) \equiv \left[\frac{1}{2}\, c_4(d) R (\log R)^{d-1} \right].$$

Применяя для данного m оценку (20) при таком R, что $\beta_{R-1} < m \leqslant \beta_R$, мы находим, что при $m \geqslant c_5(d)$

$$d_m(Q, L^2) \geqslant c_6(d) \frac{(\log m)^{d-1}}{m^{1/2}}\,. \tag{21}$$

Из теоремы 2 и соотношений (13), (17), (21) вытекает, что при $N \geqslant c_7(d)$

$$\begin{aligned} \left\| S_\Omega^* \left(\sum_{k \in I} \varphi_k \right) \right\|_{\ell_1} &\geqslant c \sum_{m \geqslant 1} \frac{d_{m-1}(\widetilde{\Omega})}{m^{1/2}} = c N^{d/2} \sum_{m \geqslant 1} \frac{d_{m-1}(F, L^2)}{m^{1/2}} \\ &\geqslant c N^{d/2} \sum_{m=c_8(d)}^{N} \frac{c_9(d)(\log m)^{d-1}}{m} \geqslant c_9(d) N^{d/2} (\log N)^d. \end{aligned}$$

Утверждение следствия 2 при $N \leqslant c_7(d)$ вытекает из неравенства

$$\left\| \sum_{k \in I} \varphi_k \right\|_{\ell_1} \geqslant \left\| \sum_{k \in I} \varphi_k \right\|_{\ell_2} = N^{d/2}.$$

Следствие 2 доказано.

Следующий, завершающий эту работу, результат, может рассматриваться как конечномерный, количественный аналог теоремы А. М. Олевского (см. [1]) о том, что для любой полной в $L^2(0,1)$ О.Н.С. $\{\varphi_k\}$ с $\varphi_k \in L^\infty(0,1)$, $k = 1, 2, \ldots$, найдется функция $f \in L^1$, для которой $S^* f \notin L^1$.

Теорема 3. *Пусть* $\{\varphi_k\}_{k=1}^N$ – *О.Н.С. в* L_2^N *такая, что для некоторой постоянной* M

$$\sum_{k=1}^n \varphi_k^2(x) \leqslant Mn$$

для всех $x \in \{1, 2, \dots, N\}$ *и* $n = 1, 2, \dots, N$. *Тогда найдется множество* $E \subset \{1, \dots, N\}$, $|E| \geqslant c(M)$, *такое, что для* $y \in E$

$$\left\| S_N^* \left(\sum \varphi_k(y) \varphi_k \right) \right\|_{L_1^N} \geqslant c'(M) \log N,$$

где $c(M) > 0$, $c'(M) > 0$, *и* $|E| \equiv (\#E)/N$.

Нам потребуются две простые леммы.

Лемма 3. *Предположим, что для некоторых* A, $\alpha > 0$ *и функции* $g \geqslant 0$ *мы имеем* $\|g\|_\infty \leqslant A$ *и* $\|g\|_2^2 \geqslant \alpha A$. *Для* $k \in \mathbb{N}$, *положим* $I_k = (2^{-k}A, 2^{-k+1}A]$ *и* $F_k = g^{-1}(I_k)$. *Тогда существует такое* $k \in \mathbb{N}$, *что*

$$\int_{F_k} g \geqslant \frac{k\alpha}{4}.$$

Доказательство. По условию леммы

$$\begin{aligned}\alpha A \leqslant \int g^2 = \sum_{k \geqslant 1} \int_{F_k} g^2 \leqslant \sum_{k \geqslant 1} 2^{-k+1} A \int_{F_k} g \\ = A \sum_{k \geqslant 1} k 2^{-k+1} \left(\frac{1}{k} \int_{F_k} g \right) \leqslant A \left(\sum_{k \geqslant 1} k 2^{-k+1} \right) \sup_{k \geqslant 1} \left(\frac{1}{k} \int_{F_k} g \right),\end{aligned}$$

и остается сравнить первое и последнее выражение.

Лемма 4. *Пусть* $A > 0$, $I_k = (2^k A, 2^{k+1} A]$ *для* $k \in \mathbb{Z}$ *и функции* h_k, $k \in \mathbb{Z}$, *таковы, что все ненулевые значения* h_k *лежат в* I_k. *Тогда*

$$\int \sup_k h_k \geqslant \frac{1}{3} \sum_k \int h_k.$$

Доказательство. Положим для $k \in \mathbb{Z}$ и $t > 0$: $\lambda_k(t) = \bigl|\{h_k > t\}\bigr|$, тогда $\displaystyle\int h_k = \int_0^\infty \lambda_k(t)\,dt$. Так как $\bigl|\{\sup_k h_k > t\}\bigr| \geqslant \sup_k \lambda_k(t)$ для $t \in (0,\infty)$, то достаточно показать, что

$$\int_0^\infty \sup_j \lambda_j(t)\,dt \geqslant \frac{1}{3}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_0^\infty \lambda_k(t)\,dt. \tag{22}$$

Отметим, что для $t \in I_k$ $\sup_j \lambda_j(t) \geqslant \max\bigl\{\lambda_k(t), \lambda_{k+1}(2^{k+1}A)\bigr\}$. Используя это неравенство для оценки снизу левой части в (22) и замечая, что

$$\int_0^\infty \lambda_k(t)\,dt = \int_0^{2^{k+1}A} \lambda_k(t)\,dt = \int_{I_k} \lambda_k(t)\,dt + \lambda_k(2^kA)2^kA \equiv a_k + b_k,$$

мы сводим (22) к неравенству

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \max\biggl\{a_k, \frac{1}{2}\,b_{k+1}\biggr\} \geqslant \frac{1}{3}\sum_{k\in\mathbb{Z}}(a_k + b_k).$$

Остается использовать тот факт, что $\max\bigl\{a, \frac{1}{2}b\bigr\} \geqslant \frac{1}{3}(a+b)$ для $a, b \geqslant 0$; (22) и, следовательно, лемма 4 доказаны.

Доказательство теоремы 3. Отметим, что для любого $m \leqslant N/2$

$$\int \sum_{k=m+1}^{2m} |\varphi_k|^2 = m \quad \text{и} \quad \sum_{k=m+1}^{2m} |\varphi_k|^2 \leqslant 2Mm.$$

По лемме 2, примененной к $f = (2Mm)^{-1}\sum_{k=m+1}^{2m} |\varphi_k|^2$, имеем: если

$$E_m = \biggl\{y : \sum_{k=m+1}^{2m} \bigl|\varphi_k(y)\bigr|^2 \geqslant \frac{m}{2}\biggr\},$$

то $|E_m| \geqslant |4M|^{-1}$. Предположим теперь, что $y \in E_m$ для некоторого m и положим $g = \Bigl|\sum_{k=m+1}^{2m} \varphi_k(y)\varphi_k\Bigr|$, тогда $\|g\|_2 \geqslant \sqrt{m/2}$ и $\|g\|_\infty \leqslant 2Mm$.

Если $y \in E_{2^{s_j}}$, $j = 1, \dots, t$, для некоторых натуральных $s_1 < s_2 < \dots < s_t$, то по лемме 3 найдутся функции $g_j = \Bigl|\sum_{i=2^{s_j}+1}^{2^{s_j+1}} \varphi_i(y)\varphi_i\Bigr|$, натуральные k_j и интервалы $I_j = (M \cdot 2^{s_j - k_j + 1}, M \cdot 2^{s_j - k_j + 2}]$ такие, что

$$\int_{g_j^{-1}(I_j)} g_j \geqslant \beta k_j, \tag{23}$$

где $\beta = (16M)^{-1}$. Если некоторый интервал I появляется в последовательности $I_1, \dots, I_t$ $r\ (>1)$ раз, то соответствующие индексы k_j попарно различны, и один из интегралов (23), соответствующих I, должен быть $\geqslant \beta r$. В любом случае найдется подпоследовательность набора $g_1, g_2, \dots, g_t$, для которой соответствующие интервалы I_j попарно не пересекаются и отвечающая им сумма интегралов (23) не меньше βt. Из леммы 4 вытекает тогда, что

$$\int \max_{j\leqslant t} g_j \geqslant \frac{1}{3}\,\beta t = (48M)^{-1} t.$$

Так как очевидно

$$S^*\biggl(\sum_{k=1}^{N} \varphi_k(y)\varphi_k\biggr) \geqslant \frac{1}{2}\max_{j\leqslant t} g_j,$$

то теорема 3 будет доказана, если мы покажем, что "достаточно много" точек y принадлежит по меньшей мере $c_2 \log N$ различным множествам E_{2^s}, где $c_2 = c_2(M)$. Но это легко выводится из неравенства $|E_{2^s}| \geqslant (4M)^{-1}$ при помощи рассуждений, уже использованных в доказательстве следствия 1.

Математический институт
им. В.А. Стеклова РАН, Москва;
Case Western Reserve University,
Cleveland

Поступило
27.01.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Олевский А. М. Fourier series with respect to General Orthogonal Systems. Berlin: Springer, 1975.
[2] Кашин Б. С., Саакян А. А. Ортогональные ряды. М.: Наука, 1984.
[3] Стечкин С. Б. Об абсолютной сходимости ортогональных рядов // ДАН СССР. 1955. Т. 102. №1. С. 37–40.
[4] Харди Г., Литтлвуд Д., Полиа Г. Неравенства. М.: ИЛ, 1948.
[5] Стечкин С. Б. О наилучших приближениях заданных классов функций любыми полиномами // Успехи матем. наук. 1954. Т. 9. №1. С. 133–134.
[6] Исмагилов Р. С. Об n-мерных поперечниках компактов в гильбертовом пространстве // Функц. анал. и его прилож. 1968. Т. 2. №2. С. 32–39.
[7] Темляков В. Н. Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Труды МИАН. Т. 178, 1986.