Математические заметки

ТОМ 64 ВЫПУСК 4 ОКТЯБРЬ 1998

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ОБ ОДНОЙ НОРМЕ И СВЯЗАННЫХ С НЕЙ ПРИЛОЖЕНИЯХ

Б. С. Кашин, В. Н. Темляков

1. Введение. Пусть μ – нормированная мера Лебега на единичной окружности. Для функции $f \in L^1(d\mu)$ с рядом Фурье

$$f \sim \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k(f,x),$$

$$\delta_0 = \int_0^{2\pi} f\,d\mu, \qquad \delta_k = \sum_{2^{k-1} \leqslant |n| < 2^k} \widehat{f}(n) e^{i(n,x)}, \quad k = 1,2,\dots,$$

рассмотрим величину

$$\|f\|_{\mathrm{QC}} \equiv \int_0^1 \biggl\| \sum_{k=0}^{\infty} r_k(\omega)\delta_k(f,x) \biggr\|_{L^\infty(d\mu)} d\omega, \tag{1}$$

где $\{r_k(\omega)\}_{k=0}^{\infty}$ – система Радемахера. *Пространством квазинепрерывных функций* (*quasi-continuous* – отсюда обозначение $\|\cdot\|_{\mathrm{QC}}$) назовем замыкание множества тригонометрических полиномов по норме (1).

Пространства квазинепрерывных функций вводятся и в многомерном случае. Это может быть сделано несколькими способами. Ниже рассмотрим один из вариантов: замыкание множества тригонометрических полиномов d переменных ($d = 2,3,\dots$) по норме

$$\|f\|_{\mathrm{QC}} \equiv \bigl\| \|f(\,\cdot\,,x^1)\|_{\mathrm{QC}} \bigr\|_{\infty}, \tag{2}$$

где по определению для $x = (x_1,\dots,x_d) \in \mathbb{T}^d$ полагаем $x^1 = (x_2,\dots,x_d) \in \mathbb{T}^{d-1}$. Иными словами, в (2) берется QC-норма по переменной x_1 и sup-норма по остальным переменным.

В работе установлены неравенства для действительных тригонометрических полиномов в нормах (1), (2). Отметим, что наш интерес к рассмотрению этих норм связан, прежде всего, с возможными их приложениями к исследованию аппроксимационных свойств классов функций многих переменных (см., в частности, п. 3 ниже). Помимо изучения норм (1), (2), в этой работе (см. п. 4) проведено сравнение нормы $\|t\|_\infty$ и дискретной нормы

$$\|t\|_{\infty,\Omega} \equiv \max_{x \in \Omega} |t(x)| \tag{3}$$

($\Omega \subset \mathbb{T}^d$ – конечное множество точек) на подпространствах $T(Q_k)$ тригонометрических полиномов со спектром в ступенчатых гиперболических крестах:

$$Q_k \equiv \bigcup_{\|s\|_1 \leqslant k} \rho(s),$$

$$\rho(s) \equiv \bigl\{ n = (n_1,\dots,n_d) \subset \mathbb{Z}^d : [2^{s_j-1}] \leqslant |n_j| < 2^{s_j},\ j = 1,\dots,d \bigr\}.$$

2. Неравенства.

Теорема 1. *Для любой* $f \in L^1(d\mu)$ *справедливо неравенство*

$$\|f\|_{\mathrm{QC}} \geqslant \frac{1}{8} \sum_{s=0}^{\infty} \|\delta_{2s}(f,x)\|_{L^1(d\mu)}. \tag{4}$$

Замечание 1. Легко видеть, что при доказательстве теоремы 1 можно ограничиться случаем, когда f – тригонометрический полином (мы считаем, что (4) заведомо имеет место, если $\|f\|_{\mathrm{QC}} = \infty$).

Замечание 2. Из теоремы 1 и результата П. Г. Григорьева [1] вытекает, что

$$\sup_{t \in T(2^k)} \frac{\|t\|_{\mathrm{QC}}}{\|t\|_\infty} \geqslant c\sqrt{k}\,.$$

С другой стороны, из результатов о лакунарных рядах несложно вывести, что

$$\sup_{t \in T(2^k)} \frac{\|t\|_\infty}{\|t\|_{\mathrm{QC}}} \geqslant c_1\sqrt{k};$$

здесь $T(m)$ – пространство действительных тригонометрических полиномов степени $\leqslant m$.

Замечание 3. В двумерном случае справедливо неравенство (см. [2])

$$\Bigl\| \sum_{s \in Y_k^2} \delta_s(f) \Bigr\|_\infty \geqslant c \sum_{s \in Y_k^2} \|\delta_s(f)\|_1, \tag{5}$$

где по определению для четных k

$$Y_k^d = \bigl\{ s = (2k_1, \dots, 2k_d),\ k_1 + k_2 + \dots + k_d = k/2 \bigr\}, \qquad d = 1, 2, \dots,$$
$$\delta_s(f) = \sum_{n \in \rho(s)} \widehat{f}(n) e^{i(n,x)}.$$

В работе [1] (см. также замечание 2 выше) построен пример, показывающий, что аналог неравенства (5) в одномерном случае не имеет места. Вопрос о справедливости соответствующих аналогов оценки (5) для $d \geqslant 3$ остается открытым (см. обсуждение этого вопроса в [3]). Мы приведем для d-мерного случая неравенство, похожее на (5), но с нормой $\|\cdot\|_{\mathrm{QC}}$ вместо $\|\cdot\|_\infty$.

Теорема 2. *Пусть для четного* k *задан полином* d *переменных* $(d = 2, 3, \dots)$ *вида*

$$f = \sum_{s_1 \in Z_k} \sum_{\|s^1\|_1 = k - s_1} \delta_s(f), \qquad s^1 = (s_2, \dots, s_d), \quad Z_k = \{2l\}_{l=0}^{k/2}$$

обладающий свойством: для некоторого $G \subset Z_k$

1) $\|\delta_s(f)\|_4 \leqslant 1$, *если* $s_1 \in G$;
2) *справедлива оценка*

$$\sum_{s_1 \in G} \sum_{\|s^1\|_1 = k - s_1} \|\delta_s(f)\|_2^2 \geqslant bk^{d-1},$$

где $b > 0$ *– абсолютная постоянная.*

Тогда

$$\|f\|_{\mathrm{QC}} \geqslant ck^{d/2}, \qquad c = c(b) > 0.$$

Следующий результат показывает, что и в одномерном случае при дополнительных ограничениях на полином f его равномерная норма допускает оценку снизу, аналогичную (4).

Теорема 3. *Для любого полинома вида*

$$f=\sum_{k=l+1}^{2l}p_k(x)\cos 4^k x,$$

где $p_k\in T(2^l)$, $k=l+1,\dots,2l$, *справедливо неравенство*

$$\|f\|_\infty\geqslant c\sum_{k=l+1}^{2l}\|p_k\|_1,\qquad c>0.$$

3. Оценки энтропийных чисел и поперечников по Колмогорову. Ниже сохраняются обозначения и определения, использованные в нашей совместной работе [4] при изучении аппроксимационных характеристик классов функций d переменных.

Теорема 4. *При* $r>\max(1/q,1/2)$ *справедливы соотношения*

$$\begin{aligned}&\varepsilon_m(H_q^r,\mathrm{QC})\asymp m^{-r}(\log m)^{r(d-1)+d/2},\\ &\varepsilon_m(W_q^r,\mathrm{QC})\asymp m^{-r}(\log m)^{r(d-1)+1/2},\end{aligned}\qquad 1<q\leqslant\infty.$$

Теорема 5. *При* $r>1/2$ *и* $2\leqslant q\leqslant\infty$ *справедливы соотношения*

$$\begin{aligned}&d_m(H_q^r,\mathrm{QC})\asymp m^{-r}(\log m)^{r(d-1)+d/2},\\ &d_m(W_q^r,\mathrm{QC})\asymp m^{-r}(\log m)^{r(d-1)+1/2}.\end{aligned}$$

Неравенство (5) применялось в [2] для получения оценок снизу энтропийных чисел функциональных классов. С помощью теоремы 2 аналогичные рассуждения позволяют установить оценки снизу в теореме 4. Оценки снизу в теореме 5 вытекают из теоремы 4 и известных неравенств, связывающих энтропийные числа ε_m и поперечники по Колмогорову d_m (см., например, [5]). Оценки сверху в теоремах 4, 5 могут быть установлены аналогично соответствующим оценкам сверху в метрике L^∞ из [6].

Теорема 3 позволяет получить правильный порядок энтропийных чисел и поперечников по Колмогорову классов LG^r функций одной переменной с гладкостью логарифмического типа. Определим классы LG^r, $r>0$, условием на двоичные блоки ряда Фурье входящих в него функций:

$$LG^r=\bigl\{f\in L^\infty:\|\delta_s(f)\|_\infty\leqslant(1+s)^{-r},\ s=0,1,\dots\bigr\}.$$

Теорема 6. *Пусть* $r>1$. *Справедливы соотношения* $(m\to\infty)$

$$\varepsilon_m(LG^r,L^p)\asymp d_m(LG^r,L^p)\asymp\begin{cases}(\log m)^{-r+1} & \text{при } p=\infty,\\ (\log m)^{-r+1/2} & \text{при } 1\leqslant p<\infty.\end{cases}$$

В частности, теорема 6 показывает, что порядок $\varepsilon_m(\,\cdot\,,L^p)$ и $d_m(\,\cdot\,,L^p)$ меняется скачкообразно при переходе от $p<\infty$ к $p=\infty$. Подобное явление в двумерном случае имеет место для классов H_∞^r (см. [2], [3]).

4. Дискретная L^∞-норма для полиномов d переменных из $T(Q_k)$. Хорошо известно, что для пространства $T(\Pi)$ тригонометрических полиномов d переменных со спектром в параллелепипеде Π найдется конечное множество Ω с числом элементов $|\Omega|$ по порядку равным размерности $T(\Pi)$, для которого имеет место эквивалентность

$$\|t\|_{\infty,\Omega}\asymp\|t\|_\infty,\qquad t\in T(\Pi)$$

(см. также (3)).

Сформулированная ниже теорема 7 показывает, что совершенно иначе обстоит дело для пространств $T(Q_k)$: эквивалентность норм $\|t\|_{\infty,\Omega}$ и $\|t\|_\infty$ для полиномов из $T(Q_k)$ может иметь место, только если число точек в Ω значительно превосходит размерность $\dim T(Q_k)\asymp 2^k k^{d-1}$: $|\Omega|\geqslant 2^{(1+\gamma)k}$, $\gamma>0$.

Теорема 7. *Пусть множество* $\Omega \subset \mathbb{T}^d$ *обладает свойством: для любого полинома* $t \in T(Q_k)$

$$\|t\|_\infty \leqslant bk^\alpha \|t\|_{\infty,\Omega}, \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{2}.$$

Тогда

$$|\Omega| \geqslant c_1 |Q_k| \exp(ck^{1-2\alpha}), \qquad c = c(b) > 0, \quad c_1 = c_1(b) > 0.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Григорьев П. Г. // Матем. заметки. 1997. Т. 61. №6. С. 935–938. **2**. Temlyakov V. N. // J. Complexity. 1995. V. 11. P. 293–307. **3**. Temlyakov V. N. // East J. Approx. 1996. V. 2. №2. P. 253–262. **4**. Кашин Б. С., Темляков В. Н. // Матем. заметки. 1994. Т. 56. №5. С. 57–86. **5**. Lorentz G. G. // Bull. Amer. Math. Soc. 1966. V. 72. P. 903–937. **6**. Белинский Э. С. // Исследования по теории функций многих вещественных переменных. Ярославль: ЯГУ, 1990. С. 22–37.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
Университет Южной Каролины
E-mail: kashin@mi.ras.ru, temlyak@math.sc.edu

Поступило
22.06.98