Современная математика. Фундаментальные направления. Том 25 (2007). С. 58–79

УДК 517.5

ОБ ОДНОЙ НОРМЕ И АППРОКСИМАЦИОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

© 2007 г. **Б. С. КАШИН, В. Н. ТЕМЛЯКОВ**

Аннотация. Введено пространство квазинепрерывных функций, изучены его аппроксимационные характеристики (ε-энтропия и поперечники), установлены неравенства для норм тригонометрических полиномов в этом пространстве. Найдены порядки ε-энтропии и поперечников некоторых классов функций малой гладкости.

Библиография: 23 названия.

1. Введение

В работе изучаются асимптотические характеристики (ε-энтропия и поперечники по Колмогорову) классов функций многих переменных. Рассматриваемые классы задаются ограничением на смешанную производную или условием липшицева типа на смешанную разность. Подобные классы изучаются в теории приближения около сорока лет. Наш интерес к ним связан с важными приложениями в численном интегрировании, численных методах решения дифференциальных уравнений в частных производных (метод редких сеток — sparse grid method), вопросах сложности непрерывных алгоритмов и теории вероятностей. Другим стимулом настоящей работы послужило следующее обстоятельство. Известно, что многие задачи приближения в норме L_p указанных выше классов с ограничением на производную или разность в норме L_q в случае, когда один из параметров p или q принимает значение 1 или ∞, остаются открытыми уже в течение десятилетий. Поэтому, с одной стороны, мы сконцентрировали свое внимание на этих случаях и, с другой стороны, ввели новую норму, близкую к равномерной норме, для которой удалось продвинуться в решении задач, остающихся нерешенными в равномерной норме. Важную роль в проведенном исследовании сыграло изучение тригонометрических полиномов с гармониками из гиперболических крестов.

Приведем краткое описание полученных в работе результатов.

Для любого множества $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ через $\mathcal{T}(\Lambda)$ будем обозначать множество тригонометрических полиномов t вида

$$t(x) = \sum_{k\in\Lambda} c_k e^{i(k,x)}, \qquad x \in \mathbb{T}^d,$$

а в случае, когда множество Λ симметрично относительно начала координат ($\Lambda = -\Lambda$), положим

$$\mathcal{T}_r(\Lambda) = \left\{ t(x) \in \mathcal{T}(\Lambda) : c_k = \overline{c}_{-k},\ k \in \Lambda \right\}.$$

Обозначим для четных n и $d \geqslant 2$

$$Y_n^d = \left\{ s = (2l_1, \dots, 2l_d),\ l_1 + \dots + l_d = n/2,\ l \in \mathbb{Z}_+^d \right\}$$

и для $s \in \mathbb{Z}_+^d$

$$\rho(s) := \left\{ k = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}^d : [2^{s_j - 1}] \leqslant |k_j| < 2^{s_j},\ j = 1, \dots, d \right\}.$$

При $n = 1, 2, \dots$ положим

$$Q_n \equiv \bigcup_{\|s\|_1 \leqslant n} \rho(s), \qquad \Delta Q_{n+1} \equiv Q_{n+1} \setminus Q_n.$$

Пусть μ — нормированная мера Лебега на единичной окружности. Для функции $f \in L^1(d\mu)$ с рядом Фурье

$$f \sim \sum_{s=0}^{\infty} \delta_s(f,x),$$

$$\delta_0 = \int f\,d\mu, \qquad \delta_s = \sum_{2^{s-1} \leqslant |k| < 2^s} \widehat{f}(k) e^{ikx}, \quad s = 1,2,\dots,$$

введем величину

$$\|f\|_{QC} \equiv \int\limits_0^1 \Bigl\| \sum_{s=0}^{\infty} r_s(\omega)\delta_s(f,x) \Bigr\|_{L^\infty(d\mu)} d\omega, \tag{1.1}$$

где $\{r_k(\omega)\}_{k=0}^{\infty}$ — система Радемахера (см. [1, с. 29]). *Пространством квазинепрерывных функций* (*quasicontinuous* — отсюда обозначение $\|\cdot\|_{QC}$) назовем замыкание множества тригонометрических полиномов по норме (1.1).

Пространства квазинепрерывных функций вводятся и в многомерном случае. Это может быть сделано несколькими способами (см. подробнее раздел 5). Ниже мы рассмотрим один из вариантов: замыкание множества тригонометрических полиномов d переменных ($d = 2,3,\dots$) по норме

$$\|f\|_{QC} \equiv \bigl\| \|f(\,\cdot\,, x^1)\|_{QC} \bigr\|_\infty, \tag{1.2}$$

где по определению для $x = (x_1,\dots,x_d) \in \mathbb{T}^d$ полагаем $x^1 = (x_2,\dots,x_d) \in \mathbb{T}^{d-1}$. Иными словами, в (1.2) берется QC-норма по переменной x_1 и sup-норма по остальным переменным.

В работе [2] в связи с задачами теории аппроксимации было установлено следующее неравенство для тригонометрических полиномов двух переменных ($d = 2$): для любых $t_s \in \mathcal{T}(\rho(s))$

$$\Bigl\| \sum_{s \in Y_n^2} t_s \Bigr\|_\infty \geqslant A \sum_{s \in Y_n^2} \|t_s\|_1, \qquad A > 0. \tag{1.3}$$

Отметим, что сходное с (1.3) неравенство для полиномов по системе Хаара было получено ранее в [3] в связи с приложениями к теории гауссовских процессов. В. Н. Темляковым было высказано предположение, что в многомерном случае ($d \geqslant 3$) справедливо неравенство

$$\Bigl\| \sum_{s \in Y_n^d} t_s \Bigr\| \geqslant c(d) n^{-(d-2)/2} \sum_{s \in Y_n^d} \|t_s\|_1, \qquad c(d) > 0, \quad t_s \in \mathcal{T}(\rho(s)), \tag{1.4}$$

однако этот вопрос остается открытым. В данной работе мы доказываем, что во всяком случае справедлив аналог неравенства (1.4) для введенной выше QC-нормы. Более того, в разделе 5 мы отмечаем, что справедлив аналог неравенства (1.4) с более слабой, чем $\|\cdot\|_{QC}$, нормой

$$\|f\|_{QC,L} \equiv \bigl\| \|f(\,\cdot\,, x^1)\|_{QC} \bigr\|_1.$$

Рассмотрение d-мерного случая основано на следующем одномерном неравенстве для QC-нормы.

Теорема 1.1. *Для любой действительной функции $f \in L^1(d\mu)$ справедливо неравенство*

$$\|f\|_{QC} \geqslant \frac{1}{16} \sum_{s=0}^{\infty} \|\delta_s(f)\|_1.$$

Замечание 1.1. Из теоремы 1.1 и результата П. Г. Григорьева [4] вытекает, что

$$\sup_{t \in \mathcal{T}_r(2^k)} \frac{\|t\|_{QC}}{\|t\|_\infty} \geqslant c\sqrt{k}, \qquad c > 0, \quad \mathcal{T}_r(2^k) = \mathcal{T}_r([-2^k, 2^k]).$$

С другой стороны, из результатов о лакунарных рядах можно вывести, что

$$\sup_{t \in \mathcal{T}_r(2^k)} \frac{\|t\|_\infty}{\|t\|_{QC}} \geqslant c_1\sqrt{k}, \qquad c_1 > 0.$$

Соответствующий пример, за который авторы признательны К. И. Осколкову, приведен в конце статьи.

Неравенствам для тригонометрических полиномов посвящен раздел 2. В разделе 3 мы применяем результаты раздела 2 для оценки энтропийных чисел и поперечников по Колмогорову в QC-норме классов функций с ограниченной производной ($W^r_{q,\alpha}$) и классов функций с ограничением на смешанную разность (H^r_q). Напомним определения этих классов.

Пусть $r>0$ и $\alpha\in\mathbb{R}$. Определим одномерное ядро Бернулли формулой

$$F_r(t,\alpha)=1+2\sum_{k=1}^{\infty}k^{-r}\cos\Big(kt-\frac{\alpha\pi}{2}\Big),\qquad t\in(0,2\pi),$$

и многомерное — для $x=(x_1,\dots,x_d)$, $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_d)$ — формулой

$$F_r(x,\alpha)=\prod_{j=1}^{d}F_r(x_j,\alpha_j).$$

Наконец, пусть

$$W^r_{q,\alpha}\equiv\{\,f: f=F_r(\,\cdot\,,\alpha)*\varphi(\,\cdot\,),\ \|\varphi\|_q\leqslant 1\},$$

где $*$ — операция свертки.

Для $r>0$ положим $l=[r]+1$ и рассмотрим операторы $\Delta_h^{l,j}$ взятия l-й разности с шагом h по переменной x_j. Для набора натуральных чисел $e\subset[1,d]$ определим оператор смешанной разности

$$\Delta_t^l(e)=\prod_{j\in e}\Delta_{t_j}^{l,j},\qquad t=(t_1,\dots,t_d),\quad \Delta_t^l(\varnothing)=\mathrm{Id}\,.$$

Тогда

$$H^r_q=\Bigg\{f\in L_q(\mathbb{T}^d):\forall e\subset[1,d],\ \|\Delta_t^l(e)f\|_q\leqslant\prod_{j\in e}|t_j|^r\Bigg\}.$$

Напомним еще два определения, существенных для дальнейшего изложения. Пусть K — компакт в банаховом пространстве X с единичным шаром B_X. Величины

$$d_m(K,X)=\inf_{\{u_i\}_{i=1}^m\subset X}\ \sup_{f\in K}\ \inf_{c_i}\Bigg\|f-\sum_{i=1}^{m}c_iu_i\Bigg\|_X,$$

$$\varepsilon_m(K,X)=\inf\Bigg\{\varepsilon:\exists\,\{u_i\}_{i=1}^q\in X,\ q\leqslant 2^{m-1},\ K\subset\bigcup_{i=1}^{q}\{u_i+\varepsilon B_X\}\Bigg\}$$

($m=1,2,\dots$) называются соответственно *m-м поперечником по Колмогорову* и *m-м энтропийным числом* множества K в пространстве X.

В разделе 3 доказаны, в частности, следующие утверждения.

Теорема 1.2. *При $r>\max(1/q,1/2)$ и $1<q\leqslant\infty$ справедливы соотношения* ($d\geqslant 2$)

$$\varepsilon_m(H^r_q,QC)\asymp m^{-r}(\log m)^{r(d-1)+d/2},$$
$$\varepsilon_m(W^r_q,QC)\asymp m^{-r}(\log m)^{r(d-1)+1/2}.$$

Теорема 1.3. *При $r>1/2$ и $2\leqslant q\leqslant\infty$ справедливы соотношения* ($d\geqslant 2$)

$$d_m(H^r_q,QC)\asymp m^{-r}(\log m)^{r(d-1)+d/2},$$
$$d_m(W^r_q,QC)\asymp m^{-r}(\log m)^{r(d-1)+1/2}.$$

В разделе 4 рассматривается задача об эквивалентности равномерной и равномерной дискретной норм для тригонометрических полиномов с гармониками из гиперболических крестов. Хорошо известно, что для пространства $\mathcal{T}(\Pi)$ тригонометрических полиномов d переменных со спектром в параллелепипеде Π найдется конечное множество Ω с числом элементов $|\Omega|$, по порядку равным размерности $\mathcal{T}(\Pi)$, для которого имеет место эквивалентность

$$\|t\|_\infty\asymp\|t\|_{\infty,\Omega}\equiv\max_{x\in\Omega}|t(x)|,\qquad t\in\mathcal{T}(\Pi).$$

Из полученных в разделе 4 результатов следует, что совершенно иначе обстоит дело для пространств $\mathcal{T}(Q_n)$ в d-мерном случае ($d=2,3,\dots$): эквивалентность норм $\|t\|_\infty$ и $\|t\|_{\infty,\Omega}$ для всех полиномов из $\mathcal{T}(Q_n)$ может иметь место, только если число точек в Ω значительно превосходит размерность $\dim \mathcal{T}(Q_n) \asymp 2^n n^{d-1}$: $|\Omega| \geqslant 2^{(1+\gamma)n}$, $\gamma > 0$.

Более точно, из доказанной в разделе 4 теоремы 4.1 вытекает следующий результат.

Следствие 1.1. *Пусть множество $\Omega \subset \mathbb{T}^d$, $d \geqslant 2$, обладает следующим свойством: для любого полинома $t \in \mathcal{T}(Q_n)$*

$$\|t\|_\infty \leqslant bn^\alpha \|t\|_{\infty,\Omega}, \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{2}.$$

Тогда

$$|\Omega| \geqslant c_1 |Q_n| \exp(cn^{1-2\alpha}), \qquad c = c(b,\alpha,d), \quad c_1 = c_1(d).$$

Наконец, раздел 5 содержит ряд замечаний о свойствах QC-нормы.

Основные результаты статьи были анонсированы в [5].

2. Неравенства для тригонометрических полиномов

Основная цель этого раздела — доказательство двух неравенств для QC-нормы (теоремы 1.1 и 2.1). Сначала приведем некоторые простые свойства этой нормы.

Если $f \in L^1(d\mu)$ и

$$F(x,\omega) = \sum_{s=0}^{\infty} r_s(\omega)\delta_s(f,x), \tag{2.1}$$

то

$$\inf_\omega \|F(\,\cdot\,,\omega)\|_\infty \leqslant \|f\|_{QC} \leqslant \sup_\omega \|F(\,\cdot\,,\omega)\|_\infty, \tag{2.2}$$

$$\|f\|_{QC} \geqslant \left\| \int_0^1 |F(x,\omega)|\,d\omega \right\|_\infty \gg \left\| \left(\sum_s |\delta_s(f,x)|^2 \right)^{1/2} \right\|_\infty, \tag{2.3}$$

$$\|f\|_{QC} \leqslant \sum_s \|\delta_s(f)\|_\infty \equiv \|f\|_{B_{\infty,1}}. \tag{2.4}$$

Докажем теперь теорему 1.1, сформулированную во введении. Эта теорема непосредственно вытекает из следующей леммы.

Лемма 2.1. *Пусть $P_n \subset \mathbb{Z}^+$ обозначает арифметическую прогрессию вида $4l+b$, $l = 0,\dots,n$, $b \in \{1,2,3,4\}$. Тогда для любого действительного тригонометрического полинома f имеем*

$$\|f\|_{QC} \geqslant \frac{1}{4} \sum_{s\in P_n} \|\delta_s(f)\|_1 + |\widehat{f}(0)|.$$

Доказательство. Пусть $U_s = V_{2^s} - V_{2^{s-2}}$, $s \geqslant 2$, $U_1 = 2\cos x$, $U_0 \equiv 1$, где V_k — ядро Валле Пуссена:

$$V_k(x) = \frac{1}{k} \sum_{l=k}^{2k-1} \sum_{|\nu|\leqslant l} e^{i\nu x}, \qquad k \geqslant 1.$$

Тогда $\deg U_s < 2^{s+1}$ и для $s \geqslant 1$

$$\widehat{U}_s(k) = 1, \quad \text{если} \quad 2^{s-1} \leqslant |k| \leqslant 2^s,$$
$$\widehat{U}_s(k) = 0, \quad \text{если} \quad |k| \leqslant 2^{s-2}.$$

Далее, пользуясь известной оценкой $\|V_k\|_1 \leqslant 2$, получаем $\|U_s\|_1 \leqslant 4$.

Предположим, не ограничивая общности, что $\widehat{f}(0) \geqslant 0$, и для функции $f = \sum_s \delta_s(f)$ определим полиномы

$$g_s = (\operatorname{sign}\delta_s(f)) * U_s.$$

Тогда $\|g_s\|_\infty \leqslant 4$ и, используя обозначение

$$\langle f,g\rangle \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} fg\,dx \equiv \int fg\,d\mu,$$

находим, что

$$\langle \delta_s(f), g_s \rangle = \langle \delta_s(f), \operatorname{sign} \delta_s(f) \rangle = \|\delta_s(f)\|_1. \tag{2.5}$$

Рассмотрим произведение Рисса

$$\Phi(x,t) = \prod_{s \in P_n} \left(1 + \frac{1}{4}\, g_s(x) r_s(t)\right).$$

Это произведение может быть представлено в виде

$$\Phi(x,t) = 1 + \frac{1}{4} \sum_{s \in P_n} g_s(x) r_s(t) + \sum_e w_e(x,t),$$

где $e \subset P_n$, $|e| \geqslant 2$ и

$$w_e(x,t) = \prod_{s \in e} \frac{1}{4}\, g_s(x) r_s(t). \tag{2.6}$$

Изучим сначала $\Phi(x,t)$ как функцию от x при фиксированном t. В силу неравенства $\|g_s\|_\infty \leqslant 4$ функция $\Phi(\,\cdot\,,t)$ неотрицательна. Докажем, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(x,t)\, dx = 1.$$

Из определения $g_s(x)$ вытекает, что $\widehat{g}_s(0) = 0$ для всех $s \in P_n$.

Отметим еще, что для любого e, $|e| \geqslant 2$, нулевой коэффициент Фурье функции (переменной x) $w_e(x,t)$ равен нулю. Действительно, пусть $e = \{s_1 > s_2 > \dots > s_m\} \subset P_n$. Тогда разложение Фурье для $w_e(x,t)$ не содержит частот, по модулю меньших чем

$$2^{s_1-2} - 2^{s_2+1} - \dots - 2^{s_m+1} \geqslant 2^{s_1} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) > 0.$$

Таким образом, для каждого t

$$\|\Phi(\,\cdot\,,t)\|_1 = 1.$$

Изучим теперь $\Phi(x,t)$ как функцию от t при фиксированном x. Из (2.6) вытекает, что при любом фиксированном x функции (переменной t) $w_e(x,t)$, $e \subset P_n$, $|e| \geqslant 2$, ортогональны функциям Радемахера $r_s(t)$, $s = 0, 1, \dots$ (и, кроме того, попарно ортогональны как различные функции Уолша). Поэтому (см. также (2.1) и (2.5)) имеет место равенство

$$\begin{aligned}
I \equiv \int_0^1 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x,t)\Phi(x,t)\, dx\, dt &= \frac{1}{2\pi} \sum_s \int_0^1 r_s(t) \int_0^{2\pi} \delta_s(f,x)\Phi(x,t)\, dx\, dt = \\
&= \sum_s \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \delta_s(f,x) \int_0^1 r_s(t)\Phi(x,t)\, dt\, dx = \widehat{f}(0) + \sum_{s \in P_n} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \delta_s(f,x) g_s(x)\, dx = \\
&= |\widehat{f}(0)| + \frac{1}{4} \sum_{s \in P_n} \|\delta_s(f)\|_1.
\end{aligned}$$

Далее, для любого t

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x,t)\Phi(x,t)\, dx \leqslant \|F(\,\cdot\,,t)\|_\infty \|\Phi(\,\cdot\,,t)\|_1 = \|F(x,t)\|_\infty.$$

Следовательно,

$$I \leqslant \int_0^1 \|F(\,\cdot\,,t)\|_\infty\, dt,$$

что доказывает лемму 2.1 $\square$

Перейдем теперь к многомерному случаю. Определим следующую норму функции f, зависящей от d переменных ($d = 2, 3, \dots$):

$$\|f\|_{QC} = \big\| \|f(\,\cdot\,, x^1)\|_{QC} \big\|_\infty ,$$

т. е. по переменной x_1 мы берем QC-норму, а по остальным переменным — L_∞-норму.

Теорема 2.1. *Для любого полинома $f \in \mathcal{T}_r(\Delta Q_n)$, обладающего свойствами*

1) $\|\delta_s(f)\|_4 \leqslant 1$ *для любого s, $\|s\|_1 = n$, где* $\delta_s = \sum\limits_{k \in \rho(s)} \widehat{f}(k) e^{i(k,x)}$,

2) $\|f\|_2 \gg n^{(d-1)/2}$,

справедливо неравенство

$$\|f\|_{QC} \gg n^{d/2}.$$

Доказательство. Оценим $\|f\|_2^2$ через $\|f\|_{QC}$. Имеем

$$\|f\|_2^2 = \sum_{s_1=0}^{n} \Bigg\| \sum_{\|s^1\|_1 = n - s_1} \delta_s(f) \Bigg\|_2^2, \qquad s^1 = (s_2, \dots, s_d).$$

Используя неравенство $\|g\|_2 \leqslant \|g\|_1^{1/3} \|g\|_4^{2/3}$, продолжаем оценку:

$$\leqslant \sum_{s_1=0}^{n} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{d-1} \int\limits_{\mathbb{T}^{d-1}} \Bigg\| \sum_{\|s^1\|_1 = n - s_1} \delta_s(f, \,\cdot\,, x^1) \Bigg\|_1^{2/3} \Bigg\| \sum_{\|s^1\|_1 = n - s_1} \delta_s(f, \,\cdot\,, x^1) \Bigg\|_4^{4/3} dx^1.$$

Пусть

$$f_{s_1} = \sum_{\|s^1\|_1 = n - s_1} \delta_s(f).$$

Применяя неравенство Гёльдера с показателями 3/2 и 3, получаем

$$\sum_{s_1=0}^{n} \|f_{s_1}(\,\cdot\,, x^1)\|_1^{2/3} \|f_{s_1}(\,\cdot\,, x^1)\|_4^{4/3} \leqslant \left(\sum_{s_1=0}^{n} \|f_{s_1}(\,\cdot\,, x^1)\|_1 \right)^{2/3} \left(\sum_{s_1=0}^{n} \|f_{s_1}(\,\cdot\,, x^1)\|_4^4 \right)^{1/3}.$$

По теореме 1.1 для каждого x^1

$$\sum_{s_1=0}^{n} \|f_{s_1}(\,\cdot\,, x^1)\|_1 \leqslant 16 \|f(\,\cdot\,, x^1)\|_{QC} \leqslant 16\, \|f\|_{QC}.$$

Таким образом, находим, что

$$\|f\|_2^2 \leqslant \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{d-1} (16\, \|f\|_{QC})^{2/3} \int\limits_{\mathbb{T}^{d-1}} \left(\sum_{s_1=0}^{n} \|f_{s_1}(\,\cdot\,, x^1)\|_4^4 \right)^{1/3} dx^1. \tag{2.7}$$

Оценим второй сомножитель в правой части неравенства (2.7). Используя неравенство

$$\|g\|_1 \leqslant \|g\|_3,$$

получаем

$$A \equiv \int\limits_{\mathbb{T}^{d-1}} \left(\sum_{s_1=0}^{n} \|f_{s_1}(\,\cdot\,, x^1)\|_4^4 \right)^{1/3} dx^1 \leqslant \left(\int\limits_{\mathbb{T}^{d-1}} \sum_{s_1=0}^{n} \|f_{s_1}(\,\cdot\,, x^1)\|_4^4 dx^1 \right)^{1/3}.$$

Применяя неравенство

$$\|g\|_4 \leqslant C \left(\sum_{s} \|\delta_s(g)\|_4^2 \right)^{1/2},$$

которое является следствием теоремы Литтлвуда—Пэли, имеем

$$\int\limits_{\mathbb{T}^{d-1}} \|f_{s_1}(\,\cdot\,,x^1)\|_4^4 dx^1 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}^{d-1}} |f_{s_1}(x,x^1)|^4\,dx^1\,dx_1 \ll \int\limits_0^{2\pi}\Biggl(\sum_{s^1\colon \|s^1\|_1=n-s_1}\|\delta_s(f,x_1,\,\cdot\,)\|_4^2\Biggr)^2 dx_1 \ll$$

$$\ll \Bigl\|\sum_{s^1}\|\delta_s(f,x_1,\,\cdot\,)\|_4^2\Bigr\|_{2(x_1)}^2 \ll \Bigl(\sum_{s^1}\bigl\|\|\delta_s(f,x_1,\,\cdot\,)\|_4^2\bigr\|_{2(x_1)}\Bigr)^2 = C\Bigl(\sum_{s^1}\|\delta_s(f)\|_4^2\Bigr)^2.$$

Таким образом,

$$A \leqslant C\Biggl(\sum_{s_1=0}^{n}\Biggl(\sum_{s^1\colon\|s^1\|_1=n-s_1}\|\delta_s(f)\|_4^2\Biggr)^2\Biggr)^{1/3}.$$

Учитывая условие 1), мы получаем

$$A \leqslant C\Bigl(n\bigl(n^{d-2}\bigr)^2\Bigr)^{1/3} = C\,n^{2d/3-1}.$$

В итоге из (2.7) и условия 2) теоремы 2.2 получаем

$$\|f\|_{QC} \gg n^{d/2},$$

что и требовалось доказать. □

Докажем еще одно неравенство для тригонометрических полиномов одной переменной.

Теорема 2.2. *Для любого полинома вида*

$$f = \sum_{k=l+1}^{2l} p_k(x)\cos 4^k x,$$

где $p_k \in \mathcal{T}_r(2^l)$, $k = l+1,\dots,2l$, $l = 1,2,\dots$, *справедливо неравенство*

$$\|f\|_\infty \geqslant c\sum_{k=l+1}^{2l}\|p_k\|_1, \qquad c>0.$$

Доказательство. Рассмотрим полиномы

$$g_k = (\operatorname{sign} p_k) * V_{2^l}, \qquad k = l+1,\dots,2l.$$

Тогда

$$\langle p_k, g_k\rangle = \|p_k\|_1, \qquad \|g_k\|_\infty \leqslant 2$$

и произведение Рисса

$$\Phi(x) = \prod_{k=l+1}^{2l}\Bigl(1+\frac12\,g_k(x)\cos 4^k x\Bigr)$$

представляет неотрицательную функцию. Докажем, что $\Phi(x)$ имеет вид

$$\Phi(x) = 1 + \frac12\sum_{k=l+1}^{2l} g_k(x)\cos 4^k x + t(x), \tag{2.8}$$

где слагаемое $t(x)$ ортогонально подпространству

$$L = \Biggl\{a + \sum_{k=l+1}^{2l} t_k(x)\cos 4^k x,\ t_k \in \mathcal{T}_r(2^{l+1}),\ a\in\mathbb{R}\Biggr\}.$$

В самом деле, $t(x)$ содержит слагаемые вида ($m \geqslant 2$)

$$w(x) = 2^{-m}\prod_{i=1}^{m} g_{k_i}(x)\cos 4^{k_i}x = 2^{-m}\Bigl(\frac12\cos(4^{k_1}+4^{k_2})x + \frac12\cos(4^{k_1}-4^{k_2})x\Bigr)\prod_{i=3}^{m}\cos 4^{k_i}x\prod_{i=1}^{m} g_{k_i}(x),$$

где $k_1 > k_2 > \dots > k_m > l$. Для частот w, соответствующих ненулевым коэффициентам Фурье функции $w(x)$, имеем

$$|w - 4^{k_1} - 4^{k_2}| \leqslant 4^{k_3} + \dots + 4^{k_m} + m2^{l+1}$$

или

$$|w - 4^{k_1} + 4^{k_2}| \leqslant 4^{k_3} + \dots + 4^{k_m} + m2^{l+1}.$$

Следовательно,

$$4^{k_2} - 4^{k_3} - \dots - 4^{k_m} - m2^{l+1} \leqslant |w - 4^{k_1}| \leqslant 4^{k_2} + \dots + 4^{k_m} + m2^{l+1},$$

т. е.

$$4^{k_2}\frac{2}{3} - l\,2^{l+1} \leqslant |w - 4^{k_1}| \leqslant 4^{k_2}\frac{4}{3} + l\,2^{l+1}.$$

Оценка сверху гарантирует, что функция $w(x)$ ортогональна 1 и всем $t_k(x)\cos 4^k x$, $t_k \in \mathcal{T}_r(2^{l+1})$, $k \neq k_1$. Оценка снизу гарантирует (при $l \geqslant 3$), что $w(x)$ ортогональна $t_{k_1}(x)\cos 4^{k_1}x$, $t_{k_1} \in \mathcal{T}_r(2^{l+1})$. Представление (2.8) установлено. Из (2.8), в частности, следует, что $\|\Phi\|_1 = 1$.

Учитывая (2.8), для скалярного произведения $\langle f, \Phi\rangle$ имеем равенство

$$\langle f, \Phi\rangle = \frac{1}{2}\sum_{k=l+1}^{2l}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2 4^k x\, p_k(x)g_k(x)\,dx. \tag{2.9}$$

При этом $\cos^2 4^k x = \dfrac{1}{2}(1 + \cos(2\cdot 4^k x))$ и

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p_k(x)g_k(x)\cos^2 4^k x\,dx = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} p_k(x)g_k(x)\,dx = \frac{1}{2}\,\|p_k\|_1, \tag{2.10}$$

$k = l+1, \dots, 2l$. С другой стороны,

$$\langle f, \Phi\rangle \leqslant \|f\|_\infty\|\Phi\|_1 = \|f\|_\infty. \tag{2.11}$$

Собирая (2.9)—(2.11), находим, что

$$\|f\|_\infty \geqslant \frac{1}{4}\sum_{k=l+1}^{2l}\|p_k\|_1.$$

□

3. Оценки энтропийных чисел и колмогоровских поперечников

В этом разделе доказываются теоремы 1.2 и 1.3, сформулированные во введении. Но предварительно мы находим порядки энтропийных чисел и поперечников классов функций одной переменной логарифмической гладкости. Доказательство в одномерном случае технически проще, хотя идейно близко к доказательству теорем 1.2 и 1.3 (см. также [2]).

Мы рассматриваем классы функций LG^r, которые задаются условием на равномерную норму двоичных блоков $\delta_s(f)$:

$$LG^r = \left\{ f \in L^\infty(\mathbb{T}) : \|\delta_s(f)\|_\infty \leqslant (s+1)^{-r},\ s = 0, 1, \dots \right\}.$$

Теорема 3.1. *Для $r > 1$ справедливы соотношения*

$$\varepsilon_n(LG^r, L_p) \asymp d_n(LG^r, L_p) \asymp \begin{cases} (\log n)^{-r+1}, & \text{если } p = \infty,\\ (\log n)^{-r+1/2}, & \text{если } 1 \leqslant p < \infty. \end{cases}$$

Прежде чем доказывать теорему 3.1, отметим, что для функций из LG^r ряд двоичных блоков, например $\delta_s(f)$, $n \leqslant s \leqslant 2n$, имеет одинаковую оценку нормы, что приводит к необходимости учета интерференции между блоками. Подобная ситуация нередко возникает при изучении классов функций многих переменных с ограничениями на смешанную производную или разность. Однако при этом интерферируют блоки «одинаковой величины» ($\delta_s(f)$ и $\delta_v(f)$ с $\|s\|_1 = \|v\|_1$). В случае же классов LG^r размеры интерферирующих блоков существенно различаются.

Из теоремы 3.1 вытекает, в частности, что порядок поперечника меняется скачкообразно при переходе от метрики L_p, $p < \infty$, к L_∞. Подобное явление наблюдается в двумерном случае для классов H^r_∞ (см. [2]).

Доказательство теоремы 3.1. Оценки сверху для поперечников не вызывают затруднений. При $p = \infty$ и $r > 1$ тривиальным образом имеем для $f \in LG^r \subset C(0, 2\pi)$

$$\|f - S_{2^m}(f)\|_\infty \leqslant \sum_{s>m} \|\delta_s(f)\|_\infty \ll m^{-r+1}.$$

Для $2 < p < \infty$, используя теорему Литтлвуда—Пэли, получаем для $f \in LG^r$

$$\|f - S_{2^m}(f)\|_p \leqslant C(p) \left(\sum_{s>m} \|\delta_s(f)\|_p^2 \right)^{1/2} \ll m^{-r+1/2}.$$

Нетривиальная часть теоремы состоит в доказательстве оценок снизу, в особенности при $p = \infty$. Установим оценки снизу энтропийных чисел. Сначала рассмотрим случай $p = 1$. Здесь нам понадобится следующее известное утверждение (см. [6, 7]).

Лемма 3.1. *Справедливы неравенства*

$$\varepsilon_{2m+1}\left(\mathcal{T}_r(m)_\infty\right)_1 \geqslant c > 0, \qquad m = 1, 2, \ldots,$$

для энтропийных чисел единичного L_∞-шара пространства действительных тригонометрических полиномов порядка m в норме L_1.

Из леммы 3.1 непосредственно вытекает следующая лемма.

Лемма 3.2. *Существует такая абсолютная постоянная $c_0 > 0$, что в каждом подпространстве*

$$\mathcal{T}_r[N, N+m] \equiv \left\{ t = \sum_{N \leqslant |k| \leqslant N+m} c_k e^{ikx},\ c_k = \overline{c}_{-k} \right\}$$

можно найти 2^m функций $t^1, \ldots, t^{2^m}$, для которых

1) $\|t^i\|_\infty \leqslant 1$ *для каждого i;*
2) $\|t^{i_1} - t^{i_2}\|_1 \geqslant c_0$, $i_1 \neq i_2$, $i_1, i_2 \in [1, 2^m]$.

Зафиксируем теперь число l и построим специальный набор функций. Для каждого $j = l+1, \ldots, 2l$ применим лемму 3.2 к множеству $\mathcal{T}_r[2^j, 2^j + 2^l]$ и получим l наборов $\{t^i_j\}_{i=1}^{2^{2^l}} \subset \mathcal{T}_r[2^j, 2^j + 2^l]$, $j = l+1, \ldots, 2l$, со свойствами

1) $\|t^i_j\|_\infty \leqslant 1$;
2) $\|t^{i_1}_j - t^{i_2}_j\|_1 \geqslant c_0$ для любых j, $i_1 \neq i_2$.

Определим следующее множество функций. Пусть $I = (i_{l+1}, \ldots, i_{2l})$, $i_j \in [1, 2^{2^l}]$ и

$$f_I = \sum_{j=l+1}^{2l} t^{i_j}_j. \tag{3.1}$$

Всего таких функций 2^{l2^l}.

Воспользуемся следующей известной и несложно проверяемой леммой.

Лемма 3.3. *Пусть заданы натуральные числа m, μ, $\mu < m$, и «параллелепипед» $\Pi \subset \mathbb{Z}^m$,*

$$\Pi = \bigotimes_{j=1}^{m} [1, M_j],$$

причем для некоторых $Q \in \mathbb{N}$, $M \in \mathbb{N}$, $Q \leqslant M$,

$$Q \leqslant M_j \leqslant M, \qquad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Тогда найдется множество $\Omega \subset \Pi$ *из не менее чем* $\left[\frac{Q^m-1}{\binom{m}{\mu}M^\mu}\right]$ *различных точек, обладающее следующим свойством: если* $x=\{x_j\}\in\Omega$, $y=\{y_j\}\in\Omega$, $x\neq y$, *то*

$$|\{j : x_j \neq y_j\}| \geqslant \mu.$$

Рассмотрим сейчас в качестве Π «куб» $\bigotimes_{j=1}^{l}[1,M]$, $M=2^{2^l}$, $m=l$, $\mu=[l/3]$. Тогда $\left[\frac{M^m-1}{\binom{m}{\mu}M^\mu}\right] \geqslant 2^{2^{l-1}l}$. Пусть Ω — множество точек (наборов) I, построенное в лемме 3.3, и $\mathcal{F}=\{f_I,\ I\in\Omega\}$ (см. (3.1)). Тогда для $f\in\mathcal{F}$ имеем

$$\begin{gathered}\|\delta_s(f)\|_\infty \leqslant 1, \quad s=l+1,\dots,2l;\\ \delta_s(f)=0 \quad \text{для} \quad \text{других} \quad s.\end{gathered} \tag{3.2}$$

Следовательно, по теореме Литтлвуда—Пэли

$$\|f\|_4 \leqslant C\,l^{1/2}, \tag{3.3}$$

и, используя неравенство

$$\|f\|_2 \leqslant \|f\|_1^{1/3}\|f\|_4^{2/3},$$

для любых $f,g\in\mathcal{F}$, $f\neq g$, мы находим

$$\|f-g\|_1 \geqslant C\left(l^{-1/3}\|f-g\|_2\right)^3 \geqslant c\,l^{1/2}. \tag{3.4}$$

Таким образом, мы построили множество $\mathcal{F}$ функций, обладающих свойствами (3.2)—(3.4) с числом элементов не меньше $2^{l2^{l-1}}$. Следовательно,

$$\varepsilon_{l2^{l-1}}(\mathcal{F},L_1) \gg l^{1/2}.$$

Из (3.2) следует, что $(2l)^{-r}\mathcal{F}\subset LG^r$ и

$$\varepsilon_{2^l}(LG^r,L_1) \gg l^{-r+1/2},$$

что завершает доказательство оценки снизу для случая $1\leqslant p<\infty$.

Перейдем к случаю $p=\infty$. Здесь мы будем опираться на теорему 2.2. В остальном доказательство аналогично уже рассмотренному случаю $p=1$. Мы отметим только изменения, которые нужно внести в доказательство для $p=\infty$. Вместо функций f_I рассмотрим

$$h_I=\sum_{k=l+1}^{2l} t^{i_k}\cos 4^k x,$$

где набор тригонометрических полиномов t^{i_k} порядка 2^l с числом элементов 2^{2^l} удовлетворяет требованиям леммы 3.2 (при $N=0$, $m=2^l$). Из этих полиномов выбирается, полностью аналогично предыдущему (см. лемму 3.3), подмножество

$$H=\{h_I,\ I\in\Omega\}.$$

Пользуясь теперь (вместо оценки (3.4)) теоремой 2.2, мы для $h\in H$, $g\in H$, $h\neq g$, получаем

$$\|h-g\|_\infty \geqslant c\,l,$$

откуда (с учетом включения $(4l)^{-r}H\subset LG^r$) выводим неравенство

$$\varepsilon_{2^l}(LG^r,L_\infty) \gg l^{-r+1}.$$

Таким образом, оценки сверху для поперечников и такие же по порядку оценки снизу для энтропийных чисел получены. Остается применить следующую лемму, вытекающую из одного неравенства Карла (см. [8]).

Лемма 3.4. *Пусть A — компакт в сепарабельном банаховом пространстве X. Предположим, что для пары чисел (r,b), где либо $r>0$, $b\in\mathbb{R}$, либо $r=0$, $b<0$, выполнены соотношения*

$$d_m(A,X)\ll m^{-r}(\log m)^b,$$
$$\varepsilon_m(A,X)\gg m^{-r}(\log m)^b.$$

Тогда

$$\varepsilon_m(A,X)\asymp d_m(A,X)\asymp m^{-r}(\log m)^b.$$

Теорема 3.1 доказана. □

Доказательство теорем 1.2 *и* 1.3. Следующая лемма является следствием теоремы 6 работы [10] (см. также [11]).

Лемма 3.5. *Пусть A — компакт в сепарабельном банаховом пространстве X. Предположим, что при $m\to\infty$*

$$\varepsilon_m(A,X)\asymp m^{-r}(\log m)^a,\qquad r>0,\quad a\in\mathbb{R}.$$

Тогда

$$d_m(A,X)\gg m^{-r}(\log m)^a.$$

Из леммы 3.5 вытекает, что для доказательства оценок снизу в теореме 1.3 достаточно установить теорему 1.2. Мы начнем с доказательства оценок снизу в теореме 1.2. Это доказательство основано на теореме 2.2, а в остальном проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 3.1 из [2].

Пусть $N_\varepsilon(F,X)$ — минимальное число замкнутых шаров радиуса ε пространства X, необходимое для покрытия (компактного) множества F, а $M_\varepsilon(F,X)$ — максимальное число таких точек $x_i\in F$, что $\|x_i-x_j\|>\varepsilon$, $i\ne j$. Тогда, как хорошо известно,

$$N_\varepsilon(F,X)\leqslant M_\varepsilon(F,X)\leqslant N_{\varepsilon/2}(F,X). \tag{3.5}$$

В случае, когда $X=X_n$ — конечномерное пространство размерности n, известны (см., например, [8, с. 63]) и элементарно проверяются неравенства

$$N_\varepsilon(B_X,X)\geqslant\varepsilon^{-n},\qquad 0<\varepsilon\leqslant 1, \tag{3.6}$$

$$N_\varepsilon(B_Y,X)\geqslant\varepsilon^{-n}\frac{\mathrm{Vol}(B_Y)}{\mathrm{Vol}(B_X)},\qquad 0<\varepsilon\leqslant 1, \tag{3.7}$$

где B_X обозначает единичный шар пространства X.

Пусть $D_n=\bigcup\limits_{s\in Y_n^d}\rho(s)$ и $\mathcal{T}_r(D_n)$ — соответствующее пространство действительных тригонометрических полиномов. Построим для каждого n набор функций $\{f_i^n\}_{i=1}^{A_n}$, $f_i^n\in\mathcal{T}_r(D_n)$, со следующими свойствами:

(1) $\|\delta_s(f_i^n)\|_\infty\leqslant 1$, $s\in Y_n^d$, $i=1,\dots,A_n$;
(2) $\|f_i^n-f_j^n\|_{QC}\geqslant c(d)n^{d/2}$, $i\ne j$;
(3) $A_n\geqslant 2^{|D_n|/2}$.

Для $s\in Y_n^d$ обозначим через $b(s)$ d-мерный вектор $b(s)=(b_1(s),\dots,b_d(s))$, $b_j(s)=2^{s_j-2}-1$, если $s_j\geqslant 2$, и $b_j(s)=0$, если $s=0,1$.

Пусть $\mathcal{T}_r(b(s))$ — пространство действительных тригонометрических полиномов вида

$$t(x)=\sum_{0\leqslant k_j\leqslant b_j(s),\,1\leqslant j\leqslant d}\ \sum_{e\subset[1,d]}a_k^e\prod_{j\in e}\cos k_jx_j\prod_{j\in[1,d]\setminus e}\sin k_jx_j,$$

где $a_k^e\in\mathbb{R}$ — соответствующие коэффициенты Фурье $t(x)$, e пробегает все подмножества отрезка натурального ряда $[1,\dots,d]$. Будем рассматривать $\{a_k^e\}$ как вектор в $\mathbb{R}^{v(b(s))}$, где для $b\in\mathbb{R}^d$ $v(b)\equiv\prod\limits_{j=1}^d(2b_j+1)$, причем $v(b(s))=\dim\mathcal{T}_r(b(s))$. Пусть для $b\in\mathbb{Z}_+^d$ и $1\leqslant p\leqslant\infty$ $A_p(b)\subset\mathbb{R}^{v(b)}$ — множество коэффициентов $\{a_k^e\}_{k,e}\subset\mathbb{R}^{v(b)}$ полиномов $t\in\mathcal{T}_r(b)$, для которых $\|t\|_p\leqslant 1$.

Имея в виду использование неравенства (3.7), приведем одну известную оценку объема для $A_p(b)$ (см. [7] при $d=1$ и [12, лемма 1.2, с. 140] при $d>1$).

Лемма 3.6. *Справедлива оценка*

$$\mathrm{Vol}\,(A_\infty(b)) \geqslant v(b)^{-v(b)/2}[c_2(d)]^{-v(b)}.$$

Используя формулу для объема единичного евклидова шара $A_2(b)$ в $\mathbb{R}^{v(b)}$, из которой вытекает, что

$$\mathrm{Vol}\,(A_2(b)) \leqslant v(b)^{-v(b)/2}[c_3(d)]^{-v(b)},$$

мы легко выводим из (3.5), (3.7) и леммы 3.6 следующее утверждение: *существуют такие постоянная $c_4(d) > 0$ и семейство полиномов $\{t_i^b,\ i = 1, 2, \dots, 2^{v(b)}\} \subset \mathcal{T}_r(b)$, что*

$$\|t_i^b\|_\infty \leqslant 1, \qquad i = 1, \dots, 2^{v(b)}, \tag{3.8}$$

$$\|t_i^b - t_j^b\|_2 \geqslant c_4(d), \qquad i \neq j. \tag{3.9}$$

Для каждого набора $I = \{i(s),\ s \in Y_n^d\}$, где $i(s) \in \{1, \dots, 2^{v(b(s))}\}$, определим функцию

$$f_I^n = \sum_{s \in Y_n^d} \left(\prod_{j=1}^d \cos k_j^s x \right) t_{i(s)}^{b(s)}, \tag{3.10}$$

где для $s \in Y_n^d$ $k_j^s = 2^{s_j-1} + 2^{s_j-2}$, если $s_j \geqslant 2$, и $k_j^s = s_j$, если $s_j = 0, 1$. Общее число таких функций

$$N = \prod_{s \in Y_n^d} 2^{v(b(s))}.$$

Отметим, что для любого $s \in Y_n^d$

$$0 < c(d) \cdot \dim \mathcal{T}_r(\rho(s)) \leqslant v(b(s)) \leqslant \dim \mathcal{T}_r(\rho(s)) = 2^n.$$

Учитывая этот факт, нетрудно проверить с помощью леммы 3.3, что во множестве $\prod\limits_{s \in Y_n^d} [1, 2^{v(b(s))}]$ наборов I можно найти подмножество G_n, $|G_n| \geqslant 2^{2^n n^{d-1} c'(d)}$, с дополнительным свойством, что любые два различных набора $I, J \in G_n$ имеют по крайней мере $c''(d)|Y_n^d|$ различных «координат» $i(s)$, $c'(d) > 0$, $c''(d) > 0$.

Проверим, что для любых $I, J \in G_n$, $I \neq J$,

$$\|f_I^n - f_J^n\|_{QC} \gg n^{d/2}. \tag{3.11}$$

Этот факт вытекает из теоремы 2.2 и следующего элементарно проверяемого неравенства: для любого полинома $t(x) \in \mathcal{T}_r(b(s))$

$$\left\| \left(\prod_{j=1}^d \cos k_j^s x \right) t(x) \right\|_2 \geqslant c\,\|t(x)\|_2, \qquad c = c(d) > 0. \tag{3.12}$$

Здесь числа k_j^s и b_j^s те же, что и в (3.10); отметим еще, что при этих k_j^s и b_j^s полином

$$\left(\prod_{j=1}^d \cos k_j^s x \right) t(x)$$

лежит в подпространстве $\mathcal{T}_r(\rho(s))$ и, следовательно, при различных s эти полиномы имеют непересекающиеся спектры.

Из (3.11) и включения

$$\{f_I^n \cdot 2^{-rn}\}_{I \in G_n} \subset H_\infty^r \cdot C(r, d)$$

(см. (3.10) и [13, гл. 2, теорема 1.1]) вытекает оценка снизу для $\varepsilon_m(H_q^r, QC)$.

Из (3.11) и включения

$$\{f_I^n \cdot 2^{-rn} n^{-(d-1)/2}\} \subset W_q^r \cdot C(r, d), \qquad 1 < q < \infty$$

(которое вытекает из (3.10), теоремы Литтлвуда—Пэли и [13, гл. 1, теорема 1.1]) получаем оценку снизу для $\varepsilon_m(W_q^r, QC)$ при любом $r > 0$.

Оценка снизу для $\varepsilon_m(W^r_\infty, QC)$ при $r > 1/2$ вытекает из только что доказанных оценок снизу для $\varepsilon_m(W^r_q, QC)$, $q < \infty$, оценки сверху для $\varepsilon_m(W^r_2, QC)$, которая будет доказана ниже, и неравенства

$$\varepsilon_{2m}(W^r_4, QC) \leqslant 2\varepsilon_m(W^r_2, QC)^{1/2} \cdot \varepsilon_m(W^r_\infty, QC)^{1/2}. \tag{3.13}$$

Оценка (3.13) — частный случай оценки энтропийных чисел оператора, действующего из «промежуточного пространства» (см. [14, п. 12.1.12]); в нашем случае рассматривается оператор тождественного вложения $W^r_4 \hookrightarrow QC$.

Доказательство оценок сверху в теоремах 1.2 *и* 1.3. Ниже через $\mathcal{T}(\Delta Q_n)_q$ обозначаем единичный L_q-шар в пространстве $\mathcal{T}(\Delta Q_n)$, а через $\mathcal{T}(\Delta Q_n)_{B_{q,\infty}}$ — множество таких полиномов f из $\mathcal{T}(\Delta Q_n)$, что $\|\delta_s(f)\|_q \leqslant 1$, $\|s\|_1 = n$. Кроме того, положим

$$\gamma(q,a,b) = \begin{cases} \left(\dfrac{b}{a}\right)^{1/q} \left[\ln\left(1+\dfrac{b}{a}\right)\right]^{1/q-1/2}, & a \leqslant b, \\ e^{-a/b}, & a > b. \end{cases}$$

Лемма 3.7. *Для* $1 < q \leqslant 2$ *имеют место соотношения*

$$\varepsilon_m\left(\mathcal{T}(\Delta Q_n)_q, QC\right) \ll n^{1/2}\gamma(q, m, K|\Delta Q_n|), \tag{3.14}$$

$$\varepsilon_m\left(\mathcal{T}(\Delta Q_n)_{B_{q,\infty}}, QC\right) \ll n^{d/2}\gamma(q, m, K|\Delta Q_n|), \tag{3.15}$$

$$d_m\left(\mathcal{T}(\Delta Q_n)_2, QC\right) \ll n^{1/2}(|\Delta Q_n|/m)^{1/2} \tag{3.16}$$

($K = K(d)$; *другие константы в неравенствах* (3.14)—(3.16) *также не зависят ни от* m, *ни от* n).

Доказательство леммы 3.7 использует известную технику оценок энтропии и поперечников. Пусть X обозначает пространство $\mathbb{R}^N$ с нормой $\|\cdot\|_X$. Как обычно, обозначим B^N_2 и S^{N-1} соответственно единичный евклидов шар в $\mathbb{R}^N$ и его границу. Пусть также $\sigma = \sigma_N$ — нормированная мера Лебега на S^{N-1}. Следующая величина играет важную роль в оценках ε-энтропии и поперечников по Колмогорову (см. подробнее [8]):

$$M_X := \int\limits_{S^{N-1}} \|f\|_X \, d\sigma.$$

Лемма 3.8 (см. [15]). *Имеет место оценка*

$$\varepsilon_m(B^N_2, X) \ll \gamma(2, m, N) M_X.$$

Установим сначала оценку (3.14) в частном случае $q = 2$. Рассмотрим множество $\mathcal{T}(\Delta Q_n)^e$ полиномов из $\mathcal{T}(\Delta Q_n)_r$ с действительными коэффициентами. Тогда $\mathcal{T}(\Delta Q_n)^e_2$ может рассматриваться как евклидов шар в $\mathbb{R}^N$, $N = |\Delta Q_n|/2$. Легко видеть, что оценку (3.14) (при $q = 2$) достаточно доказать для $\mathcal{T}(\Delta Q_n)^e_2$.

Если полином f представить в виде

$$f(x) = \sum_s \sum_{2^{s-1} \leqslant |k_1| < 2^s} e^{ik_1x_1} f_{k_1}(x^1),$$

то по определению QC-нормы

$$\|f\|_{QC} = \int\limits_0^1 \left\| \sum_s r_s(\omega) \sum_{2^{s-1} \leqslant |k_1| < 2^s} e^{ik_1x_1} f_{k_1}(x^1) \right\|_\infty d\omega. \tag{3.17}$$

Из (3.17) легко усмотреть, что в рассматриваемом нами случае

$$M_{QC} = \int\limits_{S^{N-1}} \|f\|_{QC} \, d\sigma = \int\limits_{S^{N-1}} \|f\|_\infty \, d\sigma. \tag{3.18}$$

Последняя величина уже оценивалась в [16]:

$$\int\limits_{S^{N-1}} \|f\|_\infty \, d\sigma \ll n^{1/2} \tag{3.19}$$

(отметим, что неравенство (3.19) легко вытекает из экспоненциальной оценки для полиномов по системе Радемахера).

Лемма 3.8 и (3.18), (3.19) дают оценку (3.14) при $q = 2$.

Перейдем к общему случаю $1 < q < 2$ и докажем, что справедлива следующая лемма.

Лемма 3.9. *Имеет место оценка*

$$\varepsilon_m\left(\mathcal{T}(\Delta Q_n)_q, L_2\right) \ll \begin{cases} \left(\dfrac{|\Delta Q_n|}{m}\right)^{1/q-1/2} \left[\log\left(\dfrac{|\Delta Q_n|}{m}+1\right)\right]^{1/q-1/2}, & m \leqslant |\Delta Q_n|, \\ 2^{-mc/|\Delta Q_n|}, \ c = c(d) > 0, & m > |\Delta Q_n|. \end{cases}$$

Эта лемма выводится стандартным способом из соответствующего результата об энтропии в метрике l_p^N l_q-шаров

$$B_q^N = \left\{ x \in \mathbb{R}^N : \left(\sum_{i=1}^N |x_i|^q\right)^{1/q} \leqslant 1 \right\}.$$

Лемма 3.10 (см. [17]). *Для* $1 \leqslant q \leqslant p \leqslant \infty$

$$\varepsilon_m(B_q^N, l_p^N) \ll \begin{cases} \left(\dfrac{\log(\frac{N}{m}+1)}{m}\right)^{1/q-1/p}, & m \leqslant N, \\ m^{1/p-1/q}\, 2^{-m/N}, & m > N. \end{cases}$$

Мы используем также известную теорему Марцинкевича об эквивалентности обычной L_q-нормы и L_q-сеточной нормы тригонометрических полиномов. Из этой теоремы следует, что для любого $s \in \mathbb{Z}_+^d$, $\|s\|_1 = n$, и для любого полинома

$$t(x) = \sum_{k \in \rho(s)} \widehat{t}(k) e^{i(k,x)}$$

при $1 < q < \infty$ имеют место неравенства

$$k_1(d,q)\left(\frac{1}{2^n}\sum_{x\in\Omega_s} |t(x)|^q\right)^{1/q} \leqslant \|t\|_{L_q} \leqslant k_2(d,q)\left(\frac{1}{2^n}\sum_{x\in\Omega_s} |t(x)|^q\right)^{1/q},$$

где $k_1(d,q) > 0$ и при $s = (s_1, \dots, s_d) \in \mathbb{Z}_+^d$

$$\Omega_s = \left\{ \left(\frac{2\pi l_1}{2^{s_1+1}+1}, \dots, \frac{2\pi l_d}{2^{s_d+1}+1}\right)\right\}, \qquad 0 \leqslant l_j \leqslant 2^{s_j+1}, \quad 1 \leqslant j \leqslant d.$$

Поставим в соответствие полиному $f \in \mathcal{T}_r(\Delta Q_n)$ вида

$$f = \sum_{s,\, \|s\|_1 = n} \delta_s(f, x)$$

вектор

$$v(f) = \{\delta_s(f,x)\}_{\|s\|_1 = n,\, x \in \Omega_s} \in \mathbb{R}^N, \qquad N \asymp 2^n n^{d-1}$$

(порядок координат зафиксирован произвольно, одинаково для всех f). Используя теорему Марцинкевича и неравенство

$$\left(\sum_s \|\delta_s(f)\|_q^2\right)^{1/2} \ll \|f\|_{L_q}, \qquad 1 < q \leqslant 2,$$

которое является следствием теоремы Литтлвуда—Пэли, оценим l_q-норму вектора $v(f)$, $1<q<2$:

$$\begin{aligned}\|v(f)\|_{l_q} \asymp 2^{n/q}\left(\sum_{s,\,\|s\|_1=n}\|\delta_s(f)\|_q^q\right)^{1/q} &\ll \\ \ll 2^{n/q}n^{(d-1)(1/q-1/2)}\left(\sum_{s,\,\|s\|_1=n}\|\delta_s(f)\|_q^2\right)^{1/2} &\ll 2^{n/q}n^{(d-1)(1/q-1/2)}\|f\|_q.\end{aligned} \tag{3.20}$$

При $q=2$ имеет место эквивалентность

$$\|v(f)\|_{l_2} \asymp 2^{n/2}\|f\|_2. \tag{3.21}$$

Отметим еще следующий факт. Пусть $L\subset l_2^N$ — подпространство. Тогда

$$\varepsilon_m(B_q^N\cap L, l_2^N\cap L) \leqslant \varepsilon_m(B_q^N, l_2^N). \tag{3.22}$$

Доказательство оценки (3.22) очевидно: искомую ε-сеть в $l_2^N\cap L$ образуют ортопроекции точек из ε-сети для B_q^N.

Мы используем (3.22) в случае, когда

$$L = \{\, v(f),\ f\in \mathcal{T}_r(\Delta Q_n)\}\,,$$

при этом $(\dim L)/N > c > 0$. Учитывая также (3.21) и (3.20), мы из леммы 3.10 и (3.22) получим утверждение леммы 3.9.

Завершим доказательство оценки (3.14) для $1<q<2$. Имеет место неравенство

$$\varepsilon_{2m}\left(\mathcal{T}_r(\Delta Q_n)_q, QC\right) \leqslant \varepsilon_m\left(\mathcal{T}_r(\Delta Q_n)_q, L^2\right)\, \varepsilon_m\left(\mathcal{T}_r(\Delta Q_n)_2, QC\right). \tag{3.23}$$

Остается применить лемму 3.9 и воспользоваться уже доказанной частью оценки (3.14) для $q=2$.

Оценка (3.15) доказывается аналогично и несколько проще, чем (3.14). Вместо леммы 3.9 мы доказываем неравенство

$$\varepsilon_m\left(\mathcal{T}_r(\Delta Q_n)_{B_{q,\infty}}, L^2\right) \ll n^{(d-1)/2}\begin{cases}\left(\dfrac{|\Delta Q_n|}{m}\right)^{1/q-1/2}\left[\log\left(\dfrac{\Delta Q_n}{m}+1\right)\right]^{1/q-1/2}, & m\leqslant|\Delta Q_n|,\\ 2^{-mc/|\Delta Q_n|}, & m>|\Delta Q_n|.\end{cases} \tag{3.24}$$

При этом мы вновь используем дискретизацию, основанную на теореме Марцинкевича, лемму 3.10, а также аналогичное (3.23) неравенство

$$\varepsilon_{2m}\left(\mathcal{T}_r(\Delta Q_n)_{B_{q,\infty}}, QC\right) \leqslant \varepsilon_m\left(\mathcal{T}_r(\Delta Q_n)_{B_{q,\infty}}, L^2\right)\, \varepsilon_m\left(\mathcal{T}_r(\Delta Q_n)_2, QC\right).$$

Перейдем к проверке оценки (3.16). Она проводится аналогично доказательству неравенства (3.14) в случае $q=2$. Вместо леммы 3.8 используется следующая лемма.

Лемма 3.11 (см. [15]). *Имеет место оценка*

$$d_m(B_2^N, X) \ll M_{X,2}\left(\frac{N}{m}\right)^{1/2},$$

где

$$M_{X,2} \equiv \left(\int\limits_{S^{N-1}} \|f\|_X^2\, d\sigma\right)^{1/2}.$$

Аналогично оценке величины M_{QC} (см. (3.18)), используя неравенство

$$M_{L^\infty,2} \ll n^{1/2}$$

(см. [18]), получаем

$$M_{QC,2} \leqslant M_{L^\infty,2} \ll n^{1/2}. \tag{3.25}$$

Неравенство (3.16) вытекает из леммы 3.11 и (3.25).

Завершим доказательство оценок сверху в теоремах 1.2 и 1.3. Ясно, что теорему 1.2 достаточно доказать для $1 < q \leqslant 2$ и $r > 1/q$, а теорему 1.3 — для $q = 2$ и $r > 1/2$. Доказательство использует лемму 3.7 и следующие известные свойства функций из классов W^r_q и H^r_q. Для любой функции $f \in W^r_q$, $1 < q \leqslant 2$, имеем (см. [13, гл. 2, теорема 2.1])

$$\Big\| \sum_{k \in \Delta Q_n} \widehat{f}(k) e^{i(k,x)} \Big\|_q \ll 2^{-rn}. \tag{3.26}$$

Для любой $f \in H^r_q$, $1 < q < \infty$ (см. [13, гл. 2, теорема 1.1]),

$$\|\delta_s(f)\|_q \ll 2^{-r\|s\|_1}. \tag{3.27}$$

При доказательстве первого соотношения в теореме 1.2 используем (3.27) и (3.15). При доказательстве второго соотношения в теореме 1.2 используем (3.26) и (3.16). При доказательстве второго соотношения в теореме 1.3 используем (3.26) и (3.16). Наконец, при доказательстве первого соотношения в теореме 1.3 используем (3.16) и следующее простое следствие неравенства (3.27): для любой $f \in H^r_2$

$$\Big\| \sum_{\|s\|_1 = n} \delta_s(f) \Big\|_2 \ll n^{(d-1)/2} 2^{-rn}.$$

Во всех четырех случаях доказательство проводится одинаково. Мы приведем лишь доказательство второго соотношения в теореме 1.2.

Пусть задано достаточно большое m. Подберем n так, чтобы

$$|\Delta Q_{n-1}| < m \leqslant |\Delta Q_n|.$$

Тогда $m \asymp 2^n n^{d-1}$. Положим $\sigma = (1/2)\min(r - 1/q, 1)$ и

$$\overline{m}_l = c_\sigma \begin{cases} [m\, 2^{-\frac{1}{2}(n-l)}], & l < n, \\ [m\, 2^{-\sigma(l-n)}], & l \geqslant n, \end{cases}$$

где $c_\sigma > 0$ подобрано так, что

$$\sum_{l=0}^{\infty} \overline{m}_l \leqslant m.$$

Пусть $m_l = [\overline{m}_l]$. Тогда $m_l = 0$, если $c_\sigma m\, 2^{-\sigma(l-n)} < 1$, т. е. при

$$l > n_1 \equiv n + \frac{1}{\sigma} \log c_\sigma m.$$

Обозначим

$$S_{\Delta Q_l}(W^r_q) \equiv \left\{ g = \sum_{k \in \Delta Q_l} \widehat{f}(k) e^{i(k,x)},\ f \in W^r_q \right\}$$

и

$$\|S_{\Delta Q_l}(W^r_q)\|_{QC} \equiv \sup_{g \in S_{\Delta Q_l}(W^r_q)} \|g\|_{QC}.$$

Тогда

$$\varepsilon_m(W^r_q, QC) \leqslant \sum_{l=0}^{n_1} \varepsilon_{m_l}\big(S_{\Delta Q_l}(W^r_q), QC\big) + \sum_{l > n_1} \|S_{\Delta Q_l}(W^r_q)\|_{QC} = \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2.$$

Каждое слагаемое в $\sum_2$ может быть оценено с помощью (3.26) и неравенства (см. [13, гл. 1, теорема 2.1]) $\|f\|_\infty \ll 2^{l/q} l^{(d-1)/(1-1/q)} \|f\|_q$, $f \in \mathcal{T}(Q_l)$:

$$\|S_{\Delta Q_l}(W^r_q)\|_{QC} \ll 2^{-l(r-1/q)} l^{(d-1)(1-1/q)}.$$

Проводя суммирование по $l > n_1$ и учитывая определение n_1, получим

$$\sum\nolimits_2 \ll 2^{-rn}. \tag{3.28}$$

Используя (3.26) и лемму 3.7, находим

$$\sum_{l<n} \varepsilon_{m_l}\left(S_{\Delta Q_l}(W^r_q), QC\right) \ll \sum_{l<n} 2^{-rl} n^{1/2} \exp\left\{-\frac{m_l}{K|\Delta Q_l|}\right\} \ll 2^{-rn} n^{1/2} \tag{3.29}$$

и

$$\sum_{n\leqslant l\leqslant n_1} \varepsilon_{m_l}\left(S_{\Delta Q_l}(W^r_q), QC\right) \ll \sum_{n\leqslant l\leqslant n_1} 2^{-rl} n^{1/2} \left(\frac{|\Delta Q_l|}{m_l}\right)^{1/q} \left[\ln\left(1+\frac{|\Delta Q_l|}{m_l}\right)\right]^{1/q-1/2} \ll 2^{-rn} n^{1/2}. \tag{3.30}$$

Объединяя неравенства (3.28)—(3.30) и учитывая, что $m \asymp 2^n n^{d-1}$, завершаем доказательство оценки сверху во втором соотношении теоремы 1.2. □

4. О равномерной сеточной норме полиномов из $\mathcal{T}(\Delta Q_n)$

Теорема 4.1. *Пусть при некоторых $n \geqslant 1$ и $y \geqslant 1$ конечное множество $\Omega \subset \mathbb{T}^2$ обладает свойством, что для любого полинома $t \in \mathcal{T}(\Delta Q_n)$ имеет место неравенство*

$$\|t\|_\infty \leqslant y\,\|t\|_{\infty,\Omega}. \tag{4.1}$$

Тогда число элементов в Ω допускает оценку снизу

$$|\Omega| \geqslant c_1 |\Delta Q_n| \exp\left(\frac{c_2 n}{y^2}\right), \tag{4.2}$$

где $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ — абсолютные постоянные.

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что n достаточно велико и $1 \leqslant y \leqslant c_3 n^{1/2}$, где $c_3 > 0$ — произвольная абсолютная постоянная. Кроме того, считаем, что n четно (для нечетных n рассуждения полностью аналогичны).

Пусть $g_k(\omega)$, $k \in \mathbb{Z}^2$, — набор независимых нормально распределенных случайных величин с нулевым средним и единичной дисперсией, занумерованных точками из $\mathbb{Z}^2$.

Рассмотрим случайный процесс

$$P(x,\omega) = \sum_{s\in Y^2_n} \sum_{k=(k_1,k_2)\in\rho(s)\cap\mathbb{Z}^2_+} \lambda_k g_k(\omega) e^{i(k,x)} \equiv \sum_{k\in\Lambda_n} \lambda_k g_k(\omega) e^{i(k,x)}, \tag{4.3}$$

где для $k \in \rho(s)$

$$\lambda_k = \lambda_{(k_1,k_2)} = \begin{cases} 1, & \text{если } [2^{s_1-1}] < k_1 < 2^{s_1},\ [2^{s_2-1}] < k_2 < 2^{s_2}, \\ 1/2, & \text{если } k_1 = [2^{s_1-1}],\ [2^{s_2-1}] < k_2 < 2^{s_2}, \\ 1/2, & \text{если } k_2 = [2^{s_2-1}],\ [2^{s_1-1}] < k_1 < 2^{s_1}, \\ 1/4, & \text{если } k_1 = [2^{s_1-1}],\ k_2 = [2^{s_2-1}], \end{cases}$$

и $\Lambda_n = \bigcup_{s\in Y^2_n} \rho(s) \cap \mathbb{Z}^2_+$. Отметим, что $|\Lambda_n| \asymp n\,2^n$ и $|\Lambda_n| \leqslant \left(\frac{n}{2}+1\right) 2^{n-2}$.

Утверждение теоремы 4.1 мы получим, установив оценки сверху и снизу для вероятности

$$\gamma(w) \equiv \mathrm{P}\left\{ \|P(x,\omega)\|_{C_x} < w|\Lambda_n|^{1/2} \right\}$$

для значений w из области $0 < w \leqslant n^{1/2}$. Положим

$$\delta_s(x,\omega) = \sum_{k\in\rho(s)\cap\mathbb{Z}^2_+} \lambda_k g_k(\omega) e^{ikx}, \qquad s \in Y^2_n.$$

В силу [2, неравенство (1.3)]

$$\gamma(w) \leqslant \mathrm{P}\left\{ \sum_{s\in Y^2_n} \|\delta_s(x,\omega)\|_{L_1} < A^{-1} w |\Lambda_n|^{1/2} \right\}. \tag{4.4}$$

Правая часть в (4.4) в силу неравенства Чебышёва не превосходит

$$\binom{m}{[m/2]} \max_{\{s^j,\,1\leqslant j\leqslant m/2\}\subset Y_n^2} \mathrm{P}\left\{ \|\delta_{s^j}\|_{L_1} < \frac{2A^{-1}w}{m}\,|\Lambda_n|^{1/2},\ 1\leqslant j\leqslant m/2 \right\}, \tag{4.5}$$

где $m = |Y_n^2| = n/2+1$.

Из (4.4) и (4.5), пользуясь независимостью случайных величин $\|\delta_s(x,\omega)\|_{L_1}$, $s\in Y_n^2$, мы находим

$$\gamma(w) \leqslant 2^{n/2}\left[\max_{s\in Y_n^2} \mathrm{P}\left\{ \|\delta_s(x,\omega)\| \leqslant \frac{4A^{-1}w}{n}\,|\Lambda_n|^{1/2} \right\}\right]^{n/4}. \tag{4.6}$$

Оценим сверху при фиксированном $s=(s_1,n-s_1)\in Y_n^2$, $0<s_1<n$, вероятность

$$\mathrm{P}\left\{ \|\delta_s\|_{L_1} \leqslant \frac{4A^{-1}w}{n}\,|\Lambda_n|^{1/2} \right\} \leqslant \mathrm{P}\left\{ \|\delta_s\|_{L_1} \leqslant \frac{2^{n/2+1}}{n^{1/2}}\,A^{-1}w \right\}. \tag{4.7}$$

Имеем для $s=(s_1,n-s_1)\in Y_n^2$, отделяя действительную часть,

$$\begin{aligned} |\delta_s(x,\omega)| &= \left| \sum_{k_1=0}^{2^{s_1-1}-1}\ \sum_{k_2=0}^{2^{n-s_1-1}-1} \lambda'_k g_k(\omega) e^{i(k_1x_1+k_2x_2)} \right| \geqslant \\ &\geqslant \left| \sum_{k_1=0}^{2^{s_1-1}-1}\ \sum_{k_2=0}^{2^{n-s_1-1}-1} \lambda'_k g_k(\omega)\,(\cos(k_1x_1)\cos(k_2x_2)-\sin(k_1x_1)\sin(k_2x_2)) \right|, \end{aligned} \tag{4.8}$$

где $\lambda'_{(k_1,k_2)} \equiv \lambda_{(k_1+[2^{s_1-1}],k_2+[2^{n-s_1-1}])}$.

Пользуясь четностью косинусов и нечетностью синусов, из последнего соотношения выводим

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}\left\{ \|\delta_s\|_{L_1} \leqslant \frac{2^{n/2+1}}{n^{1/2}}\,A^{-1}w \right\} \leqslant \\ &\leqslant \mathrm{P}\left\{ \left\| \sum_{k_1=0}^{2^{s_1-1}-1}\ \sum_{k_2=0}^{2^{n-s_1-1}-1} \lambda'_k g_k(\omega)\cos(k_1x_1)\cos(k_2x_2) \right\|_{L_1} \leqslant \frac{2^{n/2+2}}{n^{1/2}}\,A^{-1}w \right\} \equiv \\ &\equiv \mathrm{P}\left\{ \|\delta'_s\|_{L_1} \leqslant \frac{2^{n/2+2}}{n^{1/2}}\,A^{-1}w \right\}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Рассмотрим для данного $s=(s_1,n-s_1)$ набор точек

$$\Delta_s = \left\{ \frac{2\pi j_1}{2^{s_1}-1},\ \frac{2\pi j_2}{2^{n-s_1}-1} \right\}, \qquad 0\leqslant j_1\leqslant 2^{s_1}-2, \quad 0\leqslant j_2\leqslant 2^{n-s_1}-2.$$

В силу известного результата Марцинкевича (см. [19, с. 181])

$$\|\delta'_s\|_{L_1} \geqslant \frac{c}{2^n}\sum_{z\in\Delta_s}|\delta'_s(z)|, \qquad c>0,$$

поэтому

$$\mathrm{P}\left\{ \|\delta'_s\|_{L_1} \leqslant \frac{2^{n/2+2}A^{-1}w}{n^{1/2}} \right\} \leqslant \mathrm{P}\left\{ \omega : \frac{1}{2^n}\sum_{z\in\Delta_s}|\delta_s(z,\omega)| \leqslant \frac{2^{n/2}}{n^{1/2}}\,c_1w \right\}. \tag{4.10}$$

Пусть $z=(z_1,z_2)\in\Delta_s$, $v=(v_1,v_2)\in\Delta_s$, причем $0<z_1,z_2,v_1,v_2<\pi$. Тогда

$$\begin{aligned} &\sum_{k_1=0}^{2^{s_1-1}-1}\ \sum_{k_2=0}^{2^{n-s_1-1}-1} \lambda'_k \cos(k_1z_1)\cos(k_2z_2)\cos(k_1v_1)\cos(k_2v_2) = \\ &\qquad = \begin{cases} 0, & \text{если } z\neq v, \\ \dfrac{(2^{s_1-1}-1/2)(2^{n-s_1-1}-1/2)}{4}, & \text{если } z=v. \end{cases} \end{aligned} \tag{4.11}$$

Действительно, левая часть в (4.11) равна

$$\left(\frac{1}{2}+\sum_{k_1=1}^{2^{s_1-1}-1}\cos(k_1z_1)\cos(k_1v_1)\right)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k_2=1}^{2^{n-s_1-1}-1}\cos(k_2z_2)\cos(k_2v_2)\right),$$

и нам остается учесть, что при $z=2\pi j/(2p+1)$, $v=2\pi j'/(2p+1)$, $0<z,v<\pi$,

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{p}\cos(k_1z_1)\cos(k_1v_1)=\begin{cases}\dfrac{p+1/2}{2}, & z_1=v_1,\\ 0, & z_1\neq v_1.\end{cases}$$

Из (4.11) и известного свойства нормального распределения (см. [1, теорема 2.10, с. 48]) мы заключаем, что случайный вектор

$$\{\,\delta_s(z,\omega),\ z=(z_1,z_2)\in\Delta_s,\ 0<z_1,z_2<\pi\}$$

также имеет нормальное распределение, его координаты независимы, их среднее значение равно нулю, а дисперсия не меньше $c_3'2^n$, $c_3'>0$. Следовательно (см. также (4.9)),

$$\mathrm{P}\left\{\|\delta_s'\|_{L_1}\leqslant\frac{2^{n/2+2}A^{-1}w}{n^{1/2}}\right\}\leqslant\mathrm{P}\left\{\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{2^{n-5}}|g_k(\omega)|\leqslant\frac{c_4w}{n^{1/2}}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant 2^{2^{n-5}}\left[\mathrm{P}\left\{|g_1|\leqslant\frac{2c_4w}{n^{1/2}}\right\}\right]^{2^{n-6}}\leqslant\left(\frac{c_5w}{n^{1/2}}\right)^{2^{n-6}},$$

если $w\leqslant c_6n^{1/2}$, где постоянная $c_6>0$ достаточно мала. В итоге (см. также (4.6), (4.8)) имеем

$$\gamma(w)\leqslant\left(\frac{c_7w}{n^{1/2}}\right)^{n\cdot2^{n-8}},\qquad w\leqslant c_6n^{1/2}. \tag{4.12}$$

Пусть теперь при некотором $\Omega\subset[0,2\pi]^2$ имеет место (4.1). Тогда очевидно, что при каждом w

$$\gamma(w)\geqslant\mathrm{P}\left\{\max_{x\in\Omega}|P(x,\omega)|<|\Lambda_n|^{1/2}\frac{w}{y}\right\}. \tag{4.13}$$

Оценим снизу правую часть в (4.13). Введем в рассмотрение случайный вектор $\{r_x,r_x',\,x\in\Omega\}$ размерности $2|\Omega|$ с

$$r_x=\operatorname{Re}P(x,\omega),\qquad r_x'=\operatorname{Im}P(x,\omega).$$

Тогда

$$\mathrm{P}\left\{\max_{x\in\Omega}|P(x,\omega)|<|\Lambda_n|\frac{w}{y}\right\}\geqslant\mathrm{P}\left\{\max_{x\in\Omega}\max\left(|r_x|,|r_x'|\right)<\left(\frac{|\Lambda_n|}{2}\right)^{1/2}\frac{w}{y}\right\}. \tag{4.14}$$

Вектор $\{r_x,r_x',\,x\in\Omega\}$ имеет нормальное распределение с нулевым средним, и по теореме Шидака [20] (см. также [21, следствие 1]) правая часть в (4.14) допускает оценку снизу величиной

$$\Pi=\prod_{x\in\Omega}\left(\mathrm{P}\left\{|r_x|<\left(\frac{|\Lambda_n|}{2}\right)^{1/2}\frac{w}{y}\right\}\mathrm{P}\left\{|r_x'|<\left(\frac{|\Lambda_n|}{2}\right)^{1/2}\frac{w}{y}\right\}\right). \tag{4.15}$$

Оценим снизу произведение (4.15) при $w=c_6n^{1/2}$. Так как для любого $x\in\Omega$

$$\left(\mathrm{E}|r_x|^2\right)^{1/2}\leqslant|\Lambda_n|^{1/2},\qquad\left(\mathrm{E}|r_x'|^2\right)^{1/2}\leqslant|\Lambda_n|^{1/2},$$

то

$$\Pi\geqslant\left(1-2\int\limits_{c_9n^{1/2}/y}^{\infty}e^{-x^2/2}\,dx\right)^{2|\Omega|}\geqslant\exp\left[-4|\Omega|\exp\left(-c_9^2n/(2y^2)\right)\right]; \tag{4.16}$$

мы использовали неравенство

$$1-2\int\limits_{z}^{\infty}e^{-x^2/2}\,dx\geqslant\exp\left(-2\exp(-z^2/2)\right),\qquad z\geqslant1,$$

и считали, что $y < c_9 n^{1/2}$. Итак (см. (4.13)—(4.16)),

$$\gamma(c_6 n^{1/2}) \geqslant \exp\left[-4|\Omega| \exp(-c_{10} n/y^2)\right]. \tag{4.17}$$

Сравнивая (4.17) и неравенство (4.12) при $w = c_6 n^{1/2}$, мы находим, что

$$c_{11}^{n2^n} \geqslant \exp\left[-4|\Omega| \exp(-c_{10} n/y^2)\right],$$

т. е.

$$|\Omega| \geqslant c_{12} n 2^n \exp(c_{10} n/y^2).$$

Соотношение (4.2), а значит, и теорема 4.1 доказаны. □

Утверждение следствия 1.1, сформулированного во введении, при $d = 2$ непосредственно вытекает из теоремы 4.1.

Утверждение следствия 1.1 при $d > 2$ и $\alpha = 1/2$ очевидно, а при $\alpha < 1/2$ вытекает из двумерного результата, если учесть, что

$$|Q_n^d| \ll |Q_n^2| \exp(c\, n^{\varepsilon})$$

для произвольных $c > 0$ и $\varepsilon > 0$ и подпространство в $\mathcal{T}(Q_n^d)$ полиномов, зависящих от двух координат, совпадает с $\mathcal{T}(Q_n^2)$.

5. Заключительные замечания

a) Опишем построение полиномов $t_k \in \mathcal{T}_r(2^k)$, $k = 1, 2, \dots$, для которых $\|t_k\|_\infty \geqslant c_1 k^{1/2} \|t_k\|_{QC}$, $c_1 > 0$ (существование таких примеров отмечалось во введении). Пусть для данного k

$$f(x) = \sum_{s=0}^{k-1} 2^{-s} \sum_{j=2^s}^{2^{s+1}-1} e^{ijx}$$

и $t_k = \operatorname{Re} f$. Ясно, что $f(0) = t_k(0) = k$. Покажем, что $\|f\|_{QC} \ll k^{1/2}$, а значит, в силу неравенства $\|t_k\|_{QC} \leqslant \|f\|_{QC}$, и $\|t_k\|_{QC} \ll k^{1/2}$.

Определим функцию

$$g_\omega(x) = \sum_{s=0}^{k-1} r_s(\omega) \chi_{[-2^{-s}, 2^{-s}]}(x).$$

Тогда для любого ω

$$\|f_\omega(x) - g_\omega(x)\|_\infty \ll 1, \qquad f_\omega(x) = \sum_{s=0}^{\infty} r_s(\omega) \delta_s(f, x).$$

В самом деле, пусть $2^{-l-1} < |x| \leqslant 2^{-l}$, $l \leqslant k$. Имеем

$$|f_\omega(x) - g_\omega(x)| \ll \sum_{s=0}^{l} 2^{-s} \sum_{j=2^s}^{2^{s+1}-1} |1 - e^{ijx}| + \sum_{s>l} \frac{2^{-s}}{x} \ll 1.$$

При $|x| < 2^{-k-1}$ аналогично

$$|f_\omega(x) - g_\omega(x)| \leqslant \sum_{s=0}^{k} 2^{-s} \sum_{j=2^s}^{2^{s+1}-1} |1 - e^{ijx}| \ll 1.$$

Оценка

$$\int_0^1 \|g_\omega(x)\|_\infty \, d\omega \ll \sqrt{k}$$

вытекает из оценки мажоранты частных сумм полинома по системе Радемахера

$$\sum_{s=0}^{k-1} r_s(\omega)$$

(см. [1, теорема 2.9]).

б) Рассматривая QC-норму в многомерном случае, мы определяли ее следующим образом:

$$\|f(x_1,\dots,x_d)\|_{QC} = \big\|\|f(\,\cdot\,,x_2,\dots,x_d)\|_{QC}\big\|_\infty,$$

т. е. брали QC-норму фактически только по переменной x_1. Возможны и другие варианты, когда усреднение по знакам берется и по другим переменным. Рассмотрим два таких способа:

$$\|f\|^T_{QC} \equiv \int\limits_{[0,1]^d} \Big\|\sum_s r_{s_1}(\omega_1)\cdot\dots\cdot r_{s_d}(\omega_d)\,\delta_{(s_1,\dots,s_d)}(f,x)\Big\|_\infty\,d\omega, \tag{5.1}$$

$$\|f\|^*_{QC} \equiv \int\limits_0^1 \Big\|\sum_s r_{i(s)}(\omega)\,\delta_s(f)\Big\|_\infty\,d\omega, \tag{5.2}$$

где i задает взаимно-однозначное соответствие между $\mathbb{Z}^d_+$ и $\mathbb{N}$.

Из доказательства оценок сверху в теоремах 1.2 и 1.3 следует, что те же оценки сохраняются и для норм (5.1), (5.2). Из теоремы 2.2 нетрудно вывести ее аналоги для норм (5.1) и (5.2), которые дают для этих норм те же оценки снизу, что и оценки для QC-нормы, установленные в теоремах 1.2, 1.3.

Отметим еще, что в некоторых случаях работать с нормой $\|\cdot\|^*_{QC}$ проще, чем с $\|\cdot\|_{QC}$.

в) Приведем один результат, связанный с теоремой 2.1. Эта теорема была выведена в разделе 2 из одномерного результата — теоремы 1.1 — при помощи сравнительно элементарной техники: использовались теорема Литтлвуда—Пэли и неравенство Гёльдера. В дипломной работе П. Г. Григорьева для исследования полиномов многих переменных были привлечены результаты С. В. Бочкарева [22]. Аналогично с помощью результатов из [22] из теоремы 1.1 можно вывести следующее утверждение.

Утверждение 5.1. *Пусть*

$$\|f\|_{QC,L} \equiv \big\|\|f(\,\cdot\,,x^1)\|_{QC}\big\|_{L_1}$$

и

$$\rho^+(s) = \rho(s)\cap\mathbb{Z}^d_+.$$

Для любых $t_s\in\mathcal{T}(\rho^+(s))$ *имеет место неравенство*

$$\Big\|\sum_{s\in Y^d_n} t_s\Big\|_{QC,L} \geqslant c(d)n^{-(d/2-1)}\sum_{s\in Y^d_n}\|t_s\|_1, \qquad c(d)>0.$$

г) Следствие 1.1 показывает, что свойства подпространства $\mathcal{T}(\Delta Q_n)$ в $\mathcal{T}([-2^n,2^n]^d)$ в определенном смысле аналогичны свойствам случайного подпространства в $\mathcal{T}([-2^n,2^n]^d)$ той же размерности (см. также [23]).

Работа первого автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 96-01-00094), программы «Ведущие научные школы» (проект № 96-15-96102) и фонда INTAS (проект № 93-1376).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кашин Б. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды. — М.: Наука, 1984.
2. *Temlyakov V. N.* An inequality for trigonometric polynomials and its application for estimating the entropy numbers // J. Complexity. — 1995. — *11*. — P. 293—307.
3. *Talagrand M.* The small ball problem for the Brownian sheet // Ann. Probab. — 1994. — *22*. — P. 1331—1354.
4. *Григорьев П. Г.* Об одной последовательности тригонометрических полиномов // Матем. заметки. — 1997. — *61*, № 6. — С. 935—938.
5. *Кашин Б. С., Темляков В. Н.* Об одной норме и связанных с ней приложениях // Матем. заметки. — 1998. — *64*, № 4. — С. 637—640.
6. *Темляков В. Н.* Оценки наилучших билинейных приближений функций и аппроксимативных чисел интегральных операторов // Матем. заметки. — 1992. — *51*, № 5. — С. 125—134.

7. *Кашин Б. С.* О некоторых свойствах пространства тригонометрических полиномов с равномерной нормой // Труды МИАН. — 1980. — *145*. — С. 111—116.
8. *Pisier G.* The volume of convex bodies and Banach space geometry. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1989.
9. *Temlyakov V. N.* An inequality for trigonometric polynomials and its application for estimating the Kolmogorov widths // East J. Approx. — 1996. — *2*, No. 2. — P. 253—262.
10. *Lorentz G. G.* Metric entropy and approximation // Bull. Amer. Math. Soc. — 1966. — *72*. — P. 903—937.
11. *Кашин Б. С., Темляков В. Н.* Об оценке аппроксимативных характеристик классов функций с ограниченной смешанной производной // Матем. заметки. — 1995. — *58*, № 6. — С. 922—925.
12. *Темляков В. Н.* Оценки асимптотических характеристик классов функций с ограниченной смешанной производной или разностью // Труды МИАН. — 1989. — *189*. — С. 138—168.
13. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Труды МИАН. — 1986. — *178*.
14. *Пич А.* Операторные идеалы. — М.: Мир, 1982.
15. *Pajor A., Tomczak-Jaegermann N.* Subspaces of small codimension of finite-dimensional Banach spaces // Proc. Amer. Math. Soc. — 1986. — *97*, No. 4. — P. 637—642.
16. *Belinskiy E. S.* Estimates of entropy numbers and Gaussian measures for classes of functions with bounded mixed derivative // J. Approx. Theory. — 1998. — *93*, No. 1. — P. 114—127.
17. *Schütt C.* Entropy numbers of diagonal operators between symmetric Banach spaces // J. Approx. Theory. — 1984. — *40*. — P. 121—128.
18. *Белинский Э. С.* Асимптотические характеристики классов функций с условием на смешанную производную (смешанную разность) // Исследования по теории функций многих вещественных переменных. — Ярославль, 1990. — С. 22—37.
19. *Marcinkiewicz J.* Collected papers. — Warszawa: PWN, 1964.
20. *Ŝidak Z.* Rectangular confidence regions for the means of multivariate normal distributions // J. Amer. Statist. Assoc. — 1967. — *62*. — P. 626—633.
21. *Глускин Е. Д.* Экстремальные свойства ортогональных параллелепипедов и их приложения к геометрии банаховых пространств // Матем. сб. — 1988. — *136* (*178*), № 1. — С. 85—96.
22. *Бочкарев С. В.* Ряды Валле Пуссена в пространствах BMO, L_1 и $H^1(D)$ и мультипликативные неравенства // Труды МИАН. — 1995. — *210*. — С. 41—64.
23. *Кашин Б. С.* О свойствах случайных сечений N-мерного куба // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 1983. — № 3. — С. 8—11.

Борис Сергеевич Кашин
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
Россия, 117966, г. Москва, ул. Губкина, 8
E-mail: `kashin@mi.ras.ru`

Владимир Николаевич Темляков
The University of South Carolina
South Carolina, Columbia, USA
E-mail: `temlyak@math.sc.edu`