ТЕОРЕМЫ ФАКТОРИЗАЦИИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

Б.С.Кашин

В самом общем смысле теоремы о факторизации операторов есть утверждения о возможности представления каждого оператора $T:X \to Y$ из некоторого класса $\mathfrak{M}$ операторов действующих из пространства X в пространство Y в виде

$$T = T_2 \times T_1 , \qquad (1)$$

где $T_1:X \to Z$, $T_1:Z \to Y$ ограниченные операторы, для которых данное пространство Z является соответственно областью значений и областью определения . При этом часто требуется , чтобы T_1 и T_2 обладали и некоторыми дополнительными нужными свойствами . Теоремы факторизации составляют сейчас отдельное направление в функцио - нальном анализе, а интерес к ним основан на ряде конкретных приложений в теории функций, теории вероятностей и других областях математики. Работы Е. М. Никишина , относящиеся к указанной тематике, занимают в ней одно из центральных мест и вполне сохраняют свою актуальность . Следует отметить, что, являясь спе- циалистом по метрической теории функций , Е.М.Никишин пришел к те- оремам факторизации в связи с задачами об ортогональных и общих функциональных рядах .Первоначально полученные результаты он и формулировал как утверждения о рядах и лишь позднее (см. [17*] , [19*]) придал им естественную операторную форму .

Теоремы факторизации для достаточно широких классов операто- ров впервые были установленны в середине 50-х годов А.Гротендиком [1]. Гротендик доказал, в частности, что произвольный линейный ограниченный оператор $T : L^2 \to L^1$ представим в виде $T = T_g \times T_1$, где $T_1 : L^2 \to L^2$ - линейный ограниченный оператор , а T_g - опера- тор умножения на функцию $g \in L^2$, т.е. $T_g(f) = g \times f$. Рассмат - ривая операторы в абстрактных пространствах , основную ценность своих результатов Гротендик видел в их приложимости к классическим пространствам L^p . Такой же подход характерен и для работ Е.М.Ни - кишина , который при этом , в отличие от Гротендика , изучал не только линейные , но и выпуклые операторы , действующие не только в банаховых пространствах, но и в пространства измеримых функций , что значительно расширило сферу приложения теорем факторизации .

В дальнейшем изложении нам потребуетася несколько определений. Пусть задан некоторый класс B числовых последовательностей $b = \{ b_n \}_{n=1}^{\infty}$. Система измеримых функций

$$F = \{ f_n \} \tag{2}$$

(определенных на отрезке (0.1) или каком – то ином пространстве с мерой – (X, Σ, μ) называется *системой сходимости почти всюду для* B (*системой абсолютной сходимости почти всюду для* B),если всякий ряд

$$\sum b_n f_n , \quad b = \{ b_n \} \in B \tag{3}$$

сходится почти всюду (соответственно абсолютно сходится почти всюду) . Аналогично определяются *системы сходимости в* Y *для* B , в случае , когда Y – некоторое метрическое (в частности банахово) пространство и $\{ f_n \} \subset Y$.

Важный результат был получен Е.М.Никишиным в первой из его работ ([2*]) относящихся к рассматриваемой тематике , выполненной еще в студенчческие годы (Евгеиний Михайлович пришел к теоремам факторизации самостоятельно, не зная малоизвестных в 60-е годы работ Гротендика):

ТЕОРЕМА А. Для того,чтобы система функций (2) являлась системой абсолютной сходимости почти всюду для l^1 необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлось такое измеримое множество $E = E_\varepsilon \subset (0, 1)$, что мера $m E > 1 - \varepsilon$ и

$$\sup_n \int_E |f_n(x)| \, dx < \infty . \tag{4}$$

"Достаточная" часть теоремы очевидна ;при доказательстве необходимости условия (4) в [2*] была весьма остроумно использованна теорема фон Неймана о минимаксе .

Пусть $L^0 = L^0(0, 1)$ – пространство всех измеримых , почти всюду конечных функций на (0, 1) . Множество $A \subset L^0$ назовем *ограниченным* , *если для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется постоянная* R *такая* , что мера $m \{x : |f(x)| > R\} < \varepsilon$ для любой функции $f \in A$. Соответственно, оператор $T : L^p(X, \Sigma, \mu) \to L^0$– *ограниченный* , *если* образ единичного шара пространства L^p – ограниченное множество ,и *положительный* , если из условия $g \geqslant 0$ почти всюду по мере μ

следует, что $T(g) \geqslant 0$ почти всюду на $(0, 1)$.

Используя эти определения, теорему A в эквивалентной форме можно сформулировать так: всякий ограниченный положительный линейный оператор $T : l^1 \to L^0$ представим в виде $T = T_g \times T_1$, где $T_1 : l^1 \to L^1$ – ограниченный положительный линейный оператор, а T_g – оператор умножения на функцию $g \in L^0$. Теорема A и ее обобщения, полученные в [14*], [22*] отражают специфику линейного случая, т.к. Е.М.Никишин показал, что уже для выпуклых положительных операторов аналогичное утверждение, вообще говоря, теряеет силу и оценка (4) должна быть заменена соответствующим неравенством "слабого типа" (см. [14*], стр. 146, 174).

Рассмотрение общих (т.е. не обязательно положительных) операторов потребовало от Е.М.Никишина разработки новых методов. В работах [14*], [19*] установленны

ТЕОРЕМА B. Пусть T – ограниченный выпуклый оператор, действующий из банахова пространства B в L^0. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся множество $E_\varepsilon \subset (0, 1)$ с $m\,E_\varepsilon > 1 - \varepsilon$ и постоянная C_ε такие, что для всех $y > 0$ и всех $z \in B$ выполняется неравенство

$$m\,\{x \in E_\varepsilon : |T\,z| > y\} \leqslant C_\varepsilon \times y^{-1}\,\|z\|_B$$

(Выпуклыми мы называем оператор $T : B \to L^0$, удовлетворяющий соотношениям

1) $|T(z_1 + z_2)| \leqslant |T(z_1)| + |T(z_2)|$ почти всюду на $(0, 1)$;
2) $|E(\lambda\,z)| = |\lambda|\,|T(z)|$ почти всюду на $(0, 1)$;

Е.М.Никишин называл такие операторы надлинейными).

ТЕОРЕМА C. Пусть $T : L^p(X, \Sigma, \mu) \to L^0$ – ограниченный выпуклый оператор. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся множество $E_\varepsilon \subset (0, 1)$ с $m\,E_\varepsilon > 1 - \varepsilon$ и постоянная C_ε такие, что для всех $y > 0$ и всех $f \in L^p$ выполняется неравенство

$$m\left\{x \in E_\varepsilon : |T\,f| > y\right\} \leqslant C_\varepsilon \left[\|f\|_{L^p} / y\right]^q ;\ q = \min\,(p,2).$$

Построение множеств E_ε в теоремах B, C проводилось с помощью своеобразного индуктивного процесса , позваляющего учитывать гео - метрические свойства пространства B - области определения оператора T и получать при $B = L^p(X, \Sigma, \mu)$ более точные результаты (ср. теоремы B и C).

В самом методе доказательства теоремы C заключена возможность ее переноса на другие банаховы пространства , в частности , в связи с этой теоремой становится совершенно естественным рассмотрение пространств "типа p" или "контипа q" (см. определение в [2],[4]). К настоящему времени геометрия пространств данного "типа" или "контипа" подробно изучена в работах Б.Морэя , Ж.Пизье и др., при этом получены обобщения теоремы факторизации Е.М.Никишина (см. подробнее [2] - [5]).

Среди рассмотренных Е.М.Никишиным приложений теорем факторизации выделим два .

В [18*] на основе теорем факторизации рассмотрены свойства оператора S_Φ^* мажоранты частных сумм рядов по данной ортонормированной системе Φ (если $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^\infty$, то

$$S_\Phi^*(a) \equiv S_\Phi^*(a,x) = f(x) = \sup_N \left| \sum_{n=1}^N a_n\varphi_n(x) \right| ;$$

этот оператор определен для любой последовательности $a = \{a_n\}$ с конечным числом ненулевых элементов ; в случае когда Φ - система сходимости , т.е. всякий ряд вида

$$\sum a_n\varphi_n(x) , \qquad \sum a_n^2 < \infty$$

сходится почти всюду , оператор S_Φ^* действует из l^2 в L^0).

ТЕОРЕМА Д. Если Φ - ортонормированная система сходимости , то для любого $\varepsilon > 0$ найдутся множества $E_\varepsilon \subset (0, 1)$ с $m\,E_\varepsilon > 1 - \varepsilon$ и постоянная C_ε такие , что для любых $y > 0$ и последовательности $a \in l^2$ выполняется неравенство

$$m\left\{x \in E_\varepsilon : S_\Phi^*(a, x) > y\right\} \leqslant C_\varepsilon \times y^{-2} \|a\|_{l^2}^2 .$$

Из теоремы Д вытекает , что мажоранта частных сумм произвольного ряда по ортонормированной системе сходимости суммируема в произвольной степени $p < 2$ на множестве E_ε большей меры ; этот результат точен (см., например, [7]) .

Теоремы факторизации были использованны Е.М.Никишиным при изучении сходимости разложений по собственным функциям оператора Лапласа (см. [19*]), а затем и более общих спектральных разложений (см. совместные с Б.С.Митягиным работы [21*],[26*]). В 1961 г. Е.Стейн [8] , обобщая идеи использованные ранее А.Н.Колмогоровым и А.Кальдероном , применил утверждения близкие к теоремам факторизации для построения функции d - переменных $f \in L^1(T^d)$ с расходящимися на множестве положительной меры сферическими средними Рисса порядка $\alpha = (d - 1)/2$ тригонометрического ряда Фурье. Для применимости подхода Стейна к рядам по системе $\{\varphi_n\}$ необходимо , грубо говоря, чтобы область определения функции φ_n имела групповую структуру и операторы частных сумм коммутировали со сдвигами на группе . Теорема C позволила Е.М.Никишину изучить свойства спектральных разложений отвечающих краевым задачам в произвольных d - мерных областях . Пусть Ω - область в R^d и $\{\varphi_n(x)\}$ - система собственных функций , отвечающих задаче $\Delta u(x) + \lambda u(x) = 0,\ x \in \Omega$, $u/\partial\Omega = 0$,упорядоченных в соответствии с величиной собственных значений λ. В [19*] установлена

ТЕОРЕМА E. Для любой области Ω и любых $p \in \left[1, \frac{2d}{d+1}\right]$ и $\alpha \in \left[0, d\left(1/p - 1/2\right) - 1/2\right]$ найдется функция $f \in L^p(\Omega)$,ряд Фурье по системе $\{\varphi_n\}$ которой не суммируется методом Рисса порядка α на множестве положительной меры .

До работ Е.М.Никишина аналоги теоремы E были известны только для областей Ω весьма специального вида .

В заключении отметим , что установленные Е.М.Никишиным теоремы факторизации (в частности теорема A и ее обобщения) нашли применения также в теории весовых неравенств , теории меры и теории вероятностей (см., например, [9], [10], [11]) .

ЛИТЕРАТУРА

1. Grothendiek A. Resume de la theorie metrique des produits tensoriel topologiques // Bull. Soc. Mat. Sao Paulo.- 1956. -

– v.8, № 1 – 2. – p. 1–79 .

2. Maurey B. Theoremes de Factorisation pour des operateurs lineaires a valeurs dans les espaces L^p// Asterisque № 11, Soc, Math. de France, 1974.

3. Maurey B.,Pisier G. Series de variables aleatoires vectoriel-les independantes et proprietes geometriques des espaces de Banach // Studia Math.–1976 – v. 58. – p.45–90.

4. Pisier G. Factorisation of linear operators and Geometry of Banach spaces / Amer.Math.Soc.CBMS, № 60, 1986.

5. Pisier G. Factorisation of Operators Through $L_{p,\infty}$ or $L_{p,1}$ and Non-Commutative Generalisation //Math.Annalen. – 1986.– – v. 276. – p.105 – 136.

6. Кашин Б.С. Саакян А.А. Ортогональные ряды .– М.: Наука, 1984.

7. Ульянов П.Л. О множителях Вейля для безусловной сходимости ортогональных рядов ..Докл. АН СССР. 1977. – Т.235, № 5, – С.1038 – 1041.

8. Stein E.M. On limits of sequences of operators // Annals of Math.– 1961. – v.74. – p.140 – 170.

9. Kalton N.I., Peck N.T. , Roberts I.W. L_0– valued vector measures are bounded //Proc.Amer.Math.Soc.–1982.– v.85,№ 4. – – p.575 – 582.

10. Вахания Н.Н., Тараелидзе В.И., Чобанян С.А. Вероятностные распределения в банаховых пространствах . – М.: Наука, 1985.

11. Garcia – Guerva I., Rubio de Francia I.L. Weighted Norm Inequalities and Related Topics. – Amst. North – Holland, 1985.