СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rolewicz S. Metric linear spaces//Monogr. mat. Warszava, 1972.
2. Горин Е. А. Эрмитовы элементы банаховых алгебр и однородные ограниченные симметрические области//Тез. докл. конф. «Теоретические и прикладные вопросы математики, III». Тарту, 1985. 22—27.
3. Kaup W. A Rieman mapping theorem for bounded symmetric domains in complex Banach spaces//Math. Z. 1983. 183. 503—529.
4. Isidro J. M., Stacho L. L. Holomorphic automorphism groups in Banach spaces. Amsterdam, 1985.

Поступила в редакцию
04.11.87

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1988. № 5

УДК 517.5

Б. С. Кашин

ОБ ОДНОЙ ГРУППЕ ЗАДАЧ О ПОПЕРЕЧНИКАХ

Ниже рассматриваются задачи об оценках поперечников, естественно возникающие при исследовании некоторых вопросов теории ортогональных рядов.

Общая постановка такова: пусть X, Y — банаховы пространства, $\Psi: X\to Y$ — непрерывный (нелинейный) оператор, переводящий единичный шар в X в ограниченное (по норме пространства Y) множество. Требуется оценить величину

$$\mathscr{D}_\Psi(n, m)=\sup_{L\subset X,\ \dim L\leqslant n} d_m(\Psi(B_L), Y) \tag{1}$$

(в (1) sup берется среди всех n-мерных подпространств $L\subset X$, $n=1, 2, \ldots$; мы используем обозначения: B_L — единичный шар в L, $\Psi(A)$ — образ множества $A\subset X$ при отображении Ψ, $d_m(E, Y)$ — m-й поперечник по Колмогорову множества $E\subset Y$, $m=0, 1, \ldots$).

Поведение величин (1) характеризует в определенном смысле возможность «линеаризации» оператора Ψ. В частном случае, когда $X=Y=L^2(0, 1)$, $\Psi(f)=|f|$, величину (1) обозначим просто $\mathscr{D}(n, m)$.

Интерес к оценкам величин (1) возникает, например, при рассмотрении задачи о выборе из данной ортонормированной системы $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$, $\|\varphi_n\|_{L^{p+\delta}}\leqslant M$, $n=1, 2, \ldots$, $\delta>0$, возможно более плотной S_p-подсистемы $\{\varphi_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ (т. е. такой подсистемы, что в порожденном ею подпространстве нормы $\|\cdot\|_2$ и $\|\cdot\|_p$ эквивалентны; подробнее об этой задаче см. в [1]). Здесь обращает на себя внимание тот факт, что метод, применимый при четных p, перестает работать при $p\neq 4, 6, 8, \ldots$. Такая выделенная роль четных показателей известна и в некоторых других задачах теории ортогональных рядов (см., например, [2]). Разница между четными и остальными значениями p проявляется и при рассмотрении величин (1). Легко видеть, что если $\Psi(f)=|f|^{p-2}$, то $\Psi: L^p\to L^q$, $q=p(p-2)^{-1}$ и $\mathscr{D}_\Psi(n, m)=0$ при $m>n^{p-2}$ для четных p. Действительно, в этом случае в подпространство, аппроксимирующее $\Psi(B_L)$, достаточно включить все функции вида

$$e_{i_1}\cdot e_{i_2}\cdot \ldots \cdot e_{i_{p-2}}, \quad \{e_i\}_{i=1}^n \text{ — ортонормированный базис в } L. \tag{2}$$

Пусть $L=L_n=\left\{\sum_{i=1}^n a_i r_i(t)\right\}\subset L^p(0, 1)$, где $r_i(t)$ — функции Радемахера (см. [3]). Покажем, что для $p=3$, т. е. при $\Psi(f)=|f|$ и $n\to\infty$, множество $\Psi(B_L)$ не может (в отличие от случая $\Psi(f)=|f|^{p-2}$, $p=4, 6, \ldots$) быть аппроксимировано в L^2 (а тем более и в L^p, $p>2$) с точностью $n^{-\delta}$ подпространством размерности $\leqslant n^R$ ($\delta>0$, R — произвольные фиксированные постоянные).

Утверждение 1. *Для некоторых абсолютных положительных постоянных* γ, ε_0 *при* $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$, $n=2, 3, \ldots$ *и*

$$m\leqslant\Big(\sum_{0\leqslant\nu\leqslant\gamma\varepsilon^{-1}} C_n^\nu\Big)\cdot\varepsilon^2$$

имеет место оценка $\mathscr{D}(n, m)\geqslant\varepsilon$ (*и, следовательно, при* $\delta>0$ *и* $m\geqslant n$ $\mathscr{D}(n, m)>n^{-\delta}$, *если* $m\leqslant n^{an^\delta}$, $a=a(\delta)>0$).

Доказательство. Вычисления показывают, что при $k=4$, 6, ... справедливо равенство

$$I_k\equiv\int_0^1\Big|\sum_{i=1}^k r_i(t)\Big|\cdot\prod_{i=1}^k r_i(t)\,dt=C_{k-2}^{\frac{k-2}{2}}\cdot 2^{-k}\cdot(-1)^{\frac{k}{2}-1}. \tag{3}$$

Пусть n фиксировано, $W=\{w_j\}_{j=1}^{2^n}$ — набор функций Уолша, а $\Lambda_j\subset W$ — совокупность функций, представимых в виде произведения $2s$ функций Радемахера с $2s\leqslant j$. В силу (3) для $w\in\Lambda_j$ найдется полином $P\in L_n$ с

$$\|P\|_2=1,\quad |(w, |P|)|\equiv\Big|\int_0^1|P|\,w\,dt\Big|\geqslant\frac{c}{j};\quad 0<c<1. \tag{4}$$

Из (4) следует, что для любого подпространства E, $\dim E\leqslant|\Lambda_j|c^2(2j)^{-2}$, $j=2, 3, \ldots$, имеет место соотношение

$$\sup_{f\in L_n,\ \|f\|_2=1}\rho(|f|, E)\geqslant\frac{c}{2j};\quad \rho(u, E)\equiv\inf_{g\in E}\|u-g\|_2. \tag{5}$$

Действительно, в противном случае, вводя оператор π_E — ортогонального проектирования на E, мы для каждой функции $w\in\Lambda_j$ имеем

$$\|\pi_E w\|_2=\sup_{g\in E,\ \|g\|_2=1}(w, g)\geqslant|(w, g_0)|\cdot\|g_0\|_2^{-1},$$

где $g_0\in E$, $\|g_0-|P|\,\|_2<c(2j)^{-1}$, а для P выполняется (4).
Тогда $|(w, g_0)|\geqslant|(w, |P|)|-|(w, |P|-g_0)|\geqslant c(2j)^{-1}$, т. е. $\|\pi_E w\|_2\geqslant$ $\geqslant c(2j)^{-1}\cdot(1+c(2j)^{-1})^{-1}\geqslant c(4j)^{-1}$. Но с другой стороны, по неравенству Бесселя

$$\sum_{w\in\Lambda_j}\|\pi_E w\|_2^2=\sum_\nu\sum_w(w, e_\nu)^2\leqslant\dim E$$

($\{e_\nu\}$ — ортонормированный базис в E), поэтому

$$m=\dim E>\Big(\frac{c}{4j}\Big)^2|\Lambda_j|\geqslant\Big(\frac{c}{4j}\Big)^2\cdot\sum_{0\leqslant 2s\leqslant j}C_n^{2s},$$

что противоречит предположению о размерности E. Из (5) легко выводится утверждение 1*.

---

* В силу неравенства Хинчина, аналогичная утверждению 1 оценка сохраняется для чисел $\mathscr{D}_\Psi(n, m)$ и в случае, когда оператор $\Psi: f\to|f|$ рассматривается из L^p в L^2, $2<p<\infty$.

Неясно, каков порядок при $n \to \infty$ и фиксированном ε чисел $m(n, \varepsilon) = \min\{m : \mathscr{D}(n, m) \leqslant \varepsilon\}$, однако для подпространств L_n, таких, что $\operatorname{mes}\{t : |f(t)| > y\} \leqslant C_1 e^{-c_2 y}$ при $y \geqslant 0$ для $f \in L_n$ с $\|f\|_2 = 1$ (в частности, для рассмотренных выше подпространств L_n), возможна аппроксимация множества $\{|f|, f \in L_n, \|f\|_2 = 1\}$ с погрешностью $\leqslant \varepsilon$ подпространствами размерности n^R, $R = R(C_1, c_2, \varepsilon)$. Этот факт вытекает из возможности сколь угодно точной полиномиальной аппроксимации на всей оси с весом $e^{-|x|}$ функции $|x|$ (см. [4]); аппроксимирующие подпространства выбираются как в (2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Agaev I. Lacunary subsets of orthonormal sets//Anal. math. 1985. **11**, N 4. 283—301.
2. Shapiro G. Majorant problems for Fourier coefficients//Quart. J. Math. 1975. **26**. 9—18.
3. Кашин Б. С., Саакян А. А. Ортогональные ряды. М., 1984.
4. Бернштейн С. Н. Экстремальные свойства полиномов. М.; Л., 1937.

Поступила в редакцию
24.11.87

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1988. № 5

УДК 510.5

Н. А. Панкратьев

ЯЗЫК МАШИН ТЬЮРИНГА С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ

В работе* рассмотрена геделевская нумерация семейства всех частично рекурсивных функций (ч. р. ф.), определенная следующим образом: выписываются подряд все программы для одноленточной машины Тьюринга с фиксированным k-буквенным ленточным алфавитом упорядоченные в порядке возрастания числа состояний, а в случае совпадения числа состояний — лексикографически. Числу n сопоставляется ч. р. ф., вычисляемая программой с номером n. Про нумерацию, определенную таким образом, известно, что она неоптимальна (Агафонов, с. 66, упр. 6.1).

В той же работе (с. 19) строится нумерация семейства ч. р. ф. при помощи «приведенных» программ. Именно, из множества всех программ выбрасываются те, которые имеют несвязные графы переходов; оставшееся множество программ разбивается на классы эквивалентности по следующему отношению: две программы эквивалентны, если одна получается из другой применением некоторой перестановки на множестве состояний. Затем из каждого класса эквивалентности выбирается по одной программе («приведенной»), вершины графа переходов которой занумерованы некоторым специальным образом (Агафонов, с. 19—20). Как и в случае всех программ, определяется нумерация семейства всех ч. р. ф. при помощи «приведенных» программ. Известно, что нумерация, построенная по «приведенным» программам, асимптотически оптимальна. В настоящей работе доказано, что нумерация, построенная по «приведенным» программам, неоптимальна.

* См.: Агафонов В. Н. Сложность алгоритмов и вычислений (спецкурс д[ля] студентов НГУ), ч. 2. Новосибирск, 1975. В дальнейшем ссылки на эту работу буд[ут] обозначаться только фамилией автора.