ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1988. № 4

УДК 517.5

Б. С. Кашин, Г. Г. Кошелева

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ТЕОРЕМАМ «ОБ ИСПРАВЛЕНИИ»

Работа относится к кругу вопросов, связанных со следующей теоремой Д. Е. Меньшова «об исправлении»:

Теорема А (см. [1, с. 448]). *Для любой измеримой функции* $f(x)$, $x \in (0, 2\pi)$, *и любого* $\varepsilon > 0$ *найдется такая функция* $\tilde{f}(x)$, *что*

1) $m\{x \in (0, 2\pi) : f(x) \neq \tilde{f}(x)\} < \varepsilon$; (1)

2) *тригонометрический ряд Фурье функции* $\tilde{f}$ *сходится равномерно на* $(0, 2\pi)$.

(Отметим, что, учитывая C-свойство Н. Н. Лузина, при формулировке теорем «об исправлении» можно, не ограничивая общности, предполагать, что исходная функция f непрерывна.)

В [2, 3] были рассмотрены «дискретные аналоги» указанной теоремы Д. Е. Меньшова. Цель работы — показать, что подход к теоремам «об исправлении», основанный на этих «дискретных» результатах, оказывается полезным и при рассмотрении традиционных (т. е. не «дискретных») постановок задач.

Мы используем следующие обозначения: $m\{A\}$ — мера Лебега множества $A \subset (0, 2\pi)$; H_ω для заданной функции $\omega(\delta)$ — класс 2π-периодических функций f, модуль непрерывности $\omega(f, \delta)$ которых удовлетворяет соотношению $\omega(f, \delta) = O(\omega(\delta))$, $\delta \to 0$; для $n = 1, 2, \ldots$ и $\alpha > -1$ $\sigma_n^\alpha(f, x)$ — средние Чезаро порядка α тригонометрического ряда Фурье функции f, в частности, $\sigma_n^0(f, x) = S_n(f, x)$ — частные суммы этого ряда (см. подробнее [4]). Наконец, $U(0, 2\pi) \equiv U$ — пространство функций, имеющих равномерно (на $(0, 2\pi)$) сходящийся ряд Фурье с нормой $\|f\|_U = \sup_n \|S_n(f, x)\|_\infty$.

В известных доказательствах теоремы A «исправление» функции f до функции из пространства U происходит одновременно с резкой потерей свойств гладкости. Следующий результат показывает, что в ряде случаев «исправление» можно провести, «почти сохраняя» гладкость.

Теорема 1. *Пусть* $\alpha \in (0, 1]$. *Для любой функции* $f \in H_\omega$, $\omega(\delta) = (\log \delta^{-1})^{-\alpha}$, *и произвольных чисел* $\lambda > 1$ *и* $\varepsilon > 0$ *найдется функция* $\tilde{f} \in U(0, 2\pi)$ *с модулем непрерывности* $\omega(\tilde{f}, \delta) = O[(\log \delta^{-1})^{-\alpha} \times (\log\log \delta^{-1})^\lambda]$, $\delta \to 0$, *такая, что имеет место* (1).

Замечание. Рассмотрение модулей непрерывности вида $(\log \delta^{-1})^{-\alpha}$, $0 < \alpha \leq 1$, связано с тем, что $H_\omega \subset U$, если $\omega(\delta) = (\log \delta^{-1})^{-\alpha}$, $\alpha > 1$; метод доказательства теоремы 1 применим и к более широкому классу модулей непрерывности.

Доказательство. Рассмотрим разложение функции f в ряд по системе Фабера—Шаудера $\{\varphi_n(x/2\pi)\}_{n=0}^\infty$ (см. [5, с. 214]):

$$f(x) = \sum_{n=0}^{2} a_n \varphi_n(x/2\pi) + \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{n=R_\nu+1}^{R_{\nu+1}} a_n \varphi_n(x/2\pi) \equiv \Delta_{-1}(f, x) + \sum_{\nu=0}^{\infty} \Delta_\nu(f, x);$$

$$R_\nu = 2^{2^\nu}, \quad \nu = 0, 1, \ldots . \tag{2}$$

Имеет место аналог результата З. Чисельского (см. [5, с. 221]) об описании функций из классов $\operatorname{Lip}\alpha$, $0<\alpha<1$, в терминах их рядов по системе $\{\varphi_n\}$ (результаты такого типа использовались К. И. Осколковым [6] при доказательстве возможности исправления на множествах малой меры функций, имеющих достаточную интегральную гладкость, до функций из H_ω):

Лемма 1. *Пусть заданы числа $\alpha>0$, $\lambda>1$. Функция f входит в класс H_ω, $\omega(\delta)=(\log\delta^{-1})^{-\alpha}(\log\log\delta^{-1})^{\lambda}$, в том и только том случае, когда (см. (2))*

$$\|\Delta_\nu(f,x)\|_\infty\leqslant C\cdot 2^{-\nu\alpha}\cdot\nu^{\lambda},\ \nu=1,\,2,\,\ldots.$$

Следующая лемма выводится из «дискретных» результатов (см. [3, теорема 1] при $\alpha=0$) с учетом того, что

а) функция $F_j=\sum_{2^j<n\leqslant 2^{j+1}}\varphi_n(x)$ удовлетворяет соотношениям $F_j(-x+\pi)=F_j(x+\pi)$, $0\leqslant x\leqslant\pi$, и $\|F_j\|_A\equiv\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\widehat{F}_j(k)|\leqslant 10$, $j=1,2,\ldots$ $\ldots$;

б) при «исправлении» функций дискретного аргумента по схеме, использованной в [2, 3], сохраняется множество, где функция обращалась в нуль.

Лемма 2. *Пусть $\Lambda(N,Q)$ (N — четное, Q делит N) — пространство 2π-периодических ломаных, имеющих изломы в точках $\frac{2\pi k}{N}$, $0\leqslant k\leqslant N$, и обращающихся в нуль в точках $\frac{2\pi k}{Q}$, $0\leqslant k\leqslant Q$. Тогда для любого $\varepsilon>0$ и любой функции $g\in\Lambda(N,Q)$ найдется функция $\tilde g\in\Lambda(N,Q)$, с $\|\tilde g\|_U\leqslant C\varepsilon^{-1}\|g\|_\infty$, для которой $m\{x\in(0,2\pi):g(x)\neq\tilde g(x)\}<\varepsilon$.*

Пусть при $\nu=1,\,2,\,\ldots$ $\varepsilon_\nu=\gamma\nu^{-\lambda}$, где $\lambda>1$ задано в условии теоремы 1, а $\gamma=\gamma(\varepsilon,\lambda)$ — такая константа, что $\sum_{\nu=1}^{\infty}\varepsilon_\nu<\varepsilon$.

Взяв в лемме 2 в качестве g функции $\Delta_\nu=\Delta_\nu(f,x)$, $\nu=1,2,\ldots$ (нетрудно видеть, что $\Lambda(R_{\nu+1},R_\nu)=\{\Delta_\nu(f,x);\ f\in C(0,2\pi)\}$), и положив $\varepsilon=\varepsilon_\nu=\varepsilon_\nu(\lambda)$, найдем при $\nu=1,2,\ldots$ функции $\widetilde\Delta_\nu=\sum_{n=R_\nu+1}^{\nu+1}\tilde a_n\varphi_n$ с

$$\|\widetilde\Delta_\nu\|_U\leqslant C\varepsilon_\nu^{-1}\|\Delta_\nu\|_\infty\leqslant C_{\varepsilon,\lambda}\cdot\nu^{\lambda}\cdot 2^{-\nu\lambda},$$

для которых $m\{x\in(0,2\pi):\Delta_\nu\neq\widetilde\Delta_\nu\}\leqslant\varepsilon_\nu$. Определим функцию $\tilde f$ как сумму ряда

$$\tilde f=\Delta_{-1}(f,x)+\Delta_0(f,x)+\sum_{\nu=1}^{\infty}\widetilde\Delta_\nu(x).$$

Тогда ряд Фурье функции $\tilde f$ сходится равномерно, а выбор чисел ε_ν гарантирует выполнение соотношения (1). Кроме того, по лемме 1 $\omega(\tilde f,\delta)=O\{(\log\delta^{-1})^{-\alpha}(\log\log\delta^{-1})^{\lambda}\}$. Теорема 1 доказана.

Следующий результат дает ответ на один вопрос Д. Е. Меньшова (см., например, [7, с. 419]).

Теорема 2. *Пусть $\alpha\in(-1/2,0)$. Для любой измеримой функции $f(x)$, $x\in(0,2\pi)$, и любого $\varepsilon>0$ найдется такая функция $\tilde f$, что имеет место (1) и при $n\to\infty$ средние $\sigma_n^{\alpha}(\tilde f,x)$ равномерно на $(0,2\pi)$ сходятся к $\tilde f(x)$.*

Доказательство. Фиксируем α и ε и, считая, что $f\in C(0,2\pi)$, $\|f\|_\infty\leqslant 1$, рассмотрим разложение этой функции в ряд по системе Хаара

$$\{\chi_n(x/2\pi)\}_{n=1}^{\infty},\quad x\in(0,2\pi)\quad(\text{см. [5, с. 77]}):$$

$$f(x)=\sum_{k=-1}^{\infty}P_k(x),\ P_k=\sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}}a_n\chi_n(x/2\pi),\quad k=0,1,\ldots,P_{-1}=a_{-1}\chi_1.\quad(3)$$

В силу равномерной сходимости ряда (3) можно сгруппировать пачки $P_k(x)$ таким образом, чтобы для групп

$$\Delta_\nu(x)=\sum_{k=k_\nu+1}^{k_{\nu+1}} P_k(x) \quad (-2=k_0<k_1<\ldots)$$

выполнялись оценки

$$\|\Delta_0(x)\|_\infty \leqslant 10, \ \|\Delta_\nu(x)\|_\infty \leqslant 2^{-\nu}, \ \nu=1,\ 2,\ldots .$$

Ясно, что $\Delta_\nu \in D_{2^{k_{\nu+1}}}$, где D_N — пространство 2π-периодических функций, постоянных на каждом из интервалов

$$\left(\frac{2\pi(i-1)}{N},\ \frac{2\pi i}{N}\right),\ 1\leqslant i\leqslant N.$$

Используя теорему 1 из [3] $\left(\text{с } \varepsilon(\nu)=\frac{\varepsilon}{10}(1+\nu)^{-2}\right)$, найдем такую последовательность функций $\widetilde{\Delta}_\nu \in D_{2^{k_{\nu+1}}}$, $\nu=0,\ 1,\ldots$, что

$$1)\ m\{x\in(0,2\pi):\Delta_\nu(x)\neq\widetilde{\Delta}_\nu(x)\}\leqslant\frac{\varepsilon}{10}(1+\nu)^{-2}, \tag{4}$$

$$2)\ \sup_n\|\sigma_n^\alpha\widetilde{\Delta}_\nu\|_\infty\leqslant\frac{C_\alpha\cdot 10(1+\nu)^2}{\varepsilon}\cdot\|\Delta_\nu\|_\infty\leqslant\frac{C'_\alpha(1+\nu)^2 2^{-\nu}}{\varepsilon}.$$

Рассмотрим средние Стеклова

$$V_\nu(x)\equiv I_{h_\nu}(\widetilde{\Delta}_\nu,x)\equiv(2h_\nu)^{-1}\int_{x-h_\nu}^{x+h_\nu}\widetilde{\Delta}_\nu(t)\,dt.$$

Нетрудно проверить, что при достаточно малом шаге h_ν

$$m\{x\in(0,\ 2\pi):\Delta_\nu(x)\neq V_\nu(x)\}\leqslant\varepsilon[5(1+\nu)^2]^{-1} \tag{5}$$

и $\sigma_n^\alpha\{V_\nu,\ x\}=I_{h_\nu}(\sigma_n^\alpha\{\widetilde{\Delta}_\nu\},\ x)$ для любого $h_\nu>0$, т. е. (см. (4))

$$\sup_n\|\sigma_n^\alpha(V_\nu,x)\|_\infty\leqslant C_{\alpha,\varepsilon}(1+\nu)^2\cdot 2^{-\nu},\quad \nu=0,1,\ldots . \tag{6}$$

Кроме того, функции V_ν — кусочно-линейные, поэтому при $n\to\infty$ средние $\sigma_n^\alpha(V_\nu,\ x)$ равномерно сходятся к $V_\nu(x)$. Учитывая этот факт, из соотношений (5), (6) мы выводим, что функция $\tilde{f}=\sum_{\nu=0}^\infty V_\nu(x)$ удовлетворяет всем требованиям теоремы 2.

Замечание. В силу свойств методов Чезаро порядка α для коэффициентов Фурье $c_n(\tilde{f})$, $n=0,\ \pm1,\ldots$, функции $\tilde{f}$, построенной в теореме 2, имеем $|c_n(\tilde{f})|=O(|n|^\alpha)$, если $|n|\to\infty$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бари Н. К. Тригонометрические ряды. М., 1961.
2. Кашин Б. С. О некоторых свойствах пространства тригонометрических многочленов, связанных с равномерной сходимостью//Сообщ. АН ГССР. 1979. **93**, № 2. 281—284.
3. Кошелева Г. Г. Исправление кусочно-постоянных функций и суммирование их рядов Фурье методами Чезаро отрицательного порядка//Матем. заметки. 1987. **41**, № 2. 175—184.
4. Зигмунд А. Тригонометрические ряды, т. 1. М., 1965.
5. Кашин Б. С., Саакян А. А. Ортогональные ряды. М., 1984.
6. Осколков К. И. Аппроксимативные свойства суммируемых функций на множествах полной меры//Матем. сб. 1977. **103**, № 4. 563—589.

7. Меньшов Д. Е. Свойства чезаровских средних отрицательного порядка и некоторых других T-средних для рядов Фурье от непрерывных функций//Матем. сб. 1971. 86 (128), № 3. 419—445.

Поступила в редакцию
12.10.87