3. Arhangel'skiĭ A. V. On bicompacta which are unions two subspaces of certain type.— Comment. math. Univ. carol., 1978, **19**, N 3, p. 525—540.
4. Pytkeev E. G., Yakovlev N. N. On bicompacta which are unions of spaces defined by means of coverings.— Comment. math. Univ. carol., 1980, **21**, N 2, p. 247—261.
5. Перегудов С. А., Шапировский Б. Э. Об одном классе бикомпактов.— Докл. АН СССР, 1976, **230**, № 2, с. 279—282.

Поступила в редакцию
15.10.80

УДК 517.5

Б. С. Кашин

О ПОПЕРЕЧНИКАХ КЛАССОВ СОБОЛЕВА МАЛОЙ ГЛАДКОСТИ

В работах [1, 2] автором завершено определение порядков поперечников по Колмогорову

$$d_n(W_p{}^r,\ L^q) \tag{1}$$

при $n\to\infty$ в случае, когда класс $W_p{}^r$ вложен в пространство непрерывных функций, то есть в одномерном случае, которым мы для краткости здесь и ограничимся, при $rp>1$ (см. замечание 1 в конце заметки). Среди тех значений параметров r, p, q, при которых величина (1) имеет смысл, ее порядки не были определены только для малых r, точнее, для таких r, p, q, что

$$(r,\ p,\ q)\in\Omega,\ \ \Omega=\{(r,\ p,\ q):0<rp\leqslant 1,\ 1\leqslant p<q<\infty,\ q>2\}. \tag{2}$$

(Определение используемых ниже понятий см. в [3]; в частности, класс $\widetilde{W}_p{}^r$ для дробных r определен на с. 176.)

Цель настоящей заметки показать, что: 1) поведение поперечников (1) в случае (2) и в случае, когда $\widetilde{W}_p^r\subset C$, существенно различается; 2) с помощью полученных автором оценок для $d_n(B_p{}^m,\ l_q{}^m)$ (см. [1, 4, 5]) можно давать достаточно точные оценки для (1) и в случае (2).

Т е о р е м а. *При* $1/2<r<1$, $2<q<(1-r)^{-1}$ *и* $n\to\infty$

$$d_n(\widetilde{W}_1^r,\ L^q)\asymp n^{\frac{q}{2}\left(-r+1-\frac{1}{q}\right)}.$$

(Условия $r>1/2$ и $q<(1-r)^{-1}$ в теореме естественны, так как необходимы для вложения $\widetilde{W}_1^r$ в L^q, $q>2$.) Отметим, что и для других, не рассмотренных в теореме троек чисел r, p, q с условием (2) из указанных результатов о $d_n(B_p^m,\ l_q^m)$ можно выводить оценки сверху и снизу поперечника (1), которые будут различаться множителем вида $\ln^\alpha n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы. Для любого полинома вида

$$P(x)=\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} a_n\cos nx+b_n\sin nx \tag{3}$$

справедлив аналог неравенства Бернштейна (см., например, [6]):

$$\|P\|_{\widetilde{W}_p^r}\leqslant C_{p,r}\,2^{kr}\,\|P\|_{L^p(0,2\pi)}. \tag{4}*$$

Пусть Q_k, $0\leqslant k<\infty$, — пространство всех полиномов вида (3) и π_k — оператор ортогонального проектирования на Q_k. В силу (4) и теоремы Рисса (см. [3]), согласно которой $\|\pi_k f\|_{L^q}\leqslant C_q\|f\|_{L^q}$ $(1<q<\infty)$, имеем

* Далее через C, α, β, ... обозначаются различные положительные постоянные, зависящие от параметров α, β, ...

для любого $k \geqslant 0$

$$d_n(\widetilde{W}_p^r,\ L^q) \geqslant (C_{p,r}\ 2^{kr})^{-1}\ d_n\ (\{P \in Q_k,\ \|P\|_{L^p} \leqslant 1\},\ L^q) \geqslant$$
$$\geqslant c_{p,r,q}\, 2^{-kr}\, d_n(\{P \in Q_k,\ \|P\|_{L^p} \leqslant 1\},\ L^q \cap Q_k). \qquad (5)$$

Оценим при $p=1$ поперечник в правой части неравенства (5). Рассмотрим для данного k набор полиномов $P_s(x)$, $0 \leqslant s < 2^{k-2}$,
с $P_s(x) = K_{2^{k-2}-1}\left(x - \dfrac{2\pi s}{2^{k-2}}\right) \cos 3\cdot 2^{k-1}x$, где $K_j(x)$ — ядро Фейера (см. [7], с. 35). Ясно, что

$$P_s \in Q_k,\quad \|P_s\|_{L^1} \leqslant \pi,\quad P_s\left(\frac{2\pi j}{2^{k-2}}\right) = \begin{cases} 2^{k-3} & \text{при } j = s, \\ 0 & \text{при } j \neq s. \end{cases} \qquad (6)$$

Известно ([7], гл. X), что для любого $P(x) \in T_{2^{k+1}}$ (T_m — пространство тригонометрических многочленов степени не выше m) и для $N \geqslant 2^{k+1}\tau$, $\tau > 0$,

$$C'_q\left(2^{-k-2}\sum_{j=0}^{2^{k+2}} P^q\left(\frac{2\pi j}{1+2^{k+2}}\right)\right)^{1/q} \geqslant \|P\|_{L^q} \geqslant c_{\tau,q}\left(\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} P^q\left(\frac{2\pi j}{N}\right)\right)^{1/q} \qquad (7)$$

(в (7) левое неравенство имеет место при $1 < q < \infty$, а правое — при $1 \leqslant q \leqslant \infty$). Использовав правое неравенство (7), получим, что для любого подпространства $E \subset Q_k$ и s, $0 \leqslant s < 2^{k-2}$,

$$\rho_{L^q}(P_s,\ E) \equiv \inf_{P \in E}\|P_s - P\|_{L^q} \geqslant c_q\left(2^{-k+2}\sum_{j=0}^{2^{k-2}}\left[(P_s - P)\left(\frac{2\pi j}{2^{k-2}}\right)\right]^q\right)^{1/q}. \qquad (8)$$

Следовательно, учитывая (6) и (8), имеем

$$d_n(\{P \in Q_k : \|P\|_{L^1} \leqslant 1\},\ L^q \cap Q_k) \geqslant$$
$$\geqslant \inf_{\substack{E \subset Q_k \\ \dim E \leqslant n}}\ \sup_s \frac{1}{\pi}\rho_{L^q}(P_s,\ E) \geqslant c'_q\, d_n(B_1^{2^{k-2}},\ l_q^{2^{k-2}})\, 2^{k-\frac{k}{q}}. \qquad (9)$$

Известно [4, 5], что при $2 < q < \infty$

$$d_n(B_1^m,\ l_q^m) \leqslant C_q \min(1,\ m^{1/q}\, n^{-\frac{1}{2}}); \qquad (10)$$

при $m \geqslant 2n$

$$d_n(B_1^m,\ l_q^m) \geqslant \frac{1}{4}\min(1,\ m^{1/q} n^{-\frac{1}{2}}). \qquad (11)$$

Следовательно (см. (5), (9), (11)), в условиях теоремы

$$d_n(\widetilde{W}_1^r,\ L^q) \geqslant c_{r,q} \sup_{k:2^{k-3} \geqslant n}\left(2^{k\left(-r+1-\frac{1}{q}\right)} \min(1, 2^{k/q}\, n^{-\frac{1}{2}})\right) \geqslant$$
$$\geqslant c'_{r,q}\, n^{-\frac{1}{2}+\frac{q}{2}(1-r)}.$$

Для доказательства оценки сверху используем тот факт ([3], с. 185), что для $f \in W_1^r$ и $k=0, 1, 2, \ldots$ найдутся полиномы $P_k(f) \in T_{2^k}$ с $P_0(f) \equiv 0$ и

$$\|f-P_k(f)\|_{L^1} \leqslant C_r 2^{-kr}, \qquad 0 \leqslant k < \infty. \tag{12}$$

Так как $f \overset{L^q}{=} \sum_{k=0}^{\infty} (P_k(f) - P_{k+1}(f))$, то по определению поперечника для любой последовательности чисел $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$, $n_k \geqslant 0$, $\sum_{k=0}^{\infty} n_k \leqslant n$, учитывая (12), правое и левое неравенства (7), будем иметь

$$d_n(\widetilde{W}_1^r, L^q) \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} d_{n_k}(\{P \in T_{2^{k+1}} : \|P\|_{L^1} \leqslant C_r' 2^{-kr}\}, L^q \cap T_{2^{k+1}}) \leqslant$$

$$\leqslant C_{r,q} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k\left(-r+1-\frac{1}{q}\right)} d_{n_k}(B_1^{2^{k+2}+1}, l_q^{2^{k+2}+1}) \tag{13}$$

(мы привели доказательство соотношения (13) лишь для полноты изложения; близкое к (13) неравенство получено в [8]). Определим теперь последовательность $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$, положив $n_k = 0$ при $k > k_0 =$

$$\left[\frac{q}{2} \log_2 n\right] + 1 \text{ и } n_k = [\gamma n 2^{-(k_0-k)(1-r)}], \; 0 \leqslant k \leqslant k_0,$$

где $\gamma = \gamma_r$ такова, что $\gamma \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j(1-r)} \leqslant 1$. Тогда в силу (10) и (12) получаем

$$d_n(\widetilde{W}_1^r, L^q) \leqslant C_{r,q}' \sum_{k=0}^{k_0} 2^{k\left(-r+1-\frac{1}{q}\right)} \min(1, 2^{k/q} n^{-\frac{1}{2}} 2^{\frac{k_0-k}{2}(1-r)}) +$$

$$+ C_{r,q} n^{\frac{q}{2}\left(-r+1-\frac{1}{q}\right)} \leqslant C_{r,q}'' n^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{k_0} 2^{k(-r+1)} 2^{\frac{k_0-k}{2}(1-r)} +$$

$$+ C_{r,q} n^{\frac{q}{2}\left(-r+1-\frac{1}{q}\right)} \leqslant C_{r,q}'' n^{-\frac{1}{2}} 2^{k_0(-r+1)} \sum_{k=0}^{k_0} 2^{\frac{k-k_0}{2}(1-r)} +$$

$$+ C_{r,q} n^{\frac{q}{2}\left(-r+1-\frac{1}{q}\right)} \leqslant C_{r,q}' n^{-\frac{1}{2}+\frac{q}{2}(1-r)}.$$

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. В работе [1], определяя порядки поперечника (1) при $2 \leqslant p < q \leqslant \infty$, $rp > 1$, мы не интересовались случаем $r < 1$ и привели доказательство оценки

$$d_n(\widetilde{W}_p^r, L^q) \asymp n^{-r}, \qquad 2 \leqslant p < q \leqslant \infty, \quad rp > 1, \tag{14}$$

с использованием вложения $W_p^r \subset W_2^r \subset C$, справедливого при $r > 1/2$. Автором было отмечено (см., например, [2]), что оценка (14) верна и в общем случае. Чтобы пояснить этот факт, заметим, что в [1] оценка

(14) при $p=2$ выведена из неравенства

$$d_n(B_2^m, l_\infty^m) \leqslant Cn^{-\frac{1}{2}}\left(1+\ln\frac{m}{n}\right)^{3/2}, \qquad m>n. \tag{15}$$

Совершенно аналогично оценка (14) в общем случае вытекает из неравенства

$$d_n(B_p^m, l_\infty^m) \leqslant 2Cn^{-\frac{1}{p}}\left(1+\ln\frac{m}{n}\right)^{3/2}, \qquad 2<p<\infty, \quad m>n,$$

которое, в свою очередь, немедленно вытекает из (15) и хорошо известного следствия теоремы Хелли, примененного и в [1, формула (8)].

Замечание 2. Пользуясь случаем, укажем на некоторые опечатки в нашем обзоре [5]: в формуле (5) знак = надо заменить знаком $\asymp$; в правой части неравенства из теоремы 4 показатель степени 1/2 должен быть заменен показателем $1/r$ (см. [9]); наконец, в теореме 6 пропущено очевидное условие $\|A\|=1$ (см. [4], где получена и теорема 5 из [5]).

В заключение сформулируем результат, применимый к оценкам поперечников конечномерных множеств, а также к построению тригонометрических полиномов с некоторыми экстремальными свойствами.

Утверждение. *Пусть при* $m>n$

$$\alpha_{m,n} \equiv \sup_{\{e_j\}_{j=1}^m} \inf_{\substack{z\in R^n \\ \|z\|_{l_2^n}=1}} \max_{1\leqslant j\leqslant m} |(z, e_j)|,$$

где внешний sup *берется по всем наборам векторов единичной длины:*

$$\{e_j\}_{j=1}^m \subset R^n, \quad \|e_j\|_{l_2^n}\leqslant 1, \quad 1\leqslant j\leqslant m. \quad \textit{Тогда а) при } \frac{m}{n}\leqslant\rho$$

$$\alpha_{m,n}\leqslant n^{-\frac{1}{2}}C(\rho);$$

$$\text{б) } \alpha_{m,n}\geqslant c\min\left[1, n^{-\frac{1}{2}}\left(1+\ln\frac{m}{n}\right)^{1/2}\right].$$

B. S. Kašin

DIAMETERS OF SOBOLEV CLASSES OF SMALL ORDER SMOOTHNESS

A particular result of the paper is the following estimate of the Kolmogorov diameter of the class W_1^r, $1/2<r<1$, in the metric of L^q

$$d_n(W_1^r, L^q)\asymp n^{\frac{q}{2}\left(-r+1-\frac{1}{q}\right)}, \quad 2<q<(1-r)^{-1}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кашин Б. С. Поперечники некоторых конечномерных множеств и классов гладких функций.— Изв. АН СССР. Сер. матем., 1977, **41**, № 2, с. 334—351.
2. Кашин Б. С. Общие ортонормированные системы и некоторые вопросы теории приближений (автореф. докт. дис.).— Матем. заметки, 1979, **26**, № 2, с. 292—315.
3. Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближений. М., 1976.
4. Кашин Б. С. Об одном свойстве билинейных форм. — Сообщ. АН ГрузССР, 1980, **97**, № 1, с. 29—32.

5. Kashin B. S. On estimates of diameters.— In: Quantitative approximation. N. Y., 1980. p. 177—184.
6. Ogiewetzki I. I. Generalization of the inequality of P. Civin — Acta math. Acad. sci. hung., 1958, 9, p. 133—135.
7. Зигмунд А. Тригонометрические ряды, т. 2. М., 1965.
8. Майоров В. Е. Дискретизация задачи о поперечниках. — Успехи матем. наук, 1975, 30, № 6, с. 179—180.
9. Кашин Б. С. О некоторых свойствах пространства тригонометрических полино-мов с равномерной нормой.— Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1980, 145, с. 111—116

Поступила в редакцию
04.11.80

УДК 513.836

В. В. Трофимов

О ФУНКЦИИ ДЕФЕКТА РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

1. Напомним определение функции дефекта $\varkappa_k(a, r)$ римановы многообразий, которая впервые введена А. Т. Фоменко в работе [1]

Пусть $\mathfrak{M}^n$ — гладкое компактное риманово многообразие $a \in \mathfrak{M}^n$ — произвольная фиксированная точка, exp: $T_a\mathfrak{M}^n \to \mathfrak{M}^n$ — экспо-ненциальное отображение. Через $Q(r)$ обозначим открытый шар радиу-са r в $T_a\mathfrak{M}^n$ с центром в $0 \in T_a\mathfrak{M}^n$; положим $\tilde{Q}(r) = \exp(Q(r))$. Ясно что $\tilde{Q}(r)$ при малых r диффеоморфно $Q(r)$, причем этот диффеоморфизм осуществляется с помощью exp. Рассмотрим верхнюю грань тех r, дл которых $\exp : Q(r) \to \tilde{Q}(r)$ является диффеоморфизмом. Пусть она равн r_a (возможно, r_a бесконечно).

Пусть $x \in \partial\tilde{Q}(r)$ — произвольная точка. Тогда по определени $\tilde{Q}(r_a)$ существует одна и только одна геодезическая γ, соединяющая с x, причем $|\gamma| = r$, где $|\gamma|$ есть длина геодезической от a до x. Ра смотрим в $T_x\mathfrak{M}^n$ вектор скорости $\dot{\gamma}$, и пусть Π_x^{k-1} — произвольная пло кость размерности $k-1$, ортогональная вектору $\dot{\gamma}$ (здесь k — фиксир ванное целое число). Пусть $B^n(x, \varepsilon)$ — шар радиуса ε с центром в то ке x, размерности n и $A_\varepsilon = B^n(x, \varepsilon) \cap \exp(\Pi_x^{k-1})$. Обозначим через C конус над A_ε с вершиной a, который составлен из точек геодезически γ, исходящих из a и заканчивающихся в точках шара A_ε. Для кажд пары (x, Π_x^{k-1}) определим число [1]:

$$\varkappa_k(a, x, \Pi_x^{k-1}) = \lim_{\varepsilon \to 0} \{[\Lambda^k(CA_\varepsilon)]/[\Lambda^{k-1}(A_\varepsilon)]\},$$

где Λ^k обозначает k-мерную меру Хаусдорфа [2]. Введем понятие ма симального коэффициента:

$$\varkappa_k(a, r) = \max \varkappa_k(a, x, \Pi_x^{k-1}),$$

где максимум возьмем по всевозможным парам (x, Π_x^{k-1}), таким, ч $|\gamma| = r$.

В работах А. Т. Фоменко [1, 3] показано, что по функции $\varkappa_k(a,$ строится универсальная постоянная, оценивающая снизу k-мерную ме любого минимального компакта $X_0 \subset \mathfrak{M}$. В этих же работах максима ный коэффициент $\varkappa$ вычислен для односвязных симметрических про ранств.

В настоящей заметке исследуется поведение коэффициента $\varkappa$ взятии накрытий. Находится коэффициент $\varkappa$ для конкретных неод связных римановых многообразий.

2. Пусть $p : \mathfrak{N} \to \mathfrak{M}$ — накрытие.