23. В. А. Зорич. Теорема М. А. Лаврентьева о квазиконформных отображениях пространства. Математ. сб., 74, № 3, 1967.

24. О. Мартио, С. Рикман, Ю. Вяйсала. (Martio O., Rickman S., Väisälä J. I.) Topological and metrical properties of quasiregular mappings, Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A I, 488, 1971.

25. М. Перович. О глобальном гомеоморфизме отображений квазиконформных в среднем. ДАН СССР, 230, № 4, 1976.

Б. С. КАШИН

(Москва)

О СРЕДНЕМ ЗНАЧЕНИИ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИЙ, СВЯЗАННЫХ С ОРТОНОРМИРОВАННЫМИ СИСТЕМАМИ

В докладе определяются множества ортонормированных систем (О.Н.С.) Q^n, $1 \leqslant n < \infty$, Q^∞, наделенные мерой и оцениваются средние значения на Q^n по этой мере некоторых числовых характеристик ортонормированных систем. Такой подход показывает, что «случайная» О.Н.С. обладает рядом полезных свойств, которые отсутствуют у классических О.Н.С. (тригонометрической, Хаара и т. д.).

Через Q^n, $1 \leqslant n < \infty$ обозначим множество О.Н.С. $\{\Phi\}$ следующего вида: если $\Phi \in Q^n$, то $\Phi = \{\varphi_i(x)\}_{i=1}^n$, $x \in [0, 1]$ и при этом каждая функция $\varphi_i(x)$ постоянная на интервалах $\left(\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right)$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Существует естественное взаимнооднозначное соответствие между системами $\Phi \in Q^n$ и элементами группы ортогональных матриц порядка $n - O^n$, а именно, системе $\Phi = \{\varphi_i(x)\}$ ставится в соответствие матрица $A = \{a_{ij}\} \in O^n$ следующего вида:

$$a_{ij} = n^{-1/2}\varphi_i\left(\frac{j-1/2}{n}\right), \quad 1 \leqslant i,\ j \leqslant n.$$

С помощью этого соответствия мера Хаара μ_n, заданная на группе O^n (см. [1]) переносится на множество Q^n. Ниже меру множества $E \subset Q^n$ будем обозначать $\mu_n(E)$, $(\mu_n(Q^n) = 1)$. Определим теперь множество Q^∞ полных в $L^2(0, 1)$ О. Н. С. следующим образом: пусть задана любая последовательность $\{\Phi_j\}_{j=1}^\infty$, где

$$\Phi_j = \{\varphi_i^j(x)\}_{i=1}^{2^j} \in Q^{2^j}.$$

По этой последовательности мы построим систему $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^\infty \in Q^\infty$, положив

$$\psi_1(x) \equiv 1, \quad \psi_2(x) = r_1(x),$$

и при $2^j < k \leqslant 2^{j+1}$, $k = 2^j + i$, $j = 1, 2, \ldots$,

$$\psi_k(x) = \varphi_i^j(x) \cdot r_{j+1}(x) \tag{1}$$

(здесь $r_j(x)$ — j-ая функция из системы Радемахера (см. [2])). Все построенные таким образом системы $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^\infty$ и составляют множество Q^∞.

Проверим, что любая система $\{\psi_k(x)\} \in Q^\infty$ — полная в $L^2(0,1)$ ортонормированная система.

Пусть даны два числа k и k' с $k < k'$. Если $2^j < k < k' \leqslant 2^{j+1}$, $1 \leqslant j < \infty$, то

$$\int_0^1 \psi_\kappa(x)\,\psi_{\kappa'}(x)\,dx = \int_0^1 \varphi^j_{\kappa-2^j}(x)\,\varphi^j_{\kappa'-2^j}(x)\,dx = 0,$$

по определению множества Q^{2^j}.

Если $k \leqslant 2^j < k' < 2^{j+1}$, $1 \leqslant j < \infty$, то функция $\psi_\kappa(x)$ постоянная на интервалах вида $\left(\frac{\nu-1}{2^j}, \frac{\nu}{2^j}\right)$, $1 \leqslant \nu \leqslant 2^j$, в то время как

$$\int_{(\nu-1)/2^j}^{\nu/2^j} \psi_{\kappa'}(x)\,dx = 0, \quad 1 \leqslant \nu \leqslant 2^j,$$

поэтому и в этом случае

$$\int_0^1 \psi_\kappa(x)\,\psi_{\kappa'}(x)\,dx = 0,$$

а следовательно система $\{\psi_\kappa(x)\}$ ортонормированная. Полнота системы $\{\psi_\kappa(x)\}_{\kappa=1}^\infty$ следует из того, что каждая функция $\chi_\nu(x)$, $2 < \nu < \infty$ из полной О. Н. С. Хаара представима в виде $(2^j < \nu \leqslant 2^{j+1})$:

$$\chi_\nu(x) = \sum_{k=2^j+1}^{2^{j+1}} a_\kappa^{(\nu)}\psi_\kappa(x),$$

где (см. (1))

$$a_\kappa^{(\nu)} = 2^{-j/2}\,\varphi^j_{\kappa-2^j}\left(\frac{\nu-2^j-1/2}{2^j}\right),$$

и кроме того $\chi_1(x) = \psi_1(x)$, $\chi_2(x) = \psi_2(x)$. Отметим, что системы Хаара и Уолша-Пэли принадлежат множеству Q^∞. С помощью прямого произведения мер μ_{2^j} $(1 \leqslant j < \infty)$ (см. [3]) можно определить и меру μ_∞ на множестве О.Н.С. Q^∞.

Первая функция, распределение которой на Q^n мы оценим, это функция $s(\Phi)$, $\Phi \in Q^n$ (определение см. ниже), связанная со сходимостью почти всюду (п. в.) ортогональных рядов.

Пусть $\Phi = \Phi(n) = \{\varphi_i(x)\}_{i=1}^n$, $x \in [0, 1]$ — некоторый набор ортонормированных функций. Определим оператор мажоранты частных сумм $S^*_\Phi : l_2^n \to L^2(0, 1)$ следующим образом: если $y = \{y_i\}_{i=1}^n \in l_2^n$, то

$$S^*_\Phi(y) = f(x) = \sup_{1 \leqslant r \leqslant n} \left| \sum_{i=1}^r y_i\,\varphi_i(x) \right|.$$

Пусть $s(\Phi)$ — норма оператора S^*_Φ, т. е.

$$s(\Phi) = \sup_{\|y\|_{l_2^n} \leqslant 1} \|S^*_\Phi(y)\|_{L^2}.$$

При изучении сходимости п.в. ортогональных рядов возникает задача оценки для данного набора Φ числа $s(\Phi)$. Классическим является результат Меньшова и Радемахера о том, что для любого набора $\Phi = \Phi(n)$ справедливо неравенство

$$s(\Phi) \leqslant c \ln n.$$

Вместе с тем, Меньшовым для каждого $n \geqslant 1$ был указан пример такого ортонормированного набора $\Phi_0 = \Phi_0(n)$, что

$$s(\Phi_0) \geqslant c_0 \ln n.$$

Оценим распределение функции $s(\Phi)$ на множествах Q^n. Справедлива следующая теорема.

Теорема I. Существуют абсолютные постоянные C и $\gamma > 0$, такие, что при любом $n \geqslant 1$ и $t \geqslant 0$

$$\mu_n \{\Phi \in Q^n : s(\Phi) \geqslant t\} \leqslant (C \cdot e^{-\gamma t^2})^n.$$

Из теоремы I выводятся следующие следствия.

Следствие I. Существует такая постоянная B, что при $n = 1, 2, \ldots$.

$$\mu_n \{\Phi \in Q^n : s(\Phi) \geqslant B\} < e^{-n}.$$

Напомним, что О.Н.С. $\Phi = \{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ называется системой сходимости, если любой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \psi_k(x), \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_n^2 < \infty,$$

сходится п.в.

Следствие 2. Почти любая*) система $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \in Q^{\infty}$ является системой сходимости.

Следствие 3. Для почти любой системы $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \in Q^{\infty}$ последовательность $\ln^{1+\varepsilon} n$ является, при любом $\varepsilon > 0$, множителем Вейля для безусловной сходимости п.в. (Определение множителей Вейля см. [2]).

Следующая теорема показывает, что «большинство» систем Φ из Q^n обладают свойствами, которые обнаружились только у «лакунарных» систем, например, у систем независимых функций.

Теорема II. Существует абсолютная постоянная $C_1 > 0$ и последовательность множеств $E_n, E_n \subset Q^n$. $\mu_n(E_n) < 2^{-n}$, $n = 1, 2, \ldots$, такие, что каждая система $\Phi = \{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{n} \in Q^n$, не лежащая в E_n такова, что для любого набора чисел $\{a_i\}_{i=1}^{n}$, $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 1$

$$\max_{1 \leqslant r \leqslant n} m \left\{x \in [0, 1] : \left| \sum_{i=1}^{r} a_i \varphi_i(x) \right| > C_1 \right\} > C_1.$$

О применении результатов, близких к теореме II, см. [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Вейль. Интегрирование в топологических группах и его применения. М., ИЛ, 1950.
2. С. Качмаж, Г. Штейнгауз. Теория ортогональных рядов. М., Физматгиз, 1958.
3. П. Халмош. Теория меры. М., ИЛ, 1953.
4. Б. С. Кашин. Поперечники некоторых конечномерных множеств и классов гладких функций. Изв. АН СССР, сер. матем., 41, № 2, (1977), 334—351.

*) Т. е. любая система из дополнения к некоторому множеству $E \in Q^{\infty}$, $\mu_{\infty}(E) = 0$.