საქართველოს სსრ მეცნიერებათა აკადემიის მოამბე, 97, № 1, 1980
СООБЩЕНИЯ АКАДЕМИИ НАУК ГРУЗИНСКОЙ ССР, 97, № 1, 1980
BULLETIN of the ACADEMY of SCIENCES of the GEORGIAN SSR, 97, № 1, 1980

УДК 517.51

МАТЕМАТИКА

Б. С. КАШИН

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ БИЛИНЕЙНЫХ ФОРМ

(Представлено членом-корреспондентом Академии Л. В. Жижиашвили 16.05.1979)

В работе доказывается одна теорема о билинейных формах, ограниченных в смысле Гильберта. Мы будем пользоваться следующими обозначениями: через $|E|$ будем обозначать число элементов конечного множества; для данной билинейной формы

$$B(x,\ y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\, x_i\, y_j, \quad m \geqslant n \tag{1}$$

положим $\|B(x,\ y)\| = \sup\limits_{\|x\|_{l_2^m} = \|y\|_{l_2^n} = 1} B(x,\ y)$, где $x = \{x_i\}_{i=1}^{m}$, $y = \{y_j\}_{j=1}^{n}$, а для $z = \{z_i\}_1^k$, $\|z\|_{l_2^k} = \left(\sum\limits_1^k z_i^2\right)^{1/2}$. Наконец, $S^k \equiv \{x \in R^k : \|x\|_{l_2^k} = 1\}$. Легко видеть, что для матрицы $\{\widetilde{b}_{ij}\}_{i=1}^{2n-1}{}_{j=1}^{n}$, где $\widetilde{b}_{ij} = 1$ при $1 \leqslant i = j \leqslant n$ и $\widetilde{b}_{ij} = 0$ в остальных случаях, соответствующая ей форма $\widetilde{B}$ такова, что 1) $\|\widetilde{B}\| = 1$; 2) для любого набора целых чисел Ω, $\Omega \subset [1,\ 2n-1]$, $|\Omega| \geqslant n$,

$$\left\| \sum_{i \in \Omega} \sum_{j=1}^{n} \widetilde{b}_{ij}\, x_i\, y_j \right\| = 1.$$

Вместе с тем справедлива

Теорема 1. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует такая постоянная $A = A(\varepsilon)$, что для любой формы вида* (1) *с $\|B(x,\ y)\| = 1$ и $m \geqslant A(\varepsilon) \cdot n$ найдется набор целых чисел $\Omega \subset [1,\ m]$, такой, что $|\Omega| \geqslant n$ и*

$$\left\| \sum_{i \in \Omega} \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\, x_i\, y_j \right\| \leqslant \varepsilon.$$

Из теоремы вытекают следующие следствия:

Следствие 1. Для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что если множество $G \subset S^n$, $1 \leqslant n < \infty$ таково, что для всякого набора $1 \leqslant i_1 \leqslant \cdots \leqslant i_{n-j} \leqslant n$

$G \cap L(i_1,\ \ldots,\ i_{n-j}) \neq \varnothing$, где $L(i_1,\ \ldots,\ i_{n-j}) = \{x = \{x_i\} : x_{i_1} = \cdots x_{i_{n-j}} = 0\}$ и $1 \leqslant j \leqslant n\delta$, то поперечник по Колмогорову (см. [1]) $d_j(G,\ l_2^n)$ удовлетворяет неравенствам

$$1 - \varepsilon \leqslant d_j(G,\ l_2^n) \leqslant 1.$$

Следствие 2. В предположениях следствия 1 найдется такой набор векторов $\{l_\nu\}_{\nu=1}^{j} \subset G$, что j-мерный объем V параллелепипеда, натянутого на вектора l_ν, удовлетворяет неравенству $(1-\varepsilon)^j \leqslant V \leqslant 1$.

Доказательство теоремы 1. Систему функций $\{f_i(x)\}_{i=1}^{i_0}$, $x \in [0, 1]$ назовем $(1, \gamma)$ ограниченной, если

$$\sup_{\{a_i\} \in S^{i_0}} m \left\{ x \in [0, 1] : \left| \sum_{i=1}^{i_0} a_i f_i \right| \geqslant 1 \right\} \leqslant \gamma.$$

Лемма 1. Существуют числа K и $\gamma > 0$, такие, что для любой $(1, \gamma)$ ограниченной системы $\{f_i(x)\}_{i=1}^{i_0}$ найдется множество $E \subset [0, 1]$, $mE \geqslant 3/4$ и такое, что

$$\sup_{\{a_i\} \in S^{i_0}} \left\| \sum_{i=1}^{i_0} a_i f_i \right\|_{L^2(E)} \leqslant K.$$

Лемма 1 легко выводится из теоремы факторизации для линейных операторов, действующих из l^2 в пространство всех измеримых функций (см. [2], теор. 4; [3]).

Лемма 2 (см., напр., [1]). Для каждого α, $0 < \alpha < 1$ на сфере S^n найдется α-сеть (в метрике l_2^n) $\{l^k\}_{k=1}^{k_0}$ с $k_0 \leqslant (C\alpha^{-1})^n$.

Фиксируем форму вида (1) с $m \geqslant 4n$ и единичной нормой и для данного вектора $l = \{l_j\} \in S^n$ и числа $z > 1$ оценим величину $S(l, z)$ — количество наборов целых чисел Ω, $\Omega \subset [1, m]$, $|\Omega| = 2n$ для каждого из которых

$$\left| \left\{ i \in \Omega : \left| \sum_{j=1}^{n} l_j b_{ij} \right| > z m^{-1/2} \right\} \right| > \frac{1}{2} n\gamma,$$ где γ — та же, что и в лемме 1.

Так как $\|B(x, y)\| = 1$, то $\left| \left\{ i \in [1, m] : \left| \sum_{j=1}^{n} l_j b_{ij} \right| > z m^{-1/2} \right\} \right| < m z^{-2}$.

Поэтому

$$S(l, z) \leqslant C_{\left[\frac{m}{z^2}\right]}^{\left[\frac{n\gamma}{2}\right]+1} \cdot C_m^{2n - \left[\frac{n\gamma}{2}\right] - 1} \quad \text{(здесь } C_p^q = 0 \text{ при } q > p \text{ и } p = 0). \tag{2}$$

Пользуясь неравенством $C_p^q \leqslant (Cpq^{-1})^q$, из (2) выводим, что

$$S(l, z) \cdot (C_m^{2n})^{-1} \leqslant (C_1)^n \cdot z^{-2\left(\left[\frac{n\gamma}{2}\right]+1\right)}. \tag{3}$$

Из (3) и леммы 2 вытекает, что если для $\alpha \in (0, 1)$

$$(C_0 \alpha^{-1})^n (C_1)^n \cdot z^{-2\left(\left[\frac{n\gamma}{2}\right]+1\right)} < 1, \tag{4}$$

то найдется такой набор $\overline{\Omega} = \{i_\nu\}$, $\overline{\Omega} \subset [1, m]$, $|\overline{\Omega}| = 2n$, что для каждого вектора $l^k = \{l_j^k\}$ из α сети

$$\left| \left\{ i \in \Omega : \left| \sum_{j=1}^{n} l_j^k b_{ij} \right| > z m^{-1/2} \right\} \right| \leqslant \frac{n \cdot \gamma}{2}. \tag{5}$$

Положим

$$\alpha=(z^2 n\gamma\,(3m)^{-1})^{1/2}$$

и покажем, что если неравенство (4), а следовательно и (5), выполнено и $\alpha\in(0,\ 1)$, то для любого $y=\{y_j\}\in S^n$

$$\left|\left\{i\in\overline{\Omega}:\left|\sum_{j=1}^{n} y_j\,b_{ij}\right|\geqslant 2zm^{-1/2}\right\}\right|\leqslant n\gamma. \tag{7}$$

В самом деле иначе, взяв вектор $l=\{l_j\}\in S^n$ из α сети так, чтобы $\|l-y\|_{l_2^n}\leqslant\alpha$, будем иметь

$$\left|\left\{i\in\overline{\Omega}:\left|\sum_{j=1}^{n}(l_j-y_j)\,b_{ij}\right|>zm^{-1/2}\right\}\right|\geqslant n\gamma\cdot\frac{1}{2},$$

что противоречит тому, что $\|B(x,\ y)\|=1$ (см. (6)).

Определим систему функций $\{f_j^{(z)}(x)\}_{j=1}^n$, $x\in[0,\ 1]$, положив

$$f_j^{(z)}(x)=\frac{m^{1/2}}{2z}\cdot b_{i_\nu j},\qquad x\in\left(\frac{\nu-1}{2n};\ \frac{\nu}{2n}\right),\qquad 1\leqslant\nu\leqslant 2n.$$

При выполнении соотношений (4), (6) и если $\alpha\in(0,1)$ то в силу (7) система $\{f_j^{(z)}(x)\}_{j=1}^n\,(1,\ \gamma)$ ограничена. Поэтому по лемме 1 найдется множество $E\subset[0,\ 1]$, такое, что

$$\sup_{y=\{y_j\}\in S^n}\left\|\sum_{j=1}^{n} y_j\,f_j^{(z)}(x)\right\|_{L^2(E)}\leqslant K,\qquad mE\geqslant 3/4. \tag{8}$$

Пусть $\Omega=\left\{i_\nu: m\left\{\left(\frac{\nu-1}{2n},\ \frac{\nu}{2n}\right)\cap E\right\}\geqslant(4n)^{-1}\right\}$. Легко видеть, что $|\Omega|\geqslant n$ и что норма формы $b^1(x,\ y)=\sum_{i\in\Omega}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\,x_i\,y_j$ не превосходит $8Kn^{1/2}\,m^{-1/2}\,z$.

Таким образом, для того чтобы форма $b^1(x,y)$ удовлетворяла условиям теоремы, достаточно, чтобы выполнялись следующие неравенства: $m\geqslant 4n$; $8Kn^{1/2}m^{-1/2}z\leqslant\varepsilon$; (4); $\alpha\in(0,\ 1)$, где α определено в (6). При этом неравенство (4) принимает вид

$$C_2^n\,z^{-n-2\left[\frac{n\gamma}{2}\right]-1}\left(\frac{m}{n}\right)^{n/2}<1.$$

Нетрудно видеть, что при $m\geqslant A(\varepsilon)\cdot n$, можно найти такое число $z>1$, что все эти соотношения выполняются. Теорема доказана.

Следствие 3. Для $1\leqslant q<2$ существует постоянная C_q, такая, что для любой формы вида (1) с $m=n$ и $\|B\,(x,\ y)\|=1$ найдется такая перестановка строк $\sigma=\{j_\nu\}_{\nu=1}^n$, что

$$\sup_{\{x_\nu\}_{\nu=1}^n\in S^n}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{\nu=1}^{i} b_{ij_\nu}\,x_\nu\right)^q\right)^{1/q}\leqslant C_q\,n^{1/q-1/2}.$$

Отметим в заключение следующий результат, дополняющий оценки поперечников из [4].

Теорема 2. *При* $n=1, 2, \ldots, m \geqslant 2n$ *и* $2<q<\infty$ *для* n-*поперечника октаэдра* B_1^m *в метрике* l_q^m *справедливы неравенства*

$$\frac{1}{4}\min\left(1,\ m^{1/q}\cdot n^{-1/2}\right) \leqslant d_n(B_1^m,\ l_q^m) \leqslant C_q \min\left(1,\ m^{1/q}\cdot n^{-1/2}\right).$$

Академия наук СССР
Математический институт
им. В. А. Стеклова

(Поступило 18.5.1979)

მათემატიკა

ბ. კაშინი

ორადწრფივი ფორმების ერთი თვისების შესახებ

რეზიუმე

დამტკიცებულია თეორემა ჰილბერტის აზრით შემოსაზღვრული ორად-წრფივი ფორმების შესახებ.

MATHEMATICS

B. S. KASHIN

ON A PROPERTY OF BILINEAR FORMS

Summary

A theorem is proved concerning bilinear forms bounded in the sense of Hilbert. The estimations of Kolmogoroff diameters of some finite-dimensional sets is given.

ლიტერატურა — ЛИТЕРАТУРА — REFERENCES

1. В. М. Тихомиров. Некоторые вопросы теории приближений. М., 1976.
2. Е. М. Никишин. Матем. заметки, 13, № 3, 1973.
3. B. Moorey. C. R. Acad. Sci., 274, № 17, 1972.
4. Б. С. Кашин. Изв. АН СССР, сер. матем., 41, №2, 1977.