საქართველოს სსრ მეცნიერებათა აკადემიის მოამბე, 93, № 2, 1979
СООБЩЕНИЯ АКАДЕМИИ НАУК ГРУЗИНСКОЙ ССР, 93, № 2, 1979
BULLETIN of the ACADEMY of SCIENCES of the GEORGIAN SSR, 93, № 2, 1979

УДК 517.51

МАТЕМАТИКА

Б. С. КАШИН

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ПРОСТРАНСТВА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ, СВЯЗАННЫХ С РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТЬЮ

(Представлено членом-корреспондентом Академии Л. В. Жижиашвили 16.11.1978)

Для данного $n > 0$ определим $2n+1$-мерное нормированное пространство U^{2n+1} многочленов $t(x)$ вида $t(x) = \frac{a_0}{\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$ с нормой

$$\| t(x) \|_{U^{2n+1}} = \sup_{\substack{0 < r < n \\ x \in [0, 2\pi]}} \left| \frac{a_0}{\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^{r} a_k \cos kx + b_k \sin kx \right|.$$

В настоящей заметке, являющейся продолжением работы [1], указывается ряд свойств пространства U^{2n+1}, сходных с теми, которые были доказаны в [1] для пространства многочленов $t(x)$ с нормой $\| t(x) \|_{C(0,2\pi)}$. Ниже, для данного набора чисел $\{y_k\}_{k=0}^{2n}$ через $t(x, \{y_k\})$ обозначаем единственный многочлен $t(x) \in U^{2n+1}$, такой, что $t\left(\frac{2\pi k}{2n+1}\right) = y_k$, $0 \leqslant k \leqslant 2n$.

Утверждение 1. Для любого набора чисел $\{y_k\}_{k=0}^{2n}$, $|y_k| \leqslant 1$, $0 \leqslant k \leqslant 2n$ найдется такой набор $\{\varepsilon_k\}_{k=0}^{2n}$, $\varepsilon_k = \pm 1$, $0 \leqslant k \leqslant 2n$, что

$$\| t(x, \{\varepsilon_k y_k\}) \|_{U^{2n+1}} \leqslant K.$$ [1]

Следствие 1. Для любых чисел $n > 0$, $\delta > 0$ и любого набора $\{y_k\}_{k=0}^{2n}$, $|y_k| \leqslant 1$, $0 \leqslant k \leqslant 2n$, найдется такой набор чисел $\{\tilde{y}_k\}_{k=0}^{2n}$, что

$$\text{а)} \quad \sum_{k: y_k = \tilde{y}_k} 1 \geqslant (1-\delta)\cdot(2n+1); \quad \text{б)} \quad \| t(x, \{\tilde{y}_k\}) \|_{U^{2n+1}} \leqslant \frac{C}{\delta}.$$

Следствие 1 можно считать конечномерным аналогом теоремы Д. Е. Меньшова ([2], стр. 448) о возможности исправления любой непрерывной функции на множестве малой меры до функции с равномерно сходящимся рядом Фурье. А. М. Олевский [3] показал, что изменяя даже половину чисел $\{y_k\}$ существенно уменьшить сумму модулей коэффициентов многочлена $t(x, \{y_k\})$ вообще говоря нельзя.

[1] Ниже через K, C, c обозначаются абсолютные постоянные.

Из утверждения 1, с помощью рассуждений, приведенных в [1], вытекает

Утверждение 2. Объем $V(B_U^{2n+1})$ единичного шара B_U^{2n+1} пространства U^{2n+1} удовлетворяет неравенствам

$$n^{-n}\cdot c^{-n} > V(B_U^{2n+1}) > n^{-n}\cdot C^{-n}.$$

Из утверждения 2 и следствия 2 из [1] вытекает

Утверждение 3. Для всякого $\varepsilon>0$ существует постоянная $c_\varepsilon>0$, такая, что в любом подпространстве $L\subset L^2(0,2\pi)$ коразмерности m найдется такой многочлен $T(x)=\frac{a_0}{\sqrt{2}}+\sum_{k=1}^{n} a_k\cos kx+b_k\sin kx$ степени $n\leqslant\frac{m}{2}\cdot(1+\varepsilon)$, что

$$\text{а)}\quad \|T(x)\|_{U^{2n+1}}\leqslant 1;\quad \text{б)}\quad |a_0|+\sum_{k=1}^{n}|a_k|+|b_k|\geqslant c_\varepsilon\cdot m^{1/2}.$$

Приведем доказательство утверждения 1.

Лемма. Для любого δ, $0<\delta<1/2$ и любого набора $\{y_k\}_{k=0}^{2n}$, $|y_k|\leqslant 1$, $0\leqslant k\leqslant 2n$ найдется такой набор $\{\varepsilon_k\}_{k=0}^{2n}$, $\varepsilon_k=\pm 1$, что при всех $0\leqslant j<j'\leqslant 2n$

$$S(j,j',\{\varepsilon_k y_k\})\equiv\left\|\sum_{k=j+1}^{j'}\varepsilon_k y_k\sin kx\right\|_{C(0,2\pi)}\leqslant C_\delta(j'-j)^{1/2+\delta};\tag{1}$$

$$\widetilde{S}(j,j',\{\varepsilon_k y_k\})\equiv\left\|\sum_{k=j+1}^{j'}\varepsilon_k y_k\cos kx\right\|_{C(0,2\pi)}\leqslant C_\delta(j'-j)^{1/2+\delta}.$$

В доказательстве леммы используются следующие два факта (первый из них — простое следствие экспоненциальных оценок функций распределения полиномов по системе Радемахера, а второй — следствие неравенства Бернштейна): 1) для любого набора векторов $\{\bar e_i\}_{i=1}^{i_0}$, $\bar e_i=\{e_{ij}\}_{j=1}^{j_0}$, $|e_{ij}|\leqslant 1$ найдется такой набор $\{\varepsilon_j\}_{j=1}^{j_0}$, $\varepsilon_j=\pm 1$, что при $1\leqslant i\leqslant i_0$

$$\max_{1\leqslant q=q(i)\leqslant j_0}\left|\sum_{j=1}^{q}e_{ij}\varepsilon_j\right|\leqslant K\cdot(j_0\ln(i_0 j_0))^{1/2};$$

2) для любой пары чисел p и $p'(p<p')$ найдется не более $C(p'-p)$ точек $x_i\subset[0,2\pi]$, таких, что для любого многочлена

$$P(x)=\sum_{k=p+1}^{p'}a_k\cos kx+b_k\sin kx,\quad \|P(x)\|_{C(0,2\pi)}\leqslant 4\max_i|P(x_i)|.$$

Для данного δ, $0<\delta<1/2$, положим $r=\left[\frac{2}{\delta}\right]+1$. Не ограничивая общности, можно считать, что число $2n$ имеет вид $2n=(s!)^r$; s — целое.

При $1 \leqslant \nu \leqslant s$ разобьем отрезок $(0,\ 2n]$ на $(s!\,/\,\nu!)^r$ отрезков длины $(\nu!)^r$. Построим последовательность наборов $\{\varepsilon_k^\nu\}_{k=1}^{2n}$, $1 \leqslant \nu \leqslant s$ $(\varepsilon_k^\nu = \pm 1)$, которая будет такова, что

а) неравенства (1) будут выполняться для набора $\{\varepsilon_k^\nu\}$ и таких пар чисел $(j,\ j')$, что $p\cdot(\nu!)^r \leqslant j < j' \leqslant (p+1)(\nu!)^r$, $0 \leqslant p < (s!/\nu!)^r$ (тем самым набор $\{\varepsilon_k^s\}$ будет искомым);

б) при $p\cdot(\nu!)^r < k \leqslant (p+1)(\nu!)^r$, $0 \leqslant p < (s!\,/\,\nu!)^r$ будет выполняться равенство

$$\varepsilon_k^{\nu+1} = \varepsilon_k^\nu \cdot \gamma_p, \text{ где } \gamma_p = \pm 1. \tag{2}$$

Будем обозначать

$$B_\nu \equiv \max_{\substack{0 \leqslant p < (s!/\nu!)^r \\ p\cdot(\nu!)^r < j' \leqslant (p+1)(\nu!)^r}} \max\left(S\left(p(\nu!)^r,\ j',\ \{\varepsilon_k^\nu y_k\}\right),\ \widetilde{S}\left(p(\nu!)^r,\ j',\ \{\varepsilon_k^\nu y_k\}\right)\right). \tag{3}$$

← j' делится на $[(\nu-1)!]^r$

Выбирая набор $\{\varepsilon_k^1\}_{k=0}^{2n}$ произвольно, получаем, что $B_1 \leqslant 1$. Если теперь набор $\{\varepsilon_k^\nu\}$ уже выбран (и тем самым число B_ν определено), то пользуясь приведенными в начале доказательства леммы утверждениями 1) и 2) можно построить набор $\{\varepsilon_k^{\nu+1}\}_{k=0}^{2n}$ так, чтобы соотношение (2) выполнялось, а число $B_{\nu+1}$, определенное в (3) по набору $(\varepsilon_k^{\nu+1})$ удовлетворяло неравенству

$$B_{\nu+1} \leqslant K\cdot B_\nu\cdot(\nu+1)^{r/2}\cdot \ln\,[(\nu+1)!\,]^r. \tag{4}$$

Таким образом, набор $\{\varepsilon_k^s\}$ будет обладать тем свойством, что при $(q!)^r < j' - j \leqslant [(q+1)!]^r$

$$\max\left(S(j,\ j',\ \{\varepsilon_k^s y_k\}),\ \widetilde{S}(j,\ j',\ \{\varepsilon_k^s y_k\})\right) \leqslant 2\sum_{\nu=1}^{q+1} B_\nu. \tag{5}$$

Но из (4) и неравенства $B_1 \leqslant 1$ следует, что

$$B_{\nu+1} \leqslant [(\nu+1)!]^{r/2}\cdot K^{\nu+1}\cdot r^{\nu+1}\cdot \prod_{1 \leqslant k \leqslant \nu+1} \ln(k!) \leqslant C_r\,(\nu!)^{r/2+2}.$$

Следовательно, правая часть в (5) не превосходит $C_r'\,(q!)^{r/2+2} \leqslant$ $\leqslant C_\delta\,(j'-j)^{1/2+\delta}$; лемма доказана. Для доказательства утверждения 1 рассмотрим набор $\{\varepsilon_k\}_{k=0}^{2n}$, построенный в лемме по набору $\{y_k\}_{k=0}^{2n}$, какому-то числу δ, $0 < \delta < 1/2$ и оценим $\|\,t(x,\ \{\varepsilon_k y_k\})\,\|_{U^{2n+1}}$. При $0 \leqslant m \leqslant n$ частная сумма $S_m(y,\ t(x,\ \{\varepsilon_k y_k\}))$ в точке $y \in [0{,}2\pi]$ равна (см. [4], стр. 16)

$$S_m(y,\ t(x,\ \{\varepsilon_k y_k\})) = \frac{1}{2n+1}\cdot\sum_{k=0}^{2n} \varepsilon_k y_k \frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2\pi k}{2n+1} - y\right)}{\sin\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2\pi k}{2n+1} - y\right)}. \tag{6}$$

Применяя для оценки суммы (6) преобразование Абеля и пользуясь неравенствами (1) и очевидной оценкой $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k \sin(k-s)\,y\right| \leqslant$

$$\leqslant \left| \sum_{k=1}^{n} a_k \sin ky \right| + \left| \sum_{k=1}^{n} a_k \cos ky \right|$$ (s—любое число), получаем нужную нам оценку

$$| S_m(y,\ t(x,\ \{\varepsilon_k\, y_k\}))| \leqslant C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{1/2+\delta}}{k^2} \leqslant K.$$

Академия наук СССР
Математический институт

(Поступило 17.11.1978)

მათემატიკა

ბ. კაშინი

ტრიგონომეტრიული პოლინომების სივრცის ზოგიერთი თვისების შესახებ თანაბარ კრებადობასთან დაკავშირებით

რეზიუმე

დადგენილია რიგით $\leqslant n$ ტრიგონომეტრიულ პოლინომთა სივრცის ზოგიერთი თვისება თანაბარ კრებადობასთან დაკავშირებით.

MATHEMATICS

B. S. KASHIN

ON SOME PROPERTIES OF THE SPACE OF TRIGONOMETRIC POLYNOMIALS IN CONNECTION WITH UNIFORM CONVERGENCE

Summary

Some properties of the space of trigonometric polynomials of degree $\leqslant n$, connected with uniform convergence of Fourier series, are investigated.

ლიტერატურა — ЛИТЕРАТУРА — REFERENCES

1. Б. С. Кашин. Труды МИАН, т. 145.
2. Н. К. Бари. Тригонометрические ряды. М., 1961.
3. А. М. Олевский. ДАН СССР, 238, № 4, 1978.
4. А. Зигмунд. Тригонометрические ряды, т. 2. М., 1965.