Малые торические вырождения трёхмерных многообразий Фано: индексы пересечения на торических многообразиях в неоднозначных случаях.

С. С. Галкин

1 апреля 2008 г.

Содержание

1.1 Обозначения.

Теорема 1.1. *Пусть X — неособое и собственное (возможно, не проективное) торическое многообразие. Кольцо когомологий $H^{\bullet}(X, \mathbb{Q})$ порождено классами инвариантных дивизоров D_{ρ_i}. Соотношения в этом кольце порождены соотношениями Стенли–Ризнера — для всякого $J \subset \Sigma^{(1)}$, не содержащегося ни в одной грани Δ, выполнено*

$$\prod_{j \in J \subset \Sigma^{(1)}} D_{\rho_j} = 0,$$

и соотношениями тривиальности главных дивизоров - $\forall m \in M$

$$\sum_i \langle m, \rho_i \rangle D_{\rho_i} = 0.$$

Это означает что в кольце когомологий гладкого торического многообразия все соотношения порождаются наивными: пересечение k различных дивизоров пусто, если соответствующие этим дивизорам 1-мерные грани не лежат на одной k-мерной грани σ. Если же лежат, то они трансверсально пересекаются в $(d-k)$-мерной орбите соответствующей грани σ.

Лемма 1.2. *Пусть X_Σ — гладкое n-мерное торическое многообразие. Рассмотрим однородную систему линейных уравнений*

$$x_{j_1\ldots j_n} = 0, \text{ если } \{\rho_{j_1} \ldots \rho_{j_n}\} \text{ не конус в } \Sigma$$

$$\sum \langle m, \rho_j \rangle x_{j_1 \ldots j_{i-1} j j_{i+1} \ldots j_n} = 0$$

Она имеет единственное с точностью до пропорциональности решение. Выберем единственное решение удовлетворяющее условию $x_{j_1\ldots j_n} = 1$, если $\{\rho_{j_1} \ldots \rho_{j_n}\}$ является конусом в Σ. Тогда числа $x_{j_1\ldots j_n}$ равны индексам пересечения дивизоров $D_{j_1} \cdot \ldots \cdot D_{j_n}$ на X_Σ.

Предложение 1.3. *Для дивизора Вейля $\sum a_\rho D_\rho$ условие локальной главности в обыкновенной двойной особенности на трёхмерном торическом многообразии выглядит так — сумма коэффициентов при инвариантных неприводимых дивизорах соответствующих концам диагонали $\rho_A \rho_C$ параллелограмма $\rho_A \rho_B \rho_C \rho_D$ равна аналогичной сумме на концах диагонали $\rho_B \rho_D$:*

$$a_{\rho_A} + a_{\rho_C} = a_{\rho_B} + a_{\rho_D}.$$

Лемма 1.4. *Пусть X — нодальное трёхмерное торическое многообразие Фано. Тогда группа $\mathrm{Pic}(X)$ определяется из точной последовательности*

$$0 \to \mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(\tilde{X}) \xrightarrow{\phi} \oplus_{ABCD} \mathbb{Z},$$

в последнем члене суммирование происходит по всем базисным параллелограммам $\rho_A \rho_B \rho_C \rho_D$ для X, $\phi = \oplus_{ABCD} \phi_{ABCD}$, и $\phi_{ABCD}(\sum a_\rho D_\rho) = (a_{\rho_A} - a_{\rho_B} + a_{\rho_C} - a_{\rho_D})$.

Замечание 1.5. Используя лемму 0.2 и лемму 0.4, можно достаточно эффективно вычислить теорию пересечений на группе Пикара $\mathrm{Pic}(X)$ $\mathbb{Q}$-горенштейнового торического многообразия X, имеющего малое разрешение $f : \tilde{X} \to X$

(например, этим свойством обладает трёхмерное нодальное X). Индекс самопересечения D^n дивизора Картье $D \in \mathrm{Pic}(X)$ равен индексу пересечения его полного (совпадающего с собственным) прообраза $\tilde{D} = f^* D$ на $\tilde{X}$. При малом раздутии группа дивизоров Вейля не меняется, дивизор $\tilde{D}$ представлен тем же самым дивизором Вейля, что и D (его собственным прообразом).

Таким образом, чтобы найти индексы пересечения на $\mathrm{Pic}(X)$ нужно решить две системы линейных уравнений: одну систему на индексы пересечений $D_{i_1} \cdot \ldots \cdot D_{i_n}$ описанную в 0.2, и вторую — систему уравнений 0.3 чтобы выделить $\mathrm{Pic}(X)$ как подгруппу в $\mathrm{Pic}(\tilde{X})$[1].

Обозначение. Пусть M — целочисленная матрица размера $3 \times v$. Обозначим через $\Delta(M)$ многогранник, являющийся выпуклой оболочкой векторов-столбцов M. Пусть M выбрана так, что 0 лежит строго внутри $\Delta(M)$, и ни один из столбцов M не лежит в выпуклой оболочке остальных. Через $\mathbb{P}(M)$ обозначим торическое многообразие Фано, соответствующее многограннику $\Delta(M)$. Пусть D_i — инвариантные дивизоры Вейля, соответствующие i-ой вершине многогранника $\Delta(M)$, $G_1, \ldots, G_\rho$ — образующие группы $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}(M))$.

Для вычисления инварианта d сначала мы находим все индексы пересечения для элементов базиса группы Пикара $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}(M))$, затем вычисляем дискриминант. Чтобы вычислить индексы пересечения

[1]Сценарий для *pari/gp* реализующий описанный выше алгоритм: http://www.mi.ras.ru/ galkin/work/NodalToric3foldPicard.gp.

дивизоров из $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}(M))$ мы используем соображение 0.5 — вычисляем кольцо $H^\bullet(\tilde{\mathbb{P}}(M))$, индексы пересечения для элементов группы Пикара $\mathrm{Pic}(\tilde{\mathbb{P}}(M))$ малого крепантного разрешения[2] $\phi : \tilde{\mathbb{P}}(M) \to \mathbb{P}(M)$, затем получаем индексы пересечения на $\mathbb{P}(M)$ ограничением с $\tilde{\mathbb{P}}(M)$.

1.2 Многообразия с инвариантами ($\rho = 2, \deg = 30, b = 0$).

Случай 1.6 ($v = 9, f = 10$).

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$G_1 = D_1 + D_4 + D_5 + D_8$, $G_2 = -D_1 + D_6 + D_9$.

$$int(aG_1 + bG_2, aG_1 + bG_2, aG_1 + bG_2) = (aG_1 + bG_2)^3 = a^3 + 6ba^2 - 2b^3$$

$$-K = G_1 + 2G_2$$
$$d = -24$$

Случай 1.7 ($v = 10, f = 11$).

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$G_1 = D_7 + D_8 + D_9$, $G_2 = D_2 + D_3 + D_5 - D_6 + D_{10}$.

$$(aG_1 + bG_2)^3 = -2a^3 + 6ba^2 - 3b^3$$

$$-K = 3G_1 + 2G_2$$
$$d = -24$$

Случай 1.8 ($v = 9, f = 10$).

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$G_1 = -D_1 + 2D_3 + D_4 - D_7 + D_8$, $G_2 = D_1 + D_7 + D_9$.

$$(aG_1 + bG_2)^3 = 3ba^2 + 6b^2a$$

$$-K = G_1 + G_2$$
$$d = -21$$

[2] Мы берём произвольное максимальное крепантное разрешение, как объяснялось в 0.5, ответ получится одинаковый для проективного и непроективного разрешения.

1.3 Многообразия с инвариантами $(\rho = 2, \deg = 46, b = 0)$

Случай 1.9 $(v = 6, f = 7)$**.**

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$G_1 = D_4 - D_3$, $G_2 = D_3 + D_5$.

$$(aG_1 + bG_2)^3 = a^3 - 3ba^2 + 3b^2a + b^3$$

$$-K = G_1 + 3G_2$$

$$d = -12$$

Случай 1.10 $(v = 6, f = 7)$**.**

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$G_1 = D_4 - D_2$, $G_2 = D_2 + D_6$.

$$(aG_1 + bG_2)^3 = a^3 - 3ba^2 + 2b^3$$

$$-K = G_1 + 3G_2$$

$$d = -13$$

Случай 1.11 $(v = 7, f = 8)$**.**

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$G_1 = D_2 - D_3 + D_5$, $G_2 = D_3 + D_6$.

$$(aG_1 + bG_2)^3 = -a^3 + 3b^2a$$

$$-K = 3G_1 + 2G_2$$

$$d = -13$$

1.4 Многообразия с инвариантами $(\rho = 3, \deg = 36, b = 0)$

Случай 1.12 $(v = 8, f = 10)$**.**

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$G_1 = D_1$, $G_2 = D_3 + D_5$, $G_3 = D_2 + D_8$.

$$(aG_1 + bG_2 + cG_3)^3 = (3b + 3c)a^2 + 6cba$$

$$-K = 2G_1 + G_2 + G_3$$
$$d = 28$$

Случай 1.13 $(v = 8, f = 10)$**.**

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$G_1 = D_4 + D_5$, $G_2 = D_3 + D_7$, $G_3 = -D_3 + D_4 + D_8$.

$$(aG_1 + bG_2 + cG_3)^3 = (3b^2 - 3c^2)a + (3cb^2 - 6c^2b + 3c^3)$$

$$-K = 2G_1 + 3G_2 + G_3$$
$$d = 28$$

Случай 1.14 $(v = 9, f = 11)$**.**

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$G_1 = D_1$, $G_2 = D_3 + D_5 + D_8$, $G_3 = -D_5 + D_7 + D_9$.

$$(aG_1 + bG_2 + cG_3)^3 = 3ba^2 + (6cb - 6c^2)a$$

$$-K = 2G_1 + 2G_2 + G_3$$
$$d = 28$$

Случай 1.15 $(v=8, f=10)$.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$G_1 = D_2 + D_4$, $G_2 = D_5$, $G_3 = -D_2 + D_3 + D_7$.

$$(aG_1 + bG_2 + cG_3)^3 = a^3 + (3b+3c)a^2 + (6cb - 3c^2)a + (-3c^2b + c^3)$$

$$-K = G_1 + 2G_2 + G_3$$
$$d = 26$$

Случай 1.16 $(v=9, f=11)$.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$G_1 = D_3 + D_4$, $G_2 = D_1 + D_3 + D_8$, $G_3 = -D_1 - D_3 + D_7 + D_9$.

$$(aG_1 + bG_2 + cG_3)^3 = 2a^3 + 6ba^2 + (6b^2 - 6c^2)a + (b^3 - 3c^2b + 2c^3)$$

$$-K = 2G_1 + G_2 + G_3$$
$$d = 26$$

1.5 Многообразия с инвариантами $(\rho = 3, \deg = 38, b = 0)$

Случай 1.17 $(v=7, f=9)$.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$G_1 = D_1$, $G_2 = D_2$, $G_3 = D_5 + D_6$.

$$(aG_1 + bG_2 + cG_3)^3 = a^3 - 3ca^2 + 3c^2a + (b^3 - 3cb^2 + 3c^2b)$$

$$-K = G_1 + G_2 + 3G_3$$
$$d = 24$$

Случай 1.18 $(v=8, f=10)$.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$G_1 = D_2 + D_5$, $G_2 = -D_1 - D_2 + D_6$, $G_3 = D_1 + D_7$.

$$(aG_1 + bG_2 + cG_3)^3 = a^3 + (-3b + 3c)a^2 + (-3b^2 + 6cb - 3c^2)a + (-2b^3 + 3cb^2 - 3c^2b + c^3)$$

$$-K = 3G_1 + 3G_2 + 2G_3$$
$$d = 24$$

Случай 1.19 $(v = 7, f = 9)$**.**

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$G_1 = D_1$, $G_2 = D_4 - D_3$, $G_3 = D_3 + D_7$.

$$(aG_1 + bG_2 + cG_3)^3 = -a^3 - 3ba^2 + (-3b^2 + 3c^2)a + (-3cb^2 + 3c^2b)$$

$$-K = G_1 + G_2 + 3G_3$$
$$d = 28$$

Случай 1.20 $(v = 8, f = 10)$**.**

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$G_1 = -D_3 + D_4 + D_5$, $G_2 = D_3 + D_7$, $G_3 = D_4 + D_8$.

$$(aG_1 + bG_2 + cG_3)^3 = (-3b - 3c)a^2 + (3b^2 - 3c^2)a + (3cb^2 - c^3)$$

$$-K = 3G_1 + 2G_2 + G_3$$
$$d = 28$$

Случай 1.21 $(v = 8, f = 10)$**.**

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$G_1 = D_4 + D_6$, $G_2 = D_7 - D_4$, $G_3 = D_2 + D_8$.

$$(aG_1 + bG_2 + cG_3)^3 = 3ca^2 - 3b^2a + (b^3 - c^3)$$

$$-K = 3G_1 + G_2 + 2G_3$$
$$d = 28$$

Случай 1.22 $(v = 9, f = 11)$.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$G_1 = D_3 + D_5$, $G_2 = D_3 + D_4 + D_6$, $G_3 = -D_3 + D_7 + D_9$.

$$(aG_1 + bG_2 + cG_3)^3 = 3ba^2 + (6b^2 - 3c^2)a + (2b^3 - 3c^2b + c^3)$$

$$-K = 3G_1 + 2G_2 + G_3$$
$$d = 28$$

Случай 1.23 $(v = 8, f = 10)$.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$G_1 = D_1$, $G_2 = D_3 + D_5$, $G_3 = -D_3 + D_4 + D_6$.

$$(aG_1 + bG_2 + cG_3)^3 = (3b^2 + 6cb - 3c^2)a + (3cb^2 + 3c^2b - c^3)$$

$$-K = G_1 + 2G_2 + G_3$$
$$d = 22$$

1.6 Многообразия с инвариантами $(\rho = 3, \deg = 42, b = 0)$

Случай 1.24 $(v = 7, f = 9)$.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$G_1 = D_1$, $G_2 = D_5 - D_2$, $G_3 = D_2 + D_6$.

$$(aG_1 + bG_2 + cG_3)^3 = a^3 - 3ca^2 + (-3b^2 + 6cb)a + (b^3 - 3cb^2 + 2c^3)$$

$$-K = G_1 + 2G_2 + 3G_3$$
$$d = 20$$

Случай 1.25 $(v = 8, f = 10)$.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$G_1 = D_2 - D_4 + D_5$, $G_2 = D_4 + D_6$, $G_3 = D_2 + D_8$.

$$(aG_1 + bG_2 + cG_3)^3 = -a^3 - 3ca^2 + 3b^2a + (3cb^2 - 3c^2b + c^3)$$

$$-K = 3G_1 + 2G_2 + G_3$$
$$d = 20$$

Случай 1.26 $(v = 7, f = 9)$**.**

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$G_1 = D_4 - D_3$, $G_2 = D_5$, $G_3 = D_3 + D_7$.

$$(aG_1 + bG_2 + cG_3)^3 = -3a^3 + (-6b + 3c)a^2 + (-3b^2 + 6cb)a$$

$$-K = G_1 + 2G_2 + 4G_3$$
$$d = 22$$

Случай 1.27 $(v = 7, f = 9)$**.**

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$G_1 = D_1$, $G_2 = D_2$, $G_3 = D_4 + D_6$.

$$(aG_1 + bG_2 + cG_3)^3 = (3b^2 + 6cb)a + (3cb^2 + 3c^2b)$$

$$-K = G_1 + 2G_2 + G_3$$
$$d = 22$$

Случай 1.28 $(v = 8, f = 10)$**.**

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G_1 = -D_3 + D_4 + D_5, G_2 = D_3 + D_7, G_3 = D_3 - D_4 + D_8.$$
$$(aG_1 + bG_2 + cG_3)^3 = -3a^3 + (3b + 3c)a^2 - 3c^2b$$
$$-K = 4G_1 + 3G_2 + 2G_3$$
$$d = 22$$

1.7 Многообразия с инвариантами $(\rho = 4, \deg = 32, b = 0)$

Случай 1.29 $(v = 9, f = 12)$**.**

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$G_1 = D_3$, $G_2 = D_5 + D_6$, $G_3 = -D_1 - D_5 + D_8$, $G_4 = D_1 + D_5 + D_9$.

$$\begin{aligned}(aG_1 + bG_2 + cG_3 + dG_4)^3 = a^3 + (-3b + (3c - 6d))a^2 + \\ + (3b^2 + (-6c + 12d)b + (-12dc + 12d^2))a + \\ + ((-6c^2 + 12dc - 6d^2)b + (-6dc^2 + 12d^2c - 6d^3))\end{aligned}$$

$$-K = 2G_1 + G_2 + G_3 - G_4$$
$$d = -40$$

Случай 1.30 $(v = 9, f = 12)$**.**

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$G_1 = D_1$, $G_2 = D_4 + D_6$, $G_3 = D_7$, $G_4 = -D_4 + D_5 + D_8$.

$$\begin{aligned}(aG_1 + bG_2 + cG_3 + dG_4)^3 = (6cb + (-3c^2 + 6dc - 6d^2))a + \\ + ((6dc - 3d^2)b + (-3dc^2 + 6d^2c - 4d^3))\end{aligned}$$

$$-K = G_1 + 2G_2 + 2G_3 + G_4$$
$$d = -39$$