

## Торические поверхности дель Пеццо и пучки эллиптических кривых с низким ветвлением

С. С. Галкин

**Аннотация.** В статье изучаются слабые модели Ландау–Гинзбурга зеркально симметричные к поверхностям дель Пеццо. Показано что такие модели существуют, и для поверхностей отличных от  $\mathbb{F}_1$  и  $S_7$  их компактификации являются эллиптическими пучками минимального ветвления. В конце иллюстрируется гипотеза Дубровина: в случае поверхностей дель Пеццо она связывает эллиптические пучки минимального ветвления и 3-блочные полные исключительные наборы.

Для поверхностей дель Пеццо степени  $d$  в работе [1] (и предшествовавших ей работах, таких как [36]) построены зеркально-симметричные модели Ландау–Гинзбурга для достаточно общего выбора симплектической формы. Построенные таким образом модели имеют следующую комплексную структуру: особый слой над бесконечностью — это колесо из  $d$  кривых, и кроме этого особого слоя есть ещё  $12 - d$  простых особых слоев. В этой главе мы рассмотрим противоположный случай — зеркально симметричные поверхности дель Пеццо слабые модели Ландау–Гинзбурга, в которых простые особые слои склеиваются в 3 (минимальное возможное количество) вырожденных слоя, соответствующие естественному выбору симплектической формы в антиканоническом классе. Для этих моделей мы проверим гипотезу зеркальной симметрии вариаций структур Ходжа.

### 1. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ.

Впервые систематическое изложение теории эллиптических поверхностей было дано Кодарой в работе [26]. Напомним основные результаты.

Обозначим через  $t$  координату на  $\mathbb{A}^1$ . Тогда  $j$ -инвариант  $j(t)$  эллиптической поверхности над  $\mathbb{P}^1$  — это  $j$ -инвариант общего слоя эллиптической поверхности над  $\mathbb{P}^1$ , то есть  $j$ -инвариант эллиптической кривой над полем функций  $\mathbb{C}(t)$ . Будем говорить что эллиптическая поверхность *изотривиальна*, если  $j(t)$  — константа (то есть  $j$  — отображение в точку, все неособые слои изоморфны над  $\mathbb{C}$ ). Будем говорить что эллиптическая поверхность *якобиева*, если она имеет сечение (якобиан произвольной эллиптической поверхности — якобиева эллиптическая поверхность). Если  $E_0$  — произвольная эллиптическая поверхность над кривой  $C$ , разрешив её особенности, а затем стянув все  $(-1)$ -кривые в компонентах слоёв, получим *модель Нерона*  $E$  — минимальную неособую модель среди эллиптических якобиевых поверхностей над  $C$  ([29]). Пусть  $E'$  — поверхность полученная из модели Нерона  $E$  якобиевой эллиптической поверхности стягиванием всех компонент слоёв не пересекающих нулевое сечение (*модель Вейерштрасса*). Поверхность  $E'$  имеет дювалевские особенности, а стягивание  $E \rightarrow E'$  — минимальное (крепантное) разрешение особенностей.

Напомним, что если эллиптическая поверхность  $E'$  задана в вейерштрассовой нормальной форме

$$y^2 = x^3 + Ax + B,$$

то её  $j$ -инвариант равен

$$j = 1728 \frac{4A^3}{27B^2 + 4A^3},$$

а дискриминант

$$\Delta = 27B^2 + 4A^3.$$

Глобально, дискриминант  $\Delta$  это дивизор на кривой  $C$ . Обозначим  $J = \frac{j}{1728}$ , а  $\omega_E = \frac{dx}{y}$  — дифференциал *Герона*. Пусть  $c \in C$  — точка на базе, обозначим  $a = \text{ord}_c A, b = \text{ord}_c B, \delta = \text{ord}_c \Delta, e = e_J(c)$  — индекс ветвления отображения  $J$  в точке  $c$ .

**Теорема 1.1** ([26]). *Все возможные слои модели Герона над точкой  $c$  перечислены в следующей таблице ( $I_0$  — неособые,  $I_n$  — полустабильные).*

Тип особого слоя  $E_c$  определяется локальной монодромией локальной системы  $R^1 t_*(\mathbb{Z}_E)$  вокруг точки  $c$ . Пусть  $I_{[p,q]} = \begin{pmatrix} (1-pq) & p^2 \\ -q^2 & (1+pq) \end{pmatrix}$  — симплектическое отражение относительно вектора  $[p, q]$ . Обозначим  $I_A = I_{[0,1]}, I_B = I_{[-1,1]}, I_C = I_{[1,1]}$ .

обозначение	$a$	$b$	$\delta$	$J$	$1 + e_J(c)$	особенность $E'$	моно-дромия $T$	$Tr(T)$
$I_0(G)$	0	0	0	$G$	1	—	1	2
$I_0(0)$	$a \geq 1$	0	0	0	$3a$	—	1	2
$I_0(1)$	0	$b \geq 1$	0	1	$2b$	—	1	2
$I_0^*(G)$	2	3	6	$G$	1	$D_4$	$I_A^4 I_B I_C$	-2
$I_0^*(0)$	$a \geq 3$	3	6	0	$3a - 6$	$D_4$	$I_A^4 I_B I_C$	-2
$I_0^*(1)$	2	$b \geq 4$	6	1	$2b - 6$	$D_4$	$I_A^4 I_B I_C$	-2
$I_n, n \geq 1$	0	0	$n$	$\infty$	$n$	$A_{n-1}$	$I_A^n$	2
$I_n^*, n \geq 1$	2	3	$n + 6$	$\infty$	$n$	$D_{n+4}$	$I_A^{n+4} I_B I_C$	-2
$II$	$a \geq 1$	1	2	0	$3a - 2$	—	$I_A I_C$	1
$III$	1	$b \geq 2$	3	1	$2b - 3$	$A_1$	$I_A^2 I_C$	0
$IV$	$a \geq 2$	2	4	0	$3a - 4$	$A_2$	$I_A^3 I_C$	-1
$IV^*$	$a \geq 3$	4	8	0	$3a - 8$	$E_6$	$I_A^5 I_B I_C^2$	-1
$III^*$	3	$b \geq 5$	9	1	$2b - 9$	$E_7$	$I_A^6 I_B I_C^2$	0
$II^*$	$a \geq 4$	5	10	0	$3a - 10$	$E_8$	$I_A^7 I_B I_C^2$	1

Будем говорить что у эллиптической поверхности полустабильная редукция в точке  $c$  (или, что слой над  $c$  полустабильный), если особый слой над  $c$  имеет тип  $I_n$ . Будем говорить, что эллиптическая поверхность полустабильна, если все её особые слои имеют полустабильную редукцию. Пусть  $r(c)$  — ранг группы порождённой лежащими в слое над  $c$  исключительными дивизорами отображения  $E \rightarrow E'$  (то есть, ранг системы Дынкина ассоциированной с дювалевской особенностью модели Вейерштрасса).

Разобрав все случаи в таблице докажем следующее

- Утверждение 1.2.**
- (1) *Топологическая эйлерова характеристика приведённого слоя  $E$  над  $c$  равна  $\delta$ ,*
  - (2)  $r(c) = \delta \iff$  *слой над  $c$  гладкий,*
  - (3)  $r(c) = \delta - 1 \iff$  *слой над  $c$  полустабильный,*
  - (4) *в остальных случаях  $r(c) = \delta - 2$ .*

С другой стороны, топологическая эйлерова характеристика тотального пространства  $E$  (равная  $12\chi(E, \mathcal{O}_E)$  по формуле Нётера) равна сумме топологических эйлеровых характеристик особых слоёв (гладкие слои — эллиптические кривые, имеют топологическую эйлерову характеристику равную 0), поэтому

$$(1.3) \quad \deg \Delta = \sum_c \delta_c = \sum_c \chi_{top}(E_c) = \chi_{top}(E) = 12\chi(E, \mathcal{O}_E).$$

Пусть  $\Phi(E)$  — группа Морделла–Вейля, то есть группа всех сечений  $E$  над  $C$ . Тогда группа Пикара  $E$  порождена сечениями и неприводимыми компонентами слоёв (см., например [33], [35] или [28]), точное выражение этого разложения даёт формула Шиоды–Тейта

$$\rho(E) = \text{rk } \Phi(E) + 2 + \sum_c r(c).$$

Эллиптическая поверхность  $E$  называется *экстремальной*, если  $h^{1,1}(E) = \rho(E)$  (для рациональной поверхности это условие выполнено автоматически) и группа Морделла–Вейля  $\Phi(E)$  конечна. Например, экстремальными являются рациональные полустабильные поверхности, если у них 4 особых слоя.

Если поверхность  $E$  рациональная, то  $\rho(E) = 10$ ,  $\chi_{top}(E) = 12$ .

С подгруппой конечного индекса  $G \subset PSL(2, \mathbb{Z})$  связана модулярная эллиптическая поверхность Шиоды  $S(G)$  — тотальное пространство универсальной эллиптической кривой над модулярной кривой  $X(G) = \mathcal{H}/G$ , где  $\mathcal{H}$  — верхняя полуплоскость ([33]).

Следующая теорема была доказана Бовилем.

**Теорема 1.4** ([5],[6]). *У неизотривиальной эллиптической поверхности не менее трёх особых слоёв.*

*Пусть  $S$  — неизотривиальная эллиптическая поверхность над полной кривой  $C$  со всюду полустабильной редукцией. Тогда*

- (1) *У  $S$  не менее четырёх особых слоёв.*
- (2) *Если у  $S$  ровно четыре особых слоя, то кривая  $C \simeq \mathbb{P}^1$ , а сама поверхность  $S$  рациональна, якобиева, экстремальная, и изоморфна (над  $\mathbb{C}$ ) одной из 6 эллиптических поверхностей Шиоды  $S(G)$ , перечисленных в следующей таблице.*

тип	G	уравнение ( $t$ — координата на $C$ )	$j$ -инвариант
$E_{(9111)}$	$\Gamma_0(9) \cap \Gamma_1(3)$	$X^2Y + Y^2Z + Z^2X + tXYZ = 0$	$j_3 = \frac{t^3(t^3-24)^3}{t^3-27}$
$E_{(8211)}$	$\Gamma_0(8) \cap \Gamma_1(4)$	$(X + Y)(XY - Z^2) + tXYZ = 0$	$j_4 = \frac{(t^4-16t^2+16)^3}{t^2(t^2-16)}$
$E_{(6321)}$	$\Gamma_1(6)$	$(X + Y)(Y + Z)(Z + X) + tXYZ = 0$	$j_6 = \frac{t^3(t^3-24t-48)^3}{(t-6)(t+3)^2(t+2)^3}$
$E_{(5511)}$	$\Gamma_1(5)$	$X(X-Z)(Y-Z) + tYZ(X-Y) = 0$	$j_7 = \frac{(t^4-40t^2-120t-80)^3}{(t+3)^5(t^2-5t-25)}$
$E_{(4422)}$	$\Gamma_1(4) \cap \Gamma_2(2)$	$X(X^2 + Z^2 + 2ZY) + tZ(X^2 - Y^2) = 0$	$j_8 = \frac{(t^4-16t^2+256)^3}{t^4(t-4)^2(t+4)^2}$
$E_{(3333)}$	$\Gamma_2(3)$	$(X^3 + Y^3 + Z^3) + tXYZ = 0$	$j_9 = \frac{t^3(t+6)^3(t^2-6t+36)^3}{(t-3)^3(t^2+3t+9)^3}$

Во всех этих случаях кривая  $C = X(G)$  имеет род 0. Тип — это упорядоченный набор индексов ветвления  $j$  над  $\infty$ , то есть поверхность  $E_{(efgh)}$  имеет 4 особых слоя-колеса  $I_e, I_f, I_g$  и  $I_h$ . Во всех бовилевских случаях получается, что группа Морделла–Вейля состоит из кручения, и оно имеет порядок  $\sqrt{(efgh)}$ .

*Замечание 1.5.* Пусть  $(efgh)$  — одна из шести четвёрок чисел соответствующая бовилевской поверхности. Выберем одно из этих чисел и обозначим его  $d$ , а остальные три  $(abc)$ . В работе [25] описаны все трёхблочные полные исключительные наборы в производной категории когерентных пучков на поверхности дель Пеццо степени  $d$  — ранги исключительных пучков в каждом блоке постоянны (обозначим их  $x, y, z$ , а количества исключительных пучков в блоках обозначим  $a, b, c$ ), тогда эти числа удовлетворяют уравнению  $ax^2 + by^2 + cz^2 = \sqrt{(abcd)}xyz$ . Соответствующие наборы  $d; abc$  в точности совпадают с наборами  $(d; abc)$  которые можно получить из поверхностей Бовиля (см. также 5).

В работе [28] Миранда и Перссон нашли все экстремальные рациональные якобиевы эллиптические поверхности. Из формулы Шиоды–Тейта, теоремы Бовиля, утверждения 1.2 и 1.3 получается, что у такой поверхности  $E$  не более четырёх особых слоев, причём если особых слоя ровно четыре, то поверхность  $E$  полустабильна, а если особых слоёв меньше трёх, то поверхность  $E$  изотривиальна. Если же у экстремальной поверхности  $E$  три особых слоя, то ровно один из них не полустабильна.

**Предложение 1.6** ([28]). *Экстремальных эллиптических поверхностей с тремя особыми слоями всего шесть, типы особых слоёв и вейерштрассовы нормальные формы этих поверхностей перечислены в следующей таблице.*

Пусть  $(u : v)$  — однородные координаты на базе  $\mathbb{P}^1$ ,  $t = \frac{u}{v}$ ,  $A$  и  $B$  — однородные многочлены от  $(u : v)$  степеней 4 и 6, соответственно.

тип	$A$	$B$	$J$	$ \Phi(E) $
$II^*I_1I_1$	$-3u^4$	$2u^5v$	$\frac{u^2}{u^2-v^2}$	1
$III^*I_2I_1$	$-uv^3$	$v^5(u-v)$	$\frac{4u^3}{(u-3v)^2(4u-3v)}$	2
$IV^*I_3I_1$	$v^3(24u-27v)$	$v^4(16u^2-72uv+54v^2)$	$\frac{v(24u-27v)^3}{6427u^3(u-v)}$	3
$I_1^*I_4I_1$	$-3(u^2-3v^2)(u-2v)^2$	$u(2u^2-9v^2)(u-2v)^3$	$\frac{4(u^2-3v^2)^3}{27v^4(u^2-4v^2)}$	4
$I_4^*I_1I_1$	$-3v^2(u^2-3v^2)$	$uv^3(2u^2-9v^2)$	$\frac{4(u^2-3v^2)^3}{27v^4(u^2-4v^2)}$	2
$I_2^*I_2I_2$	$-3uv(u-v)^2$	$(u-v)^3(u^3+v^3)$	$\frac{-4u^3v^3}{(u^3-v^3)^2}$	4

*Замечание 1.7.* Последние три поверхности изогенны.

## 2. КВАНТОВЫЕ КОГОМОЛОГИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ ДЕЛЬ ПЕЦЦО.

Пространство  $MM$  модулей стабильных отображений  $\mu$  рациональных кривых  $C$  с  $n$  отмеченными точками  $p_1, \dots, p_n$  снабжено  $n$  отображениями вычисления  $ev_i : \overline{M}_n(X, \beta) \rightarrow X$  и линейными тавтологическими расслоениями  $\mathcal{L}_i$ . Отображение  $ev_i$  переводит набор  $[\mu : C \rightarrow X; p_1, \dots, p_n \in C]$  в образ  $i$ -ой отмеченной точки:  $ev_i([\mu : C \rightarrow X; p_1, \dots, p_n]) = \mu(p_i) \in X$ . Слой  $\mathcal{L}_i$  над  $[\mu : C \rightarrow X; p_1, \dots, p_n \in C]$  — это  $T_{p_i}^*C$ . Класс Чженя  $\psi_i = c_1(\mathcal{L}_i) \in H^2(\overline{M}_n(X, \beta), \mathbb{Q})$  называется  $i$ -ым тавтологическим классом.

Набору когомологических классов  $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in H^\bullet(X, \mathbb{Z})$  и целых неотрицательных чисел  $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}_+$  удовлетворяющих условию

$$\sum_i (\text{codim}_{\mathbb{R}} \gamma_i + 2k_i) = 2d_M$$

соответствует  $n$ -точечный инвариант Громова–Виттена с потомками

$$I_\beta(\tau_{k_1}(\gamma_1)\tau_{k_2}(\gamma_2)\dots\tau_{k_n}(\gamma_n)) = \int_{[\overline{M}_n(X, \beta)]} \psi_1^{k_1} \cup ev_1^*(\gamma_1) \cup \dots \cup \psi_n^{k_n} \cup ev_n^*(\gamma_n).$$

Этот инвариант не зависит от комплексной структуры  $X$  — для гладких деформаций  $X_t$  и для  $X$  получается одно число (при отождествлении когомологий  $X$  и когомологий близких  $X_t$ ). Инварианты вида  $I_\beta(\tau_{k_1}(\gamma_1)\tau_{k_2}(\gamma_2)\dots\tau_{k_n}(\gamma_n))$ , где  $\sum_i (\text{codim} \gamma_i + 2k_i) \neq 2d_M$  формально положим равными 0.

Инварианты  $I_\beta(\gamma_1\gamma_2\dots\gamma_n) = I_\beta(\tau_0(\gamma_1)\tau_0(\gamma_2)\dots\tau_0(\gamma_n))$  называются *примарными*.

Если  $Z_i \subset X$  — алгебраические подмногообразия (корузмерности больше 1) в общем положении, и  $\gamma_i \in H^{2\text{codim}_X Z_i}(X, \mathbb{Z})$  — соответствующие им когомологические классы, то примарный инвариант  $I_\beta(\gamma_1\gamma_2\dots\gamma_n)$  равен (ожидаемому) числу рациональных неприводимых кривых класса  $\beta$  на многообразии  $X$ , пересекающих многообразия  $Z_i$ .

Есть два способа упаковать всю совокупность инвариантов Громова–Виттена многообразия  $X$  в один объект — коммутативное кольцо квантовых когомологий  $QH(X)$  и функция (степенной ряд)  $I^X$ .

**Определение 2.1** ([17]).  $\mathcal{I}$ -ряд для многообразия  $X$  и класса  $\beta \in H_2(X, \mathbb{Z})$  — это следующий производящий ряд для всех одноточечных инвариантов Громова–Виттена рода 0 с потомками:

$$\mathcal{I}_\beta^X = ev_{1*} \left( \frac{1}{1 - \psi_1} [\overline{M}_1(X, \beta)] \right) \in H^\bullet(X, \mathbb{Q})$$

Если  $\gamma_i$  — однородный базис  $H^\bullet(X, \mathbb{Q})$ , а  $\gamma_i^\vee$  — двойственный базис, то  $\mathcal{I}_\beta^X = \sum_{i \geq 0, j} I_\beta(\tau_i(\gamma_j)) \gamma_j^\vee$ ; из соображений размерности, для каждого  $j$  существует не более одного  $i$  для которого  $I_\beta(\tau_i(\gamma_j)) \neq 0$ .

*Ограниченный* (с  $X$ )  $\mathcal{I}$ -ряд для подмногообразия  $i : Y \subset X$  и класса  $\beta \in H_2(X, \mathbb{Z})$  это ряд

$$\mathcal{I}_\beta^{X \rightarrow Y} = \sum_{\beta_Y \in H_2(Y, \mathbb{Z}) | i_* \beta_Y = \beta} i_* ev_{1*} \left( \frac{1}{1 - \psi_1} [\overline{M}_1(Y, \beta_Y)] \right),$$

Производящий ряд для всех  $\mathcal{I}$ -рядов  $\mathcal{I}_\beta^X$  по всем классам  $\beta \in H_2(X, \mathbb{Z})$  мы будем называть просто  $\mathcal{I}$ -рядом многообразия  $X$ :

$$\mathcal{I}^X = \sum_{\beta \in H_2(X, \mathbb{Z})} \mathcal{I}_\beta^X t^\beta \in H^\bullet(X, A)$$

Аналогично,  $\mathcal{I}$ -ряд ограниченный (с  $X$ ) для подмногообразия  $Y$  это

$$\mathcal{I}^{X \rightarrow Y} = \sum_{\beta \in H_2(X, \mathbb{Z})} I_\beta^{X \rightarrow Y} t^\beta \in H^\bullet(X, A).$$

Нас будут интересовать ограничения этой функции на орбиты  $\phi_{H, t_0}(\mathbb{C}^*)$  одномерных подторов.

Если  $H$  — дивизор на  $X$ , а  $t_0 \in T$  — точка тора  $T$ ,  $\mathcal{I}$ -рядом относительно  $H$  с параметром  $t_0$  мы будем называть ограничение функции  $\mathcal{I}^X$  на одномерный подтор  $t_0 T_H$ :

$$\mathcal{I}_{H,t_0}^X(t) = \phi_{H,t_0}^* \mathcal{I}^X(t)$$

Аналогично

$$\mathcal{I}_{H,t_0}^{X \rightarrow Y}(t) = \phi_{H,t_0}^* \mathcal{I}^{X \rightarrow Y}(t) = \sum_{\beta} \mathcal{I}^{X \rightarrow Y} t_0^{\beta} t^{(\beta \cdot H)}$$

Если отображение  $i_* H_2(Y, \mathbb{Z}) \rightarrow H_2(X, \mathbb{Z})$  сюръективно (например, по теореме Лефшеца), то ограниченный относительный  $\mathcal{I}$ -ряд  $\mathcal{I}_{H,t_0}^{X \rightarrow Y} \in H^*(X, \mathbb{Q})[t, t^{-1}]$  равен прямому образу  $(i_*)$  от  $\mathcal{I}_{H|_Y, t_0|_Y}^Y \in H^*(Y, \mathbb{Q})[t, t^{-1}]$ .

Если параметр  $t_0$  не указан, он предполагается равным 1. Наконец, если  $X$  — многообразие Фано, то его  $\mathcal{I}$ -рядом мы будем называть  $\mathcal{I}_{-K_X, 1}^X$ -ряд относительно антиканонического класса.

Для каждого из определённых выше рядов, его ортогональную проекцию на  $H^0(X, A)$  мы будем называть фундаментальным членом соответствующего  $\mathcal{I}$ -ряда (и обозначать так же, заменяя букву  $\mathcal{I}$  на обычную  $I$ ). Например,

$$I^X = \int_{[X]} \mathcal{I}^X,$$

$$I^{X \rightarrow Y} = \int_{[X]} \mathcal{I}^{X \rightarrow Y}.$$

**Теорема 2.2** (Квантовая теорема Лефшеца. [17]). *Предположим, что  $Y$  — гиперплоское сечение  $X$ , Если  $-K_Y \cdot \beta \geq 2$  для всех  $\beta \in \overline{NE}(X)_{\mathbb{Z}}$ , то верна формула*

$$\mathcal{I}_{\beta}^{X \rightarrow Y} = \mathcal{I}_{\beta}^X \cdot \prod_{i=0}^{Y \cdot \beta} (Y + i).$$

Соответственно, для  $\mathcal{I}$ -ряда целиком относительно  $(Y, t_0)$  верна формула

$$(2.3) \quad \mathcal{I}_{Y,1}^{X \rightarrow Y} = \sum_{\beta} \mathcal{I}_{\beta}^X t^{(Y \cdot \beta)} \prod_{i=0}^{Y \cdot \beta} (Y + i)$$

В общем случае, если  $-K_Y$  численно эффективен, существуют явно вычислимые функции  $P_0, P_1 \in \mathbb{C}[[t]]$ , для которых верна формула

$$P_0 \sum_{\beta} \mathcal{I}_{\beta}^{X \rightarrow Y} \tilde{t}^{(Y \cdot \beta)} = \sum_{\beta} \mathcal{I}_{\beta}^X t^{(Y \cdot \beta)} \prod_{i=0}^{Y \cdot \beta} (Y + i),$$

где  $\tilde{t} = e^{\frac{P_1}{P_0} t} t$ . То есть, формула 2.3 верна с точностью до линейной замены переменной  $\log t \rightarrow \log t + \frac{P_1}{P_0}$  и константы  $P_0$ .

**Определение 2.4.** *Кольцом (малых) квантовых когомологий  $QH(X)$  называется свободный  $A$ -модуль  $QH(X) = H^*(X, A)$  со следующим образом заданным  $\star$ -умножением:*

$$\int_{[X]} (\gamma_1 \star \gamma_2) \cup \gamma_3 = \sum_{\beta \in \overline{NE}(X)_{\mathbb{Z}}} I_{\beta}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) t^{\beta},$$

Если кольцо  $R$  обладает структурой  $A$ -модуля, то определим кольцо малых квантовых когомологий с коэффициентами в  $R$  как  $QH(X, R) = QH(X) \otimes_A R$ .

Кольцом квантовых когомологий проективного (вложенного линейной системой  $|H|$  соответствующей очень обильному дивизору  $H$ ) многообразия  $X \subset \mathbb{P}(H^0(X, \mathcal{O}(H))^*)$  (с параметром  $t_0 \in T$ ) будем называть кольцо  $QH_{H,t_0}(X)$ , получающееся заменой базы  $\phi_{H,t_0}$ .

Специализация кольца  $QH(X)$  при  $t = 0$  (в единственной  $T$ -неподвижной точке пространства  $\text{Spec } A$ ) изоморфна кольцу когомологий многообразия  $X$ , поскольку  $\overline{M}_3(X, 0) = X$ ,  $I_0(\gamma, \gamma, \gamma) = \int_{[X]} \gamma \cup \gamma \cup \gamma$ .

**Определение 2.5** ([21]). (Приведённым) спектром многообразия (относительно дивизора  $H$  и параметра  $t_0$ ) мы будем называть схему (подмножество в  $\mathbb{C}^*$ ) нулей характеристического многочлена оператора  $\star H : QH_{H,t_0}(X) \rightarrow QH_{H,t_0}(X)$ . Спектром многообразия Фано мы называем его приведённый спектр относительно антиканонического класса дивизора с параметром 1.

*Замечание 2.6.* Если рассмотреть аналогичный оператор в обычных когомологиях, то получится 0, т.к.  $H^{>0}(X, \mathbb{Q})$  — максимальный нильпотентный идеал.

**Определение 2.7** ([31]). Многообразию  $X$  называется квантово минимальным относительно обильного дивизора  $H$  и параметра  $t_0$ , если подкольцо в  $QH_{H,t_0}(X)$  порождённое элементом  $H$  это  $\mathbb{C}[t, t^{-1}]$ -модуль ранга  $(\dim(X) + 1)$ . Многообразие Фано  $X$  называется *квантово минимальным* если оно квантово минимально относительно антиканонического класса  $-K_X$  с параметром 1.

Гипотеза зеркальной симметрии вариаций структур Ходжа утверждает, в частности, что регуляризованный фундаментальный член  $I$ -ряда является периодом зеркально двойственной модели Ландау–Гинзбурга.

**Теорема 2.8** ([19]). Пусть  $X$  — неособое торическое многообразие почти Фано,  $D_1, \dots, D_k$  — все неприводимые инвариантные дивизоры,  $Y_1, \dots, Y_l$  — численно эффективные дивизоры на  $X$ ,  $Y = \cap Y_i$  — гладкое полное пересечение в  $X$  с численно эффективным антиканоническим классом  $-K_Y$  (например,  $Y$  — многообразие почти Фано или Калаби–Яу). Пусть индекс  $Y$  не равен 1 или  $K_Y = 0$ .

Тогда фундаментальный член  $I$ -ряда

$$I^{X \rightarrow Y} = \sum_{\beta} t^{\beta} \frac{\prod(Y_i \cdot \beta)!}{\prod(D_j \cdot \beta)!},$$

где суммирование ведётся только по тем классам эффективных 1-циклов  $\beta$  для которых указанные под факториалами целые числа неотрицательны.

Если  $Y$  произвольное, то  $I^Y$  отличается от  $\sum_{\beta} t^{\beta} \frac{\prod(Y_i \cdot \beta)!}{\prod(D_j \cdot \beta)!}$  заменой координат аналогичной 2.2. В частности,  $I_{-K_X, t_0}^{X \rightarrow Y} = e^{\alpha t} \sum_{\beta} t^{(-K_Y \cdot \beta)t_0} \frac{\prod(Y_i \cdot \beta)!}{\prod(D_j \cdot \beta)!}$ , где  $\alpha$  — число.

**Предложение 2.9.** В предположениях теоремы 2.8, обозначим символом  $\rho_j$  образующую луча соответствующего дивизору  $D_j$ . Рассмотрим многочлен Лорана

$$f_u = \alpha + \sum_{j=1}^k u_j x^{\rho_j}$$

Пусть  $t_0$  — образ точки  $(u_{\rho})_{\rho \in \Sigma(1)} \in \prod_{\rho \in \Sigma(1)} \mathbb{C}^*$ , так что  $t_0^{\beta} = \prod u_j^{(D_j \cdot \beta)}$ .

Тогда выполняются равенства

$$I_{-K_X, t_0}^X = \Phi_{f_u}^{nr}(t),$$

$$I_{-K_X, t_0}^{X, reg} = \Phi_{f_u}(t).$$

Другими словами, многочлен Лорана  $f_u$  является слабой моделью Ландау–Гинзбурга для многообразия  $X$  с параметром  $t_0$  с точностью до перенормировки.

*Доказательство.* Во-первых,  $\Phi_{f+\alpha}^{nr}(t) = e^{\alpha t} \Phi_f^{nr}(t)$ , поэтому утверждение сводится к случаю  $\alpha = 0$ . Элементы  $\beta$  соответствуют линейным соотношениям  $\sum \beta_j \rho_j = 0$  между векторами  $\rho_j$ . Вклад не численно эффективных 1-циклов в фундаментальный член  $I$ -ряда равен 0. Для численно эффективного цикла коэффициент  $\frac{((\sum D_j) \cdot \beta)!}{\prod (D_j \cdot \beta)!} = \frac{(\sum \beta_j)!}{\prod \beta_j!}$  при  $t^\beta$  в  $I^X$  равен вкладу в коэффициент при 1 от произведений мономов вида  $\prod (x^{\rho_j})^{\beta_j}$  (в произведении  $(\sum u_j x^{\rho_j}) \cdot \dots \cdot (\sum u_j x^{\rho_j})$  выбрать в каждом множителе по одному моному  $x^\rho$ , чтобы всего для каждого  $j$  было выбрано  $\beta_j$  мономов  $x^{\rho_j}$  можно именно  $\frac{(\sum \beta_j)!}{\prod \beta_j!}$  способами). А коэффициент  $\prod u_j^{\beta_j}$  в точности равен  $t_0^\beta$  по определению  $t_0$ .

□

**Теорема 2.10** ([2]). *Фундаментальный член  $I$ -ряда для  $G = G(2, n)$  (относительно обильной образующей группы Пикара  $\mathcal{O}(H) = \mathcal{O}(1)$ ) равен*

$$I_H^G = \sum_{d \geq 0} \frac{t^d}{(d!)^2} \sum_{d \geq j_{n-3} \geq \dots \geq j_1 \geq j_0 = 0} \frac{1}{(d - j_{n-3})! \prod_{i=2}^{n-2} ((d - j_{i-1})! (j_{i-1} - j_{i-2})! j_{i-1}!)},$$

Это следствие гипотезы Хори–Вафы ([23]), описывающей полный  $I$ -ряд грассманиана  $G(r, n)$ , и (в случае  $r = 2$ ) комбинаторного тождества между итерированной биномиальной суммой и однократной (формулы Бейли). Два доказательства гипотезы Хори–Вафы изложены в [2], и там же доказываются справедливость предыдущей формулы для фундаментального члена  $I$ -ряда. Теорема 2.8 даёт явные формулы для (фундаментальных членов)  $I$ -рядов торических поверхностей  $\mathbb{P}^2 = T_{3,1}$ ,  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 = T_{4,1}$ ,  $\mathbb{F}_1 = T_{4,2}$ , а также  $S_7 = T_{5,1}$  и  $S_6 = T_{6,4}$ . и поверхностей являющихся полными пересечениями в проективных пространствах —  $S_4$  (пересечение двух квадрик в  $\mathbb{P}^4$ ) и  $S_3$  (кубика в  $\mathbb{P}^3$ ), то есть всех поверхностей дель Пеццо степеней  $d = 9, 8, 7, 6, 4, 3$ . Поверхность дель Пеццо степени 2 это гиперповерхность степени 4 в  $\mathbb{P}(1, 1, 1, 2)$ , а поверхность дель Пеццо степени 1 это гиперповерхность степени 6 в  $\mathbb{P}(1, 1, 2, 3)$ ; их  $I$ -ряды можно вычислить с помощью теоремы 2.8 на разрешениях объемлющих торических пространств (гладкие гиперповерхности не проходят через особенности, см. также [32]).

Поверхности дель Пеццо  $S_5$  степени 5 получают как сечения грассманиана  $G(2, 5)$  подпространствами коразмерности 4 (в плюккером вложении).

Таким образом, фундаментальный член  $I$ -ряда для  $S_5$  относительно  $H$  с точностью до перенормировки получается применением квантовой формулы Лефшеца (2.2) к фундаментальному члену  $I$ -ряда  $G(2, 5)$  (2.10):

$$I_H^{S_5, reg}(t) = e^{\alpha t} \sum_{d \geq 0} t^d (d!)^5 I_H^{G(2,5)}[d],$$

где  $I_H^{G(2,5)}[d]$  — коэффициент  $I_H^{G(2,5)}$  при мономе  $t^d$ .



Выпишем явные формулы для фундаментальных членов  $I$ -рядов поверхностей дель Пеццо (с точностью до перенормировки).

$$(2.11) \quad I_{-K}^{\mathbb{P}^2, reg} = \sum \frac{(3n)!}{n!^3} t^{3n}$$

$$(2.12) \quad I_{-K}^{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, reg} = \sum \frac{(2n)!^2}{n!^4} t^{2n}$$

$$(2.13) \quad I_{-K, t_0(u, v)}^{\mathbb{F}^1, reg} = \Phi_{x+y+\frac{v}{u}xy+ux^{-1}y^{-1}}(t) = \sum_{n, m \geq 0} \frac{(3n+2m)!}{(n+m)!m!n!^2} u^n v^m t^{3n+2m}$$

$$(2.14) \quad I_{-K, t_0(u_1, u_2, v)}^{S_7, reg} = \Phi_{x^{-1}+y^{-1}+u_1x+u_2y+vy}(t) = \sum_{a, b, c \geq 0} \frac{(3c+2a+2b)!}{a!b!c!(a+c)!(b+c)!} u_1^a u_2^b v^c t^{3c+2a+2b}$$

$$(2.15) \quad I_{-K}^{S_6, reg} = \sum_{a, b, c \geq 0} \frac{(a+b+c)!^2}{(a!b!c!)^2} t^{a+b+c} = \sum_n t^n \sum_{k=0}^n \frac{n!^2 2k!}{(n-k)!^2 k!^4}$$

$$(2.16) \quad I_{-K}^{S_4, reg} = \sum \frac{(2n)!^2}{n!^4} t^n$$

$$(2.17) \quad I_{-K}^{S_3, reg} = \sum \frac{(3n)!}{n!^3} t^n$$

$$(2.18) \quad I_{-K}^{S_2, reg} = \sum \frac{(4n)!}{(2n)!n!^2} t^n$$

$$(2.19) \quad I_{-K}^{S_1, reg} = \sum \frac{(6n)!}{(3n)!(2n)!n!} t^n$$

$$(2.20) \quad I_{-K}^{S_5, reg} = \sum_{a, b, c \geq 0} \frac{(a+b+c)!^3}{a!^2 b! c!^2 (a+b)!(b+c)!} t^{a+b+c} =$$

$$= \sum_{n \geq 0} t^n \sum_{k=0}^n \frac{n!(n+k)!}{k!^3 (n-k)!^2} =$$

$$= 1 + 3t + 19t^2 + 147t^3 + 1251t^4 + 11253t^5 + \dots$$

*Замечание 2.21.* Эти ответы согласуются с полученными другими методами: с явными вычислениями Краудера–Миранды в терминах линейных систем ([7]), с вычислениями Гётше–Пандхарипанде (см. [22], вкратце — они показали, что трёхточечные инварианты Громова–Виттена на раздутии поверхности дель Пеццо  $S$  восстанавливаются из инвариантов Громова–Виттена  $S$  с помощью уравнений ассоциативности, и явно восстановили), с предсказаниями Концевича–Манина об их свойствах ([27]).

### 3. СЛАБЫЕ МОДЕЛИ ЛАНДАУ–ГИНЗБУРГА

Рассмотрим регулярную функцию  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{A}^1$  на торе. Эта функция может быть представлена многочленом Лорана:

$$f = f(x_1, x_1^{-1}, \dots, x_d, x_d^{-1}) = \sum_{m \in M} a_m x^m.$$

**Определение 3.1.** Обозначим через  $\phi_f(i)$  свободный член (то есть коэффициент при  $1$ ) многочлена  $f^i$ . Положим

$$\begin{aligned}\omega &= \prod_{k=1}^n \frac{dx_k}{(2\pi i)x_k} \\ \Phi_f &= \sum_{i \geq 0} \phi_f(i) \cdot t^i = \int_{S^1 \times \dots \times S^1} \frac{1}{1 - tf(x)} \cdot \omega \\ \Phi_f^{nr} &= \sum_{i \geq 0} \phi_f(i) \cdot \frac{t^i}{i!} = \int_{S^1 \times \dots \times S^1} e^{tf(x)} \cdot \omega\end{aligned}$$

Ряд  $\Phi_f$  называется (регуляризованным) *рядом свободных членов* многочлена  $f$ , а ряд  $\Phi_f^{nr}$  — нерегуляризованным рядом свободных членов.

$\Phi_f$  является периодом, то есть интегралом от некоторой послойной относительно  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{A}^1$  формы объёма; в явном виде эта форма равна вычету  $Res_{f=t^{-1}}(\frac{1}{1-tf(x)}\omega)$ .

**Теорема 3.2** ([34], см. также [18]). *Ряд свободных членов  $\Phi_f$  является решением уравнения Пикара–Фукса для заданного отображением  $f^{-1} : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{A}^1$  пучка гиперповерхностей в торе  $\mathbb{T}$ .*

**Определение 3.3** ([30]). Пусть  $X$  — гладкое многообразие Фано,  $t_0 \in T$  — точка тора  $T$ ,  $H$  — очень обильный дивизор, а  $I_H^X(t)$  — фундаментальный член  $I$ -ряда  $X$  относительно  $H$ . Многочлен Лорана  $f$  называется *очень слабой моделью Ландау–Гинзбурга* для  $(X, H, t_0)$ , если выполнено одно из двух эквивалентных условий

$$\begin{aligned}\Phi_f^{nr}(t) &= I_{H, t_0}^X(t) \\ \Phi_f(t) &= I_{H, t_0}^{X, reg}(t)\end{aligned}$$

Очень слабая модель Ландау–Гинзбурга для многообразия Фано  $X$  с параметром  $t_0$  — это очень слабая модель Ландау–Гинзбурга для тройки  $(X, -K_X, t_0)$ . Если параметр  $t_0$  не указан, он равен  $1$ .

Многочлен Лорана  $f \in \mathbb{C}[\mathbb{T}]$  называется *слабой моделью Ландау–Гинзбурга* для многообразия Фано  $X$ , если он является очень слабой моделью Ландау–Гинзбурга для  $X$  и почти все слои отображения  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{A}^1$  бирационально эквивалентны  $(\dim X - 1)$ -мерным многообразиям Калаби–Яу.

Многочлен Лорана  $f$  считается слабой моделью Ландау–Гинзбурга для  $X$  с точностью до перенормировки, если для некоторых констант  $\alpha, \beta$  многочлен  $\beta f + \alpha$  является слабой моделью Ландау–Гинзбурга для  $X$ .

Опишем достаточное условие (и в общем случае необходимое) того, что слои являются многообразиями Калаби–Яу.

**Определение 3.4.** *Носитель* многочлена Лорана  $f$  это множество всех индексов  $m$ , для которых коэффициенты при соответствующих им мономах не равны нулю:

$$\text{Supp}(f) = \{m : a_m \neq 0\}$$

Выпуклая оболочка носителя  $f$  называется *многогранником Ньютона* многочлена Лорана  $f$  и обозначается  $\Delta(f)$

$$\Delta(f) = \text{Conv}(m : a_m \neq 0)$$

Таким образом, многогранник Ньютона многочлена Лорана — это выпуклый целый многогранник. Символом  $L(\Delta)$  обозначим векторное пространство многочленов Лорана, носитель которых содержится в  $\Delta$ .

Пусть  $f \in L(\Delta)$ . Обозначим через  $Z(f, \Delta)$  гиперповерхность нулей  $f \in H^0(\mathbb{P}(\Delta), \mathcal{O}(1))$  в торическом пространстве  $\mathbb{P}(\Delta)$  соответствующей многограннику  $\Delta$ . Если  $\Delta$  — рефлексивный многогранник, то  $\mathbb{P}(\Delta)$  — торическое многообразие Фано и  $-K_{\mathbb{P}(\Delta)} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\Delta)}(1)$ , соответственно  $Z(f, \Delta)$  — антиканоническое сечение многообразия Фано  $\mathbb{P}(\Delta)$ .

**Определение 3.5.** Многочлен  $f \in L(\Delta)$  называется *невыврожденным* относительно  $(\Delta, \delta)$ , если  $Z(f, \Delta)$  трансверсально пересекается с  $\mathbb{P}^o(\delta)$  в пространстве  $\mathbb{P}(\Delta)$ . Многочлен  $f$  называется *невыврожденным* относительно  $\Delta$ , если он невырожден относительно всех орбит  $\delta \in \Delta$ .

Из определения легко выводятся следующие свойства:

- Предложение 3.6.** (1) Многочлен  $f = \sum a_m x^m \in L(\Delta)$  невырожден относительно 0-мерного страта  $l$  тогда и только тогда, когда коэффициент  $a_l$  отличен от нуля. Поэтому многочлен Лорана  $f$  невырожден относительно всех 0-мерных стратов  $\mathbb{P}(\Delta)$  тогда и только тогда, когда  $\Delta = \Delta(f)$ .
- (2) Пусть  $\delta$  — одномерный страт  $\mathbb{P}(\Delta)$  соответствующий ребру  $[m, m']$  многогранника  $\Delta$ . Предположим, что отрезок  $[m, m']$  не содержит целых точек отличных от вершин  $m$  и  $m'$ . Тогда, если многочлен  $f$  невырожден относительно  $m$  и  $m'$ , то  $f$  невырожден относительно  $\delta$ .
- (3) Пусть  $f' \in L(\Delta)$  — многочлен Лорана, носитель которого содержится в открытой внутренней части многогранника Ньютона  $\Delta(f)$ . Тогда многочлен  $f$  невырожден относительно  $\Delta$  тогда же, когда и многочлен  $f + f'$ .

Будем говорить что многочлен Лорана  $f$  невырожден, если  $f$  невырожден относительно  $\Delta(f)$ . Обозначим  $\mathbb{P}(f) = \mathbb{P}(\Delta(f))$ ,  $Z(f) = Z(f, \Delta(f))$ .

Для грани  $\Gamma$  многогранника  $\Delta$ , обозначим символом  $l(\Gamma)$  количество целых точек на этой грани, а символом  $l^*(\Gamma)$  — количество целых точек внутри грани.

На когомологиях  $H^*(Z(f, \Delta), \mathbb{C})$  есть смешанная структура Ходжа; размерности некоторых факторов её фильтраций можно вычислить с помощью следующей теоремы.

**Теорема 3.7** ([9], 5.6-5.11). Если многочлен Лорана  $f$  невырожден, то при  $p > 0$

$$h^{p,0}(H^{d-1}(Z(f))) = \sum_{\dim \Gamma = p+1} l^*(\Gamma),$$

суммирование производится по всем  $(p+1)$ -мерным граням  $\Gamma$  многогранника  $\Delta(f)$ .

#### 4. МОДЕЛИ ЛАНДАУ–ГИНЗБУРГА ДЛЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ДЕЛЬ ПЕЦЦО.

Напомним, что существует 16 рефлексивных многоугольников  $\Delta_0$ . Они соответствуют 16 торическим поверхностям дель Пеццо  $S_0$  с дювалевскими особенностями:

**Предложение 4.1.** Все торические поверхности дель Пеццо с дювалевскими особенностями перечислены в следующей таблице. Всего их 16.

обозначение	$\Delta$	описание
$T_{3.1}$	$\Delta(x + y + x^{-1}y^{-1})$	$\mathbb{P}^2$ , минимальная

$T_{4.1}$	$\Delta(x + y + x^{-1} + y^{-1})$	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ , минимальная
$T_{4.3}$	$\Delta(x(y + y^{-1}) + x^{-1})$	квадратичный конус
$T_{4.2}$	$\Delta(x + y + xy + x^{-1}y^{-1})$	$\mathbb{F}_1$
$T_{5.1}$	$\Delta(x + y + x^{-1} + y^{-1} + x^{-1}y^{-1})$	гладкая поверхность степени 7
$T_{5.2}$	$\Delta(x^{-1}(y^{-1} + y) + y^{-1} + x)$	
$T_{6.1}$	$\Delta(x + x^{-1}(y + y^{-2}))$	
$T_{6.2}$	$\Delta(xy + xy^{-1} + yx^{-1} + x^{-1})$	
$T_{6.3}$	$\Delta((1 + y)(x + x^{-1}) + y^{-1})$	
$T_{6.4}$	$\Delta((1 + x)(1 + y)(1 + x^{-1}y^{-1}))$	гладкая поверхность степени 6
$T_{7.1}$	$\Delta(x^{-1}y + x(y + y^{-2}) + y^{-1})$	
$T_{7.2}$	$\Delta(xy + xy^{-1} + yx^{-1} + x^{-1} + y^{-1})$	
$T_{8.1}$	$\Delta(y(x^{-2} + x^2) + y^{-1})$	максимальная
$T_{8.2}$	$\Delta((x^{-2} + 1)y + (y^{-2} + 1)x)$	
$T_{8.3}$	$\Delta((x + x^{-1})(y + y^{-1}))$	максимальная
$T_{9.1}$	$\Delta(x^2y^{-1} + x^{-1}y^2 + x^{-1}y^{-1})$	максимальная

*Замечание 4.2.* В обозначении  $T_{k,n}$  число  $k$  равно  $\rho(T_{k,n}) + 2 = 12 - \deg(T_{k,n})$  (количество целых точек на границе многоугольника), а  $n$  — просто номер среди поверхностей с данным числом  $k$ .

Если раздуть на  $\mathbb{P}^2$  какие-то  $(9-d)$  точек в необщем положении (возможно бесконечно близкие), то получится неособая поверхность  $S$ . Если  $d > 2$  и в линейной системе кубик, проходящих через раздуваемые точки, нет неподвижных компонент, то антиканоническая линейная система  $|-K_S|$  будет задавать отображение  $S$  на поверхность дель Пеццо  $S_0$  с дювалевскими особенностями (раздутие соответствующего пучка идеалов  $\mathcal{I}$  на  $\mathbb{P}^2$  с  $h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}/\mathcal{I}) = (9-d)$ ).

**Предложение 4.3** ([13], см. также [10]). *Все поверхности дель Пеццо степени  $d > 2$  с дювалевскими особенностями получаются описанным выше способом.*

Рассмотрев относительный антиканонический образ раздутия  $\mathbb{P}^2$  в универсальном пучке идеалов над схемой Гильберта  $\text{Hilb}_{(9-d)}(\mathbb{P}^2)$  пучков идеалов  $\mathcal{I}$  коразмерности  $(9-d)$  (то есть пучков идеалов  $\mathcal{I}$ , для которых  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}/\mathcal{I}$  — пучок с нульмерным носителем и  $h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}/\mathcal{I}) = 9-d$ ) получим

**Следствие 4.4.** *Поверхности дель Пеццо степени  $d \geq 3$  с дювалевскими особенностями являются вырождениями гладких поверхностей дель Пеццо степени  $d$ .*

**Предложение 4.5.** *Пусть  $S$  — гладкая поверхность дель Пеццо степени  $d \geq 3$ , а  $S_0$  — торическая поверхность дель Пеццо степени  $d$  с дювалевскими особенностями. Тогда  $S_0$  является вырождением  $S$ .*

Это утверждение является следствием более общего классического результата дю Валя 4.4.

Рассмотрим многочлен Лорана  $f = \sum u_m x^m$ , многоугольник Ньютона которого совпадает с многоугольником поверхности  $S_0$ . Он задаёт пучок аффинных кривых  $Z_s = \{x \in \mathbb{T} : f(x) = s\}$  геометрического рода 1 на торе  $\mathbb{T} \simeq (\mathbb{C}^*)^2$ . Рассмотрим его как эллиптическую поверхность над  $\mathbb{A}^1$ .

*Замечание 4.6.* На пространстве всех многочленов Лорана действуют две группы — тор  $\mathbb{T}$  заменами координат на себе:

$$t : \sum u_m x^m \mapsto \sum (u_m \cdot t^m) x^m,$$

и группа  $Aff^1$  аффинных преобразований образа  $f \rightarrow a \cdot f + b$ . Ряды свободных членов  $\Phi_f, \Phi_f^{nr}$  инвариантны относительно действия тора  $\mathbb{T}$ , и эквивариантны относительно действия  $Aff^1$  (например, на  $\Phi_f^{nr}$ , действие продолжается так:  $\Phi_f^{nr}(t) \rightarrow e^{tb} \Phi_f^{nr}(at)$ ).

Пространство многочленов Лорана с носителем содержащимся в  $\Delta \setminus 0$  можно отождествить с пространством  $\mathbb{T}$ -инвариантных дивизоров на  $S_0$  с коэффициентами в  $\mathbb{C}$ . Это отождествление называется *дивизориально-мономиальным соответствием*. Дивизору  $\sum a_m D_m$  соответствует многочлен  $\sum a_m x^m$ . В случае особого  $S_0$  воспользуемся дивизориально-мономиальным соответствием для крепантного разрешения  $S'_0$ . Действия алгебры Ли тора  $T$  на многочленах Лорана соответствует сдвигам на главные дивизоры. Многочленам Лорана с носителем совпадающим с  $\Delta \setminus 0$  соответствуют  $T$ -инвариантные дивизоры все компоненты которых отличны от 0; такие дивизоры можно рассматривать как элементы  $Div(S_0) \otimes \mathbb{C}^*$ , и записывать в виде  $\exp(2\pi i \sum a_m D_m)$  (дивизор  $\sum a_m D_m$  определён однозначно с точностью до целого). Действия самого тора  $T$  на таких многочленах Лорана соответствует сдвигам логарифма  $\sum a_m D_m$  на главные дивизоры.

**Пример 4.7** (Проективная плоскость). Рассмотрим общий многочлен Лорана

$$f_{3,1}^{gen} = a_x x + a_y y + a_z x^{-1} y^{-1}$$

Он соответствует главному дивизору тогда и только тогда, когда  $a_x \cdot a_y \cdot a_z = 1$ . С точностью до главного дивизора многочлен  $f_{3,1}^{gen}$  эквивалентен многочлену  $f_{3,1} = x + y + a \cdot x^{-1} y^{-1}$ .

**Лемма 4.8.** *Поверхность дель Пеццо  $S_d$  степени  $d \geq 3$  (а также поверхности  $S_1$  и  $S_2$ ) квантово минимальна всегда, за исключением двух случаев  $S = \mathbb{F}_1$  и  $d = 7$ .*

*Доказательство.* Это утверждение можно проверить явно (например, с помощью формул [7] или [22]). Концептуальная причина квантовой минимальности поверхностей дель Пеццо в том, что они допускают действие группы  $G$ , инвариантные когомологии относительно которого 3-мерны (см. [11]), а поскольку квантовое умножение сохраняет инвариантные когомологии квантовый куб канонического класса выражается через меньшие степени (см. [16]).  $\square$

Как будет видно далее, поверхности  $\mathbb{F}_1$  и  $S_7$  оказываются квантово минимальными относительно некоторого нетривиального параметра  $t_0$ .

Обозначим модель Нерона эллиптической поверхности заданной многочленом  $f$  через  $E_f$ .

Бирациональные преобразования эллиптических поверхностей являются изоморфизмами над открытым множеством на базе, поэтому, естественно, на уравнение Пикара–Фукса и периоды не влияют.

С эллиптическими поверхностями связано два типа накрытий — изогении и замены базы. Оба случая изоморфно отображают гомотопии слоёв над  $\mathbb{Q}$ . Уравнение Пикара–Фукса у эллиптической поверхности и изогенной ей совпадают: по формуле проекции, период на накрытии (интеграл обратного образа дифференциальной формы  $\omega$  по собственному прообразу 1-цикла  $\gamma$ ) равен периоду на базе накрытия ( $\int_\gamma \omega$ ) умноженному на степень накрытия.

При замене базы  $\pi : C' \rightarrow C$  уравнение Пикара–Фукса семейства  $\pi^*(E) \rightarrow C'$  получается обратным образом уравнения Пикара–Фукса для семейства  $E \rightarrow C$ , а период  $\Phi' : c' \rightarrow$

$$\int_{\gamma \in H_1(\pi^*(E)_{c'}, \mathbb{Z})} \omega_E \text{ совпадает с } c' \rightarrow \frac{\omega_E}{\pi^* \omega_E} \int_{\gamma \in H_1(E_{\pi(c)}, \mathbb{Z})} \omega_E.$$

В следующей теореме описаны слабые модели Ландау–Гинзбурга  $f$  для поверхностей дель Пеццо степени  $d \geq 3$  относительно антиканонического класса (с симплектической формой в некоторых кратностях антиканонического класса) со значением параметра  $t_0$  (параметр  $t_0$  равен 1 для поверхностей, отличных от  $\mathbb{F}_1$  и  $S_7$ ). Для этого мы представляем такую поверхность дель Пеццо  $S$  как сглаживание (см. 4.4) торической поверхности  $S_0$  с дювалевскими особенностями (они перечислены в 4.1), и среди всех многочленов Лорана, многоугольник Ньютона которых совпадает с многоугольником поверхности  $S_0$ , находим многочлен Лорана  $f$  с тремя критическими значениями (они и  $\infty$  будут особыми слоями эллиптической поверхности  $E_f$ ). Разным вырождениям  $S$  соответствуют разные многогранники Ньютона, но эллиптические поверхности  $E_f$  оказываются бирационально эквивалентными над  $\mathbb{P}^1$  с точностью до изогении. В случае квантово минимальных поверхностей Дель Пеццо, теорема 4.9 является двумерным аналогом *соответствия Голышева* ([20]) между трёхмерными многообразиями Фано основной серии (они автоматически квантово минимальны) и модулярными семействами Куги–Сато поверхностей  $K3$ .

**Теорема 4.9.** 1) Пусть поверхность дель Пеццо  $S$  степени  $d$  является сглаживанием торической поверхности  $S_0$  с дювалевскими особенностями, т.ч.  $S_0 \simeq T_{12-d,n}$ , где поверхности  $T_{12-d,n}$  описаны в предложении 4.1, причем  $d \neq 5, 12 - d.n \neq 4.2$ <sup>1</sup>. Многочлены Лорана  $f$ , перечисленные в следующей таблице, являются слабыми моделями Ландау–Гинзбурга для  $S$  относительно кратного антиканонического дивизора  $-kK_S$ .

2) Каждая из найденных слабых моделей Ландау–Гинзбурга (кроме случаев  $d = 3, k = 1$  и  $d = 4, k = 1$ ) компактифицируется до поверхности изогенной одной из шести эллиптических поверхностей Бовиля, перечисленных в теореме 1.4. В таблице выписаны значения  $j$ -инварианта поверхности  $E_f$  однозначно определяющие тип такой компактификации.

12 - $d$ .номер	$k$	многочлен $f$	$j$ -инвариант
3.1	1	$x + y + x^{-1}y^{-1}$	$j_3$
4.1	1	$x + y + x^{-1} + y^{-1}$	$j_4$
4.3	1	$xy + 2x + xy^{-1} + x^{-1}$	$j_4$
6.1	1	$3 + xy + 2y + x^{-1}y + 3x^{-1} + 3x^{-1}y^{-1} + x^{-1}y^{-2}$	$j_6$
6.2	1	$3 + xy + 2x + 2y + xy^{-1} + yx^{-1} + x^{-1}$	$j_6$
6.3	1	$3 + xy + 2y + yx^{-1} + x + x^{-1} + y^{-1}$	$j_6$
6.4	1	$3 + x + y + x^{-1} + y^{-1} + xy + x^{-1}y^{-1}$	$j_6$
7.1	1	$3 + xy + 2y + x^{-1}y + 3x^{-1} + 3x^{-1}y^{-1} + y^{-1} + x^{-1}y^{-2}$	$j_7$
7.2	1	$3 + xy + 2x + 2y + xy^{-1} + yx^{-1} + x^{-1} + y^{-1}$	$j_7$
8.1	2	$y(x^{-2} + 2 + x^2) + y^{-1}$	$j_8$
8.1b	1	$y(x^{-2} + 4x^{-1} + 6 + 4x + x^2) + 2(x^{-1} + 3 + x) + y^{-1}$	$j_{8b}$
8.2	2	$x^2y^{-1} + 3x - 2xy^{-1} + 3y + y^{-1} + y^2x^{-1} + 2yx^{-1} + x^{-1}$	$j_8$
8.3	2	$(x + x^{-1})(y + y^{-1})$	$j_8$
8.3b	1	$(x + 2 + x^{-1})(y + 2 + y^{-1})$	$j_{8b}$
9.1	3	$x^2y^{-1} + x^{-1}y^2 + x^{-1}y^{-1}$	$j_9$

<sup>1</sup>То есть, поверхность  $S$  — любая поверхность дель Пеццо степени  $d \geq 3$  отличная от поверхностей  $\mathbb{F}_1$  и  $S_7$ . В этом случае поверхность  $S$  квантово минимальна.

9.1b	1	$6 + 3(x + y + xy + x^{-1} + y^{-1} + x^{-1}y^{-1}) + x^2y^{-1} + x^{-1}y^2 + x^{-1}y^{-1}$	$j_{9b}$
------	---	---	----------

$$j_{8b} = \frac{t^2 - 16t + 16}{t(t-16)} \quad j_{9b} = \frac{t(t-24)^3}{t-27}$$

Поверхность  $E_{8.1b}$  и поверхность  $E_{8.3b}$  бирационально эквивалентны  $E_{I_1^*I_4I_1}$ , поверхность  $E_{9.1b}$  бирационально эквивалентна  $E_{IV^*I_3I_1}$ .

3) Пусть поверхность дель Пецо  $S$  совпадает с  $T_{4.2} \simeq \mathbb{F}_1$  или с  $T_{5.1}^2$ . В этих случаях торическое вырождение поверхности  $S$  с дювалевскими особенностями либо тривиально, либо совпадает с  $T_{5.2}$  (если  $d = 5$ ). Существует значение параметра  $t_0$ , относительно которого поверхность  $S$  квантово минимальна. В следующей таблице выписаны слабые модели Ландау–Гинзбурга для  $S$  относительно параметра  $t_0$ . В таблице выписаны значения  $j$ -инварианта для  $f$ . Эллиптические поверхности  $E_{f_{5.1}}$  и  $E_{f_{5.2}}$  бирациональны над  $\mathbb{P}^1$ .

$d$ .номер	$k$	многочлен $f$	$j$ -инвариант
4.2	1	$\frac{1}{2}(4x + 4y + 3xy - x^{-1}y^{-1})$	$j_{4.2}$
5.1	1	$x + y + 3x^{-1} + 3y^{-1} + 2x^{-1}y^{-1}$	$j_5$
5.2	1	$\frac{1}{3}(x^{-1}(y^{-1} + 2 + y) + 2y^{-1} + 27x)$	$j_5$

$$j_{4.2} = -\frac{(t^3 - 3t^2 + 15t + 3)^3(t + 3)}{(3t^2 - 10t + 51)}$$

$$j_5 = \frac{(t^3 - 6t^2 - 12t + 24)^3(t + 6)}{(2t - 15)(2 + 3t)^3}$$

Поверхность  $E_{4.2}$  имеет особые слои  $II, I_8I_1I_1$ , а  $E_{5.1}$  и  $E_{5.2} - II, I_7I_2I_1$ .

*Замечание 4.10.* (1) Между эллиптическими поверхностями 3.1 и 9.1 есть 3-изогения  $(x', y') = (x^{-1}y^2, x^2y^{-1})$ .

(2) Между эллиптическими поверхностями 4.1 и 8.3 есть 2-изогения  $(x', y') = (xy, xy^{-1})$ .

(3) Между эллиптическими поверхностями 4.3 и 8.1 есть 2-изогения  $(x', y') = (x^2, y)$ .

*Замечание 4.11.* (1) Поверхность  $E_{9.1}$  получается из поверхности  $E_{9.1b} = E_{IV^*I_3I_1}$  кубической заменой базы, вполне разветвлённой над  $IV^*$  и  $I_3$ .

(2) Поверхность  $E_{3.1}$  получается из поверхности  $E_{9.1b} = E_{IV^*I_3I_1}$  кубической заменой базы, вполне разветвлённой над  $IV^*$  и  $I_1$ .

(3) Поверхность  $E_{8.3}$  получается из поверхности  $E_{8.3b} = E_{I_1^*I_4I_1}$  квадратичной заменой базы, разветвлённой в  $I_1^*$  и  $I_4$ .

Формальное доказательство теоремы 4.9 заключается в непосредственной проверке утверждений теоремы в каждом из случаев.

Прежде чем приступить к этой несложной проверке, объясним, каким образом был найден ответ — многочлены  $f_{k,n}$ . Метод их нахождения (и в первом — квантово минимальном случае, и во втором) в сущности тот же, что и метод доказательства Бовиля. Наш случай даже проще общего — заранее известно, что поверхность рациональна и якобиева.

Требование малого количества особых слоев ограничивает возможные значения  $j$ -инварианта. Действительно, посмотрим на  $j$ -инвариант как на отображение  $J : C \simeq \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ . Все слои над точками в прообразе  $J^{-1}(\infty)$  — заведомо особые. Предположим сначала, что

<sup>2</sup>То есть,  $S$  не квантово минимальная.

многочлены  $\Delta = 27B^2 + 4A^3$ ,  $4A^3$  и  $27B^2$  взаимно простые (то есть эллиптическая поверхность полустабильна). В этом случае слой  $J^{-1}(0)$  состоит не более чем из  $\deg A$  точек, а слой  $J^{-1}(1)$  состоит не более чем из  $\deg B$  точек.

Пусть  $\deg A = 2d$ ,  $\deg B = 3d$ ,  $\deg J = 6d$ . По формуле Гурвица существует не менее  $d + 2$  различных точек на базе  $C$  с  $J$ -инвариантом  $\infty$ , причём если выполняется равенство, то многочлены  $A$  и  $B$  не имеют кратных корней, а отображение  $J$  неразветвленное над  $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ . Такие отображения (*функции Белого*) находятся во взаимно-однозначном соответствии с транзитивными представлениями фундаментальной группы в группе перестановок  $6d$  элементов общего слоя отображения  $J$ , т.е. с гомоморфизмами  $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow \mathfrak{S}_{6d}$ , и тривалентными вложенными графами  $\Gamma$  на сфере  $\mathbb{P}^1$  (такой граф получается как прообраз отрезка, соединяющего 0 и 1).

Каждая точка  $t \in J^{-1}(\infty)$  лежит в отдельной грани, и валентность  $n$  грани совпадает с индексом ветвления  $1 + e_J(t) = n$ ; полустабильный слой над  $t$  — это колесо  $I_n$  из  $n$  прямых. Шесть бовилевских поверхностей соответствуют шести функциям Белого степени 12. Если эллиптическая поверхность задана пучком плоских кубик, степень дискриминанта  $\Delta$  равна 12 (1.3 показывает, что степень  $\Delta$  всегда равна  $12\chi(E, \mathcal{O}_E)$ ).

Предположим теперь, что многочлены  $\Delta = 27B^2 + 4A^3$ ,  $4A^3$  и  $27B^2$  не взаимно простые (не полустабильный случай). Рассмотрим наиболее общий случай  $\deg(A, B) = 1$ ,  $A(t) = A_1A_2A_3(t - u)$ ,  $B(t) = B_1B_2B_3B_4B_5(t - u)$ . Тогда  $J$ -инвариант — это функция степени 10 с индексами ветвления  $(3, 3, 3, 1)$  над 0,  $(2, 2, 2, 2, 2)$  над 1 и  $(n_1, n_2, n_3)$  над  $\infty$ . В этом случае у эллиптической поверхности четыре особых слоя: три полустабильных слоя  $I_{n_1}, I_{n_2}, I_{n_3}$ , и один слой типа  $II$  над  $u$ ; у графа  $\Gamma$  три вершины тривалентные (они соответствуют неособым слоям с  $J = 1$ ), а одна вершина одновалентная (над ней и висит непустой слой типа  $II$ ). Существует всего 4 таких графа; соответствующие наборы индексов ветвления над  $\infty$  такие:  $(8, 1, 1)$  (этот граф соответствует функции  $j_{4,2}$ ),  $(7, 2, 1)$  (а этот набор соответствует функции  $j_5$ ),  $(5, 4, 1)$  и  $(5, 3, 2)$ .

Поскольку  $j$ -инвариант поверхности  $E_f$  является рациональной функцией от коэффициентов многочлена Лорана  $f$ , нам нужно найти такую подстановку коэффициентов в многочлены  $f_{d,n}$ , чтобы  $j$ -инвариант эллиптической поверхности  $E_f$  стал бы равен определённой наперёд заданной функции  $j_i$ . Оказывается, что такая подстановка всегда существует, но никакого объяснения, почему для не квантово минимальных поверхностей она должна существовать, нам не известно.

**Предложение 4.12.** *Функции  $j_3, j_4, j_5, j_6, j_7, j_8, j_9, j_{4,2}$  являются функциями Белого.*

*Доказательство.* Легко проверить, что их ветвление над 0, 1/28 и  $\infty$  именно такое, как было указано ранее. По формуле Гурвица в других точках отображение  $j$  неразветвленное.  $\square$

**Предложение 4.13.** *Для многочленов  $f$  из таблиц в теореме 4.9  $j$ -инварианты эллиптических поверхностей  $E_f$  совпадают с указанными в таблице.*

Это несложное вычисление — все указанные эллиптические поверхности приводятся к вейерштрассовой нормальной форме.

**Пример 4.14.** Разберём, например, случай  $f = x + y + \frac{1}{xy}$ . Кривая задана уравнением  $x^2y + y^2x + 1 - txy = 0$ . Отображение  $(x, y) \rightarrow x$  является в общей точке  $E$  двулиственным отображением на  $\mathbb{P}^1$ :

$$y^2 + y(x - t) + x^{-1} = 0.$$



Сделаем замену  $(x, y) \rightarrow (x, y + \frac{(x-t)}{2})$ , в новых координатах  $E$  задаётся  $y^2 - \frac{(x-t)^2}{4} + x^{-1} = 0$ , после замены  $(x, y) \rightarrow (-x^{-1}, yx^{-1})$  получим кривую заданную уравнением  $y^2 = x^3 + \frac{(tx+1)^2}{4}$ , после линейной замены  $x \rightarrow x + \frac{t^2}{12}$  получим вейерштрассову форму  $y^2 = x^3 + Ax + B$ , где  $A = \frac{t(24-t^3)}{48}$ ,  $B = \frac{t^6-36t^3+216}{864}$ . Соответственно,  $\Delta = 4A^3 + 27B^2 = \frac{27-t^3}{16}$  и  $j = 1728 \frac{4A^3}{\Delta} = \frac{t^3(t^3-24)^3}{t^3-27}$ .

Вычислив аналогичным образом вейерштрассовы нормальные формы для всех указанных эллиптических поверхностей, убедимся что верно

**Утверждение 4.15.** *При фиксированном  $d \neq 4$  все эллиптические поверхности  $E_{f_{12-d,n}}$  бирационально эквивалентны (как эллиптические поверхности). Поверхности  $E_{f_{8,1b}}, E_{f_{8,3b}}$  и  $E_{I_1^* I_4 I_1}$  бирационально эквивалентны. Поверхности  $E_{f_{9,1b}}$  и  $E_{IV^* I_3 I_1}$  бирационально эквивалентны.*

Таким образом, мы доказали утверждение 4.9-2.

*Замечание 4.16.* Для бовилевских случаев достаточно было выяснить что степень отображения  $J$  равна 12. Это эквивалентно тому, что дискриминант  $\Delta$  взаимно прост с  $A$  и взаимно прост с  $B$ , то есть поверхность  $E$  полустабильна.

**Предложение 4.17.** *При  $d < 8$ , то  $\Phi_{f_{12-d,n}} = \Phi_{f_{12-d,m}}$  для всех  $n$ .*

*Доказательство.* Поскольку вейерштрассовы нормальные формы эллиптических поверхностей  $E_{f_{12-d,m}}$  и  $E_{f_{12-d,n}}$  совпадают, оба этих ряда являются решением одного и того же уравнения Пикара–Фукса, а уравнение Пикара–Фукса имеет единственное решение в  $\mathbb{C}[[t]]$ .  $\square$

*Доказательство теоремы 4.9.*

**Случай 4.18** (Случай не квантово минимальных поверхностей (4.9-3)). Торические поверхности  $S = T_{4,2}$  и  $S = T_{5,1}$  неособые. В этом случае можно применить 2.9. Заключаем, что любой многочлен Лорана  $f$  с  $\Delta(f) = \Delta(S)$  является слабой моделью Ландау–Гинзбурга  $S$  относительно некоторого параметра  $t_0(f)$ .

Теперь рассмотрим поверхность  $S = T_{5,2}$ . Ряд свободных членов у  $f_{5,2}$  совпадает с рядом свободных членов у  $f_{5,1}$  (см. 4.17), а следовательно, и с  $I$ -рядом гладкой поверхности дель Пеццо степени 7 относительно того же параметра  $t_0$ . Поэтому  $f_{5,2}$  является слабой моделью Ландау–Гинзбурга для  $S_7$  с тем же параметром  $t_0 = t_0(f_{5,1})$ , что и  $f_{5,1}$ .

Осталось проверить что для каждого  $d \neq 7$  хотя бы у одного многочлена  $f_{12-d,n}$  ( $12-d.n \neq 4.2$ ) ряд свободных членов  $\Phi_{f_{12-d,n}}$  совпадает с  $I^{S_d, reg}$ .

**Случай 4.19** ( $12-d = 3, 4, 6$ ). Если  $12-d < 7$ , то среди поверхностей  $T_{12-d,n}$  есть одна гладкая (а именно  $T_{3,1}, T_{4,1}, T_{6,4}$ ). Для соответствующего ей многочлена Лорана  $f_{12-d,n}$  равенство ряда свободных членов  $I$ -ряду уже установлено (см. 2.9). Ряды свободных членов для  $f_{12-d,n}$ , при тех  $n$ , когда  $T_{12-d,n}$  не является гладкой поверхностью, равны рядам свободных членов для гладкой  $T_{12-d,k}$  по 4.17.

**Случай 4.20** ( $12-d = 8, 9, k > 1$ ). Если  $12-d = 8, 9$  эллиптические поверхности  $E_{9,1}, E_{8,3}$  изогенны эллиптическим поверхностям  $E_{3,1}$  и  $E_{4,1}$ . Следовательно (4) у них одинаковые уравнения Пикара–Фукса и их решения (с точностью до изогении  $t \mapsto t^r$ ). Очевидно, что  $\Phi_{f_{9,1}} = \Phi_{f_{3,1}}$  и  $\Phi_{f_{8,3}} = \Phi_{f_{4,1}}$  (свободный член многочлена Лорана не меняется при мономальной замене переменных). Для остальных случаев степени 8 воспользуемся тем же соображением 4.17.

**Случай 4.21** ( $12 - d = 8, 9, k = 1$ ). Многочлены Лорана  $f_{9.1b}$ ,  $f_{8.1b}$  и  $f_{8.3b}$  (с точностью до замены координат 4.10, 4.11) это степени многочленов Лорана  $f_{3.1}$ ,  $f_{4.3}$  и  $f_{4.1}$ , поэтому

$$\Phi_{f_{9.1b}}(t^3) = \Phi_{f_{3.1}}(t), \Phi_{f_{8.1b}}(t^2) = \Phi_{f_{4.3}}(t), \Phi_{f_{8.3b}}(t^2) = \Phi_{f_{4.1}}(t).$$

Осталось сравнить ряды свободных членов в случаях 7.1, 7.2 и  $I$ -ряд для линейного сечения грассманиана  $G(2, 5)$ .

Поскольку ряды свободных членов  $\Phi_{f_1}$  и  $\Phi_{f_2}$  удовлетворяют дифференциальным уравнениям Пикара–Фукса  $L_1$  и  $L_2$ , степень по  $D$  и степень по  $t$  у которых ограничены  $\deg_D$  и  $\deg_t$ <sup>3</sup>, то если два ряда свободных членов равны по модулю  $(\deg_D + 2)(\deg_t + 2)$ , то совпадают и коэффициенты  $l_{ij}^k$  уравнений  $L_k = \sum_{i=0}^{\deg_t} t^i \sum_{j=0}^{\deg_D} D^j l_{ij}^k$ , и начальные условия, а следовательно совпадают и  $\Phi_{f_1}$  и  $\Phi_{f_2}$ .

□

**4.1. Модели Хори–Вафы.** В [23] предложен метод построения зеркально симметричных моделей Ландау–Гинзбурга для полных пересечений в торических многообразиях. Поскольку все поверхности дель Пеццо являются полными пересечениями в торических многообразиях (в случае  $S_5$  — в торическом вырождении многообразия Грассмана  $G(2, 5)$ , см. [3],[4],  $S_2, S_1$  — во взвешенных проективных пространствах), можно сравнить получившийся выше ответ с ответом полученным по рецепту Хори–Вафы.

Напомним, что полному пересечению  $l$  гиперповерхностей степеней  $d_1, \dots, d_l$  во взвешенном проективном пространстве  $\mathbb{P}(a_1 \dots a_n)$  сопоставляется пространство  $M = \{x_1, \dots, x_n \in (\mathbb{C}^*)^n : \prod_{i=1}^n x_i^{a_i} = t_0, \sum_{j=1}^{k_r} x_{i_j^{(r)}} = 1\}$  (индексы  $i_1^{(r)}, \dots, i_{k_r}^{(r)}$  выбраны таким образом, что все они попарно различны, и для всех  $r = 1, \dots, l$  выполнено равенство  $\sum_{j=1}^{k_r} a_{i_j^{(r)}} = d_r$ ), и функция  $w : M \rightarrow \mathbb{C}$  равная  $w = \sum_{i=1}^n x_i$ .

**Пример 4.22.** Поверхности дель Пеццо степени 4 сопоставлен тор  $\mathbb{T}$  с координатами  $y, x_1, x'_1, x_2, x'_2$ , гиперповерхность  $H = (yx_1x'_1x_2x'_2 = t_0)$ , две гиперповерхности  $L_1 = (x_1 + x'_1 = 1)$ ,  $L_2 = (x_2 + x'_2 = 1)$ , и функция  $w = y + x_1 + x'_1 + x_2 + x'_2$ . Ограничение  $w$  на  $L_1 \cap L_2$  равно  $y + 2$ . Поэтому  $t_0(w - 2)^{-1}$  ограниченное на  $H \cap L_1 \cap L_2$  равно  $x_1x'_1x_2x'_2 = x_1x_2(1 - x_1)(1 - x_2)$  ( $x_1, x_2$  являются на  $H \cap L_1 \cap L_2$  координатами).

Аналогичным образом, поверхностям дель Пеццо степени  $d \leq 4$  сопоставляются пучки кривых на двумерном торе  $\text{Spec } \mathbb{C}[x, y, x^{-1}, y^{-1}]$ . Их уравнения перечислены в следующей таблице (с точностью до сдвига).

$d$	уравнение ( $t = \frac{w - \text{const}}{t_0}$ )	особенности
$d = 4, S_4 = X_{2,2} \subset \mathbb{P}^4$	$1 - t \cdot xy(1 - x)(1 - y) = 0$	$I_1^* I_4 I_1$
$d = 3, S_3 = X_3 \subset \mathbb{P}^3$	$1 - t \cdot xy(1 - x - y) = 0$	$IV^* I_3 I_1$
$d = 2, S_2 = X_4 \subset \mathbb{P}(1112)$	$1 - t \cdot xy^2(1 - x - y) = 0$	$III^* I_2 I_1$
$d = 1, S_1 = X_6 \subset \mathbb{P}(1123)$	$1 - t \cdot x^2y^3(1 - x - y) - t = 0$	$II^* I_1 I_1$

Все эти кривые эллиптические над  $\mathbb{C}(t)$ , у них можно явно вычислить вейерштрассову нормальную форму, и следовательно найти типы особых слоёв модели Нерона; они перечислены в последнем столбце предыдущей таблицы.

<sup>3</sup>Степень  $\deg_t$  это количество особых слоёв отображения  $f$  (то есть количество точек в спектре), а степень  $\deg_D$  это ранг неприводимой относительно связности Гаусса–Манина компоненты в подсистеме трансцендентных циклов в локальной системе  $R^{n-1}f_! \mathbb{C}$ .

**Предложение 4.23.** *Модели Хори–Ваффы для поверхностей дель Пецо степени  $d \leq 4$  бирациональны первым четырём поверхностям Миранды–Перссона (1.6). В частности, для случаев  $d = 3, 4$  они имеют такое же уравнение Пикара–Фукса, и такую же модель Нерона, как и пучки  $f_{8.1}, f_{9.1}$ .*

В этом можно убедиться и построив изогению между ними.

**Пример 4.24.** В обозначениях примера 4.22, сделаем замену  $x_i = \frac{z_i}{u_i}, x'_i = \frac{z'_i}{u_i}; u_i = (z_i + z'_i)$  (то есть домножим исходный пучок на двумерный тор  $T_2 = (\mathbb{C}^*)^2$  с координатами  $u_i \neq 0$ ). Прообраз  $\tilde{H}$  задаётся уравнением  $yz_1z'_1z_2z'_2 = t_0u_1^2u_2^2$ . Действие  $T_2$  продолжается до действия на всём  $\tilde{H}: (y, z_1, z_2, z'_1, z'_2, u_1, u_2) \rightarrow (y, v_1z_1, v_2z_2, v_1z'_1, v_2z'_2, v_1u_1, v_2u_2)$ . Гиперповерхности  $L_i$  задаются уравнениями  $u_i = 1$ , орбиты тора  $T_2$  пересекаются с  $L_1 \cap L_2$  по 1 точке. Рассмотрим  $M_2$  — сечение  $H$  гиперповерхностями  $N_i$  заданными как  $z_iz'_i = 1$ . Орбиты тора  $T_2$  пересекаются с  $N_1 \cap N_2$  по 4 точкам, и  $M_2$  является  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -изогенным  $M$ . На  $M_2$  функция  $w = y + 2$  с точностью до линейной замены равна  $\frac{u_1^2u_2^2}{z_1z'_1z_2z'_2} = (z_1 + z_1^{-1})^2(z_2 + z_2^{-1})^2$ , а это и есть  $f_{4.3}^2$ , изогенная  $f_{8.1}$ .

## 5. МОНОДРОМИЯ

В этом разделе мы проиллюстрируем замечание 1.5, показав что для построенных в предыдущем разделе моделей Ландау–Гинзбурга верна гипотеза об исключительном наборе и исчезающих циклах.

Напомним, что когерентный пучок  $\mathcal{E}$  на алгебраическом многообразии  $X$  называется *исключительным*, если  $\text{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{E}) = \mathbb{C}$  и  $\text{Ext}^i(\mathcal{E}, \mathcal{E}) = 0$  для всех  $i > 0$ .

Набор исключительных пучков  $E_1, \dots, E_n$  называется *исключительным набором*, если для всех  $i < j$  выполнено  $\text{Ext}^*(E_j, E_i) = 0$ .

Исключительный набор называется *полным*, если он порождает всю ограниченную производную категорию  $\mathcal{D}^b(X)$  когерентных пучков на  $X$ . Аналогичным образом определяются исключительные наборы произвольных элементов категории  $\mathcal{D}^b(X)$ .

Для пары когерентных пучков  $\mathcal{E}, \mathcal{F}$  на алгебраическом многообразии  $X$ , обозначим альтерированную сумму через

$$\chi(E, F) = \sum_i (-1)^i \dim \text{Ext}^i(\mathcal{E}, \mathcal{F}).$$

Она задаёт билинейную форму на  $K_0(X)$  (всюду далее символом  $K_0(X)$  обозначается  $K_0(X)/\text{tors}$ ).

Набор  $e_1, \dots, e_n$  элементов  $K_0(X)$  называется *полуортонормированным* (относительно формы  $\chi$ ) если для всех  $i < j$  выполнено  $\chi(e_j, e_i) = 0$  и для всех  $i$  выполнено  $\chi(e_i, e_i) = 1$ .

Если  $E_1, \dots, E_n$  — полный исключительный набор в  $\mathcal{D}^b(X)$ , то его образ  $e_1, \dots, e_n$  в  $K_0(X)$  это полуортонормированный базис. Положим  $A_{ij} = \chi(e_i, e_j)$ .

Обозначим через  $\chi_-$  кососимметризацию формы  $\chi$ :

$$\chi_-(\mathcal{E}, \mathcal{F}) = \chi(\mathcal{E}, \mathcal{F}) - \chi(\mathcal{F}, \mathcal{E}).$$

С каждым элементом  $e_i$  ортонормированного базиса  $e_1, \dots, e_n$  связано симплектическое отражение  $I_i(v) = v - \chi_-(v, e_i)e_i$ .

Имеем  $I_1 \cdot \dots \cdot I_n = A^{-1}A^t$ . По двойственности Серра  $\chi(\mathcal{E}, \mathcal{F}) = (-1)^{\dim X} \chi(\mathcal{F}, \mathcal{E} \otimes K_X)$ , поэтому для всех  $x, y$  выполнено равенство  $x^t A y = y^t A (A^{-1}A^t)x$ , следовательно умножение на  $K_X[\dim X]$  в базисе  $e_1, \dots, e_n$  пространства  $K_0(X)$  задаётся матрицей  $A^{-1}A^t$ , то есть представляется как произведение симплектических отражений  $I_1 \cdot \dots \cdot I_n$ .

Если  $\mathcal{E}$  — исключительный объект  $\mathcal{D}^b(X)$ , для всех объектов  $\mathcal{F}$  определён канонический морфизм  $\text{can} : \text{RHom}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \otimes \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ . Он дополняется до точного треугольника

$$L_{\mathcal{E}}\mathcal{F}[-1] \rightarrow \text{RHom}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \otimes \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow L_{\mathcal{E}}\mathcal{F}.$$

Объект  $L_{\mathcal{E}}\mathcal{F}$  называется *левой перестройкой*  $\mathcal{F}$  относительно  $\mathcal{E}$ . Аналогично определяется правая перестройка. Перестройка  $L_{\mathcal{E}}$  переводит правый ортогонал к  $\mathcal{E}$  в левый ортогонал к  $\mathcal{E}$ . Перестройка относительно исключительного набора определяется как последовательная композиция перестроек относительно всех элементов.

Преобразование  $x, y \rightarrow I_x y, x$  ( $x, y \rightarrow y, I_y x$ ) называется *левой (правой) перестройкой* относительно  $x$  ( $y$ ). Перестройке  $L_E$  соответствует отражение  $I_e$ .

Пусть  $X$  — чётномерное многообразие с полным исключительным набором  $E = \{E_1, \dots, E_n\}$ . Рассмотрим линейное пространство

$$V = K_0(X) \otimes \mathbb{Q} / \text{Ker } \chi_-,$$

с невырожденной кососимметрической формой  $\chi_-$ . Пусть  $x = \{x_1, \dots, x_n\}$  — упорядоченный набор точек на  $\mathbb{A}^1$ , а  $U = \mathbb{A}^1 \setminus x$ . Выберем точку  $x_0 \in U$ , и набор простых не пересекающихся петель  $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \pi_1(U, x_0)$  охватывающих точки  $x_1, \dots, x_n$  соответственно (а  $\gamma_1 \cdot \dots \cdot \gamma_n$  — петля вокруг бесконечности). Определим представление  $\phi_{E,x} : \pi_1(U) \rightarrow Sp(V, \chi_-)$  на образующих  $\gamma_i$ :

$$\phi_{E,x}(\gamma_i) = I_i.$$

Обозначим локальную систему, соответствующую представлению  $\phi$ , через  $\mathcal{L}_{E,x}$ . Пусть  $(M, w)$  — модель Ландау–Гинзбурга (гомологически) зеркально симметричная к  $X$ . Гипотеза сформулированная Дубровиным (см раздел 5 в [12]) включает в себя следующее

**Утверждение 5.1.** *Локальная система  $\mathcal{L}_{E,x}$  совпадает с  $R^{\dim X} w_* \mathbb{Z}$ .*

Далее мы проверим, что построенные в предыдущем разделе слабые модели Ландау–Гинзбурга удовлетворяют описанному в гипотезе условию.

Для обратимого пучка  $\mathcal{L}$  на поверхности  $S$ , обозначим его антиканоническую степень  $d(\mathcal{L}) = c_1(\mathcal{L}) \cdot (-K_S)$  через  $d(\mathcal{L})$ , а ранг  $r(\mathcal{L}) = 1$  через  $r(\mathcal{L})$ . Продолжим функции  $r$  и  $d$  по линейности на группу  $K_0(S)$ .

На поверхности  $S$  кососимметрическая форма  $\chi_-$  зависит только от рангов и степеней и явно выражается как

$$\chi_-(\mathcal{E}, \mathcal{F}) = r(\mathcal{E})d(\mathcal{F}) - r(\mathcal{F})d(\mathcal{E}).$$

Исключительный набор  $\mathcal{E} = E_1, \dots, E_n$  называется *блоком*, если  $\text{Ext}^*(E_i, E_j) = 0$  для всех  $i \neq j$ . Левый перенос пучка  $F$  через блок определяется как  $L_{\mathcal{E}}F = L_{E_1} \dots L_{E_n}F$ . Если пара блоков  $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$  полуортогональна ( $\text{Rhom}(F_i, E_j) = 0$ ), то полуортогональна и пара блоков  $(L_{\mathcal{E}}\mathcal{F}, \mathcal{E})$ . Аналогично определяется блочная перестройка набора (возможно, совпадающих) векторов  $V$ .

Пусть  $E_1, \dots, E_a, F_1, \dots, F_b, G_1, \dots, G_c$  — полный *трёхблочный* исключительный набор на поверхности дель Пеццо степени  $d$  (то есть, наборы  $E_i, F_j$  и  $G_k$  являются блоками). В [25] описаны все такие наборы. Напомним основные свойства.

**Предложение 5.2** ([25]). (1) *На поверхности дель Пеццо  $S$ , все исключительные объекты в  $\mathcal{D}^b(S)$  представляются сдвинутыми локально свободными пучками. Локально свободный исключительный пучок однозначно определяется его образом в  $K_0(S)$ .*

- (2) Внутри каждого блока, ранги и степени исключительных пучков из набора совпадают ( $r(E_i) = r(E_j), d(E_i) = d(E_j)$ ). Обозначим эти числа через  $x = r(E), y = r(F), z = r(G)$  и  $d(E), d(F), d(G)$ . Это условие означает, что образы  $E_i, F_j$  и  $G_k$  совпадают в  $V = K_0(S)/\text{Ker}(\chi_-)$ . Обозначим их через  $e, f, g$ .
- (3) Значения  $\chi(E_i, F_j), \chi(E_i, G_k), \chi(F_i, G_k)$  не зависят от  $i, j, k$ . Обозначим их  $\chi(E, F), \chi(E, G)$  и  $\chi(F, G)$ .
- (4) Число  $a + b + c$  это количество элементов в базисе  $e_1, \dots, e_c$  в векторном пространстве  $K_0(S) \otimes \mathbb{Q}$ , следовательно  $a + b + c = \text{rk } K_0(S) = 2 + \rho(S)$ . Поэтому, по формуле Нётера:

$$(5.3) \quad a + b + c + d = 12.$$

- (5) Число  $abcd$  является полным квадратом. Пусть  $q \in \mathbb{Z}_+$  — положительный корень

$$(5.4) \quad q^2 = abcd$$

- (6) Ранги исключительных пучков в блоках и их количества удовлетворяют обобщённому уравнению Маркова:

$$(5.5) \quad ax^2 + by^2 + cz^2 = qxyz$$

- (7) Матрица  $A_{ij}$  явно выражается через  $a, b, c, x, y, z$ :

$$(5.6) \quad \chi(E, F) = \chi_-(e, f) = \frac{zdc}{q}$$

$$(5.7) \quad \chi(F, G) = \chi_-(f, g) = \frac{xda}{q}$$

$$\chi(E, G) = \chi_-(e, g) =$$

$$= xz \left( \frac{\chi_-(E, F)}{xy} + \frac{\chi_-(F, G)}{yz} \right) =$$

$$= dxz - \frac{ydb}{q}$$

- (8) Для каждого решения уравнения 5.5 в натуральных числах  $x, y, z$  существует трёхблочный исключительный набор с соответствующими рангами.
- (9) Любой полный трёхблочный набор получается блочными перестройками из минимального (набора с минимальным возможным значением  $x + y + z$ ).
- (10) На поверхности  $\mathbb{F}_1$  (и на поверхности  $S_7$ ) трёхблочных полных исключительных наборов нет. А на всех остальных поверхностях дель Пеццо — есть.

Таким образом, если зафиксированы ранги  $x, y, z$  и степень одного из блоков (например,  $d(E)$ ), то степени  $d(F)$  и  $d(G)$  однозначно определяются из 5.6 и 5.7. Если одновременно умножить все элементы трёхблочного исключительного набора на обратимый пучок степени  $d'$ , то получим эквивалентный трёхблочный исключительный набор с инвариантами  $(x, d(E) + d'x), (y, d(F) + d'y), (z, d(G) + d'z)$  отличающимся на симплектоморфизм  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ d' & 1 \end{pmatrix}$ . Поэтому будем считать, что  $d(e) = 0$  (мы выберем упорядочения так, чтобы  $E_i$  были линейными расслоениями).

Кроме того, заметим что произведение последовательных симплектических отражений относительно всех элементов полного исключительного набора соответствует операции умножения на канонический класс  $\otimes K_S$ . В базисе  $r, deg$  эта операция равна  $I_{[0,1]}^{-d}$ ; обозначим  $h = [0, 1] \in V$ . Среди всех решений уравнения 5.5 есть одно с минимальным значением  $x + y + z$ . В следующей таблице перечислены минимальные решения (в случаях 5, 5, 1 и 5, 1, 1 минимальных решений два, но мы ограничимся одним), и соответствующие им тройки векторов  $e = [x, d(E)]$ ,  $f = [y, d(F)]$ ,  $g = [z, d(G)]$ .

$d$	$a \cdot x^2 + b \cdot y^2 + c \cdot z^2 = q \cdot x \cdot y \cdot z$	$e, f, g$
9	$1 \cdot 1^2 + 1 \cdot 1^2 + 1 \cdot 1^2 = 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$	$[1, 0], [1, 3], [1, 6]$
8	$2 \cdot 1^2 + 1 \cdot 1^2 + 1 \cdot 1^2 = 4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$	$[1, 0], [1, 2], [1, 6]$
6	$3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1^2 + 1 \cdot 1^2 = 6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$	$[1, 0], [1, 1], [1, 4]$
5	$5 \cdot 1^2 + 1 \cdot 1^2 + 1 \cdot 2^2 = 5 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2$	$[1, 0], [1, 2], [2, 9]$
4	$4 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1^2 = 8 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$	$[1, 0], [1, 1], [1, 3]$
3	$3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1^2 = 9 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$	$[1, 0], [1, 1], [1, 2]$
3	$6 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1^2 + 1 \cdot 2^2 = 6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2$	$[1, 0], [1, 1], [2, 5]$
2	$8 \cdot 1^2 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^2 = 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2$	$[1, 0], [2, 1], [2, 3]$
2	$6 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1^2 + 1 \cdot 3^2 = 6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3$	$[1, 0], [1, 1], [3, 5]$
2	$4 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1^2 + 2 \cdot 2^2 = 8 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2$	$[1, 0], [1, 1], [2, 3]$
1	$9 \cdot 1^2 + 1 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^2 = 3 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3$	$[1, 0], [3, 1], [3, 2]$
1	$8 \cdot 1^2 + 2 \cdot 2^2 + 1 \cdot 4^2 = 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 4$	$[1, 0], [2, 1], [4, 3]$
1	$6 \cdot 1^2 + 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 = 6 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3$	$[1, 0], [2, 1], [3, 2]$
1	$5 \cdot 1^2 + 5 \cdot 2^2 + 1 \cdot 5^2 = 5 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 5$	$[1, 0], [2, 1], [5, 3]$

Все симплектические отражения  $I_{e_i}$  сопряжены в группе  $GL(2, \mathbb{Z})$ . Между векторами  $e, f, g, h$  выполнено соотношение

$$(5.8) \quad (I_e^a) \cdot (I_f^b) \cdot (I_g^c) \cdot (I_h^d) = 1$$

В статьях [14] и [15] объясняется, что соотношения подобные 5.8, с точностью до отношения эквивалентности заданного одновременными сопряжениями в  $GL(2, \mathbb{Z})$  (выбором базиса) и блочными перестройками, взаимно-однозначно соответствуют выбору порядка особых слоёв на некоторой (топологической) эллиптической поверхности, причём элементы  $I_e^a, I_f^b, \dots$  равны (глобальным) монодромиям вокруг особых слоёв типов  $I_a, I_b, \dots$

Кроме того, деформации особых слоёв в наборы более простых, соответствуют распадениям элементов типа  $I_e^a$  в произведения меньших групп. В частности, особый слой типа  $I_a$  с монодромией  $I_e^a$  (все  $a$  исчезающих циклов лежат в одном гомологическом классе  $e$ ) деформируется в  $a$  особых слоёв типа  $I_1$  с монодромией  $I_e$ .

Таким образом, для деформаций построенных в разделе 4 слабых моделей Ландау–Гинзбурга соответствующих бовилевским поверхностям выполнено утверждение 5.1.

Стоит отметить, что этот подход можно бы было использовать и для определения моделей Ландау–Гинзбурга. Если на поверхности дель Пеццо  $S$  степени  $d$  есть трёхблочный полный исключительный набор (а такой набор есть на всех поверхностях дель Пеццо кроме  $\mathbb{F}_1$  и  $S_7$ ), то по нему можно построить 4 примитивных вектора  $e, f, g, h$  в двумерной решётке  $\Lambda = K_0(S)/\chi_-$ , где векторы  $e, f, g$  — это классы элементов блоков в  $\Lambda$ , а примитивный вектор  $h$  определяется тем условием, что умножение на антиканоническое линейное расслоение является  $d$ -ой степенью отражения относительно вектора  $h$ . Отражения относительно векторов  $e, f, g, h$  удовлетворяют соотношению  $I_e^a I_f^b I_g^c I_h^d = 1$ .

Этому соотношению однозначно соответствует топологическая эллиптическая поверхность с 4 особыми слоями типов  $I_a, I_b, I_c, I_d$ . А по теореме Бовиля такая алгебраическая поверхность единственная.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] D. Auroux, L. Katzarkov, D. Orlov, *Mirror symmetry for Del Pezzo surfaces: Vanishing cycles and coherent sheaves*, Inv. Math. 166, No. 3 (2006), 537–582 arXiv:math.AG/0506166.
- [2] A. Bertram, I. Ciocan-Fontanine, B. Kim, *Two Proofs of a Conjecture of Hori and Vafa*, Duke Math. J. 126, No. 1 (2005), 101–136, arXiv:math.AG/0304403.
- [3] V. V. Batyrev, I. Ciocan-Fontanine, B. Kim, D. van Straten, *Conifold transitions and mirror symmetry for calabi-yau complete intersections in grassmannians*, arXiv:alg-geom/9710022.
- [4] V. V. Batyrev, I. Ciocan-Fontanine, B. Kim, D. van Straten, *Mirror Symmetry and Toric Degenerations of Partial Flag Manifolds*, Acta Math. 184, No. 1 (2000), 1–39, arXiv:math.AG/9803108.
- [5] A. Beauville, *Le nombre minimum de fibres singulieres d'une courbe stable sur  $\mathbb{P}^1$* , Asterisque 86, 97-108 (1981), <http://math.unice.fr/~beauvill/pubs/fibsing.pdf>
- [6] A. Beauville, *Les familles stables de courbes elliptiques sur  $\mathbb{P}^1$  admettant 4 fibres singulieres*, C. R. Acad. Sc. Paris 294, 657-660 (1982), <http://math.unice.fr/~beauvill/pubs/ellss.pdf>
- [7] B. Crauder, R. Miranda, *Quantum Cohomology of Rational Surfaces*, arXiv:alg-geom/9410028.
- [8] В. И. Данилов, *Геометрия торических многообразий*, Успехи матем. наук, т. 33, вып. 2 (200) (1978), 85–134, <http://mi.mathnet.ru/umn/33/2/85>
- [9] В. И. Данилов, А. Г. Хованский, *Многогранники Ньютона и алгоритм вычисления чисел Ходжа–Делиня*, Изв. АН СССР, Сер. Мат., 50, No. 5 (1986), 925–945, <http://mi.mathnet.ru/izv/50/5/925>
- [10] M. Demazure, *Surfaces de del Pezzo*, Lect. Notes Math, 777, 23-69.
- [11] I. Dolgachev, V. Iskovskikh, *Finite subgroups of the plane Cremona group*, arXiv:math/0610595.
- [12] B. Dubrovin, *Geometry and analytic theory of Frobenius manifolds*, Proc. ICM Berlin 1998, arXiv:math/9807034.
- [13] P. Du Val, *On isolated singularities of surfaces which do not affect the conditions of adjunction, I, II and III*, Proc. Cambridge Phil. Soc. 30 (1934), 453–459, 460–465, 483–491
- [14] M. Fukae, Y. Yamada, S.-K. Yang, *Mordell–Weil Lattice via String Junctions*, Nucl.Phys. B572 (2000) 71–94, arXiv:hep-th/9909122v1.
- [15] M. Fukae, *Monodromies of rational elliptic surfaces and extremal elliptic K3 surfaces*, arXiv:math/0205062.
- [16] S. Galkin, *Two instances of fake minimal Fano threefolds*. (in preparation), <http://www.mi.ras.ru/~galkin/work/fakefano.pdf>
- [17] A. Gathmann, *Absolute and relative Gromov-Witten invariants of very ample hypersurfaces*, Duke Math. J. 115, No. 2 (2002), 171–203, arXiv:math.AG/0009190.
- [18] I. M. Gelfand, M. M. Kapranov, A. V. Zelevinsky *Discriminants, Resultants and Multidimensional Determinants*, Birkhauser, Boston (1994).
- [19] A. B. Givental, *A mirror theorem for toric complete intersections*, Kashiwara, Masaki (ed.) et al., Topological field theory, primitive forms and related topics. Proceedings of the 38th Taniguchi symposium, Kyoto, Japan, December 9–13, 1996 Boston, MA: Birkhauser. Prog. Math. 160, 141–175, arXiv:alg-geom/9701016.
- [20] V. V. Golyshev, *Classification problems and mirror duality*, LMS Lecture Note, ed. N. Young, 338 (2007), arXiv:math.AG/0510287.
- [21] V. V. Golyshev, *Spectra and strains*, arXiv:0801.0432.
- [22] L. Gottsche, R. Pandharipande, *The quantum cohomology of blow-ups of  $\mathbb{P}^2$  and enumerative geometry*, arXiv:alg-geom/9611012.
- [23] H. Hori, C. Vafa, *Mirror symmetry*, arXiv:hep-th/0002222.
- [24] V. A. Iskovskikh, Yu. G. Prokhorov, *Fano Varieties*, volume 47 of *Encyclopaedia Math. Sci.* Springer-Verlag, Berlin.
- [25] Б. В. Карпов, Д. Ю. Ногин, *Трехблочные исключительные наборы на поверхностях дель Пеццо*, Изв. РАН. Сер. матем. 62:3 (1998), 3–38, arXiv:alg-geom/9703027.
- [26] K. Kodaira, *On compact complex analytic surfaces II*, Ann. Math. 77, 563–626 (1963).
- [27] M. L. Kontsevich, Yu. I. Manin, *Gromov-Witten classes, quantum cohomology, and enumerative geometry*, Comm. Math. Phys. 164 (1994) 525–562, arXiv:hep-th/9402147.

- [28] R. Miranda, U. Persson, *On Extremal Rational Elliptic Surfaces*, Math. Z., 193, 537–558 (1986).
- [29] A. Neron, *Modeles minimaux des varietes abeliennes sur les corps locaux et globaux*, Publ. I.H.E.S., 21 (1964).
- [30] В. В. Пржиялковский, *On Landau–Ginzburg models for Fano varieties*, Comm. Num. Th. Phys., в печати, arXiv:0707.3758.
- [31] В. В. Пржиялковский, *Минимальное кольцо Громова–Виттена*, Известия РАН, Сер. Мат., в печати (Деп. в ВИНТИ 16.10.07, 961-В 2007), arXiv:0710.4084.
- [32] V. Przyjalkowski, *Quantum cohomology of smooth complete intersections in weighted projective spaces and singular toric varieties*, arXiv:math/0507232v3.
- [33] T. Shioda, *On elliptic modular surfaces*, J. Math. Soc. Japan, 24 (1972), 20–59.
- [34] J. Stienstra, F. Beukers, *On the Picard–Fuchs equation and the formal Brauer group of certain elliptic K3-surfaces*, Mathematische Annalen 271 (1985) p.269–304.
- [35] J. Tate, *On the conjecture of Birch and Swinnerton–Dyer*, Sem. Bourbaki Exp. 306, 1–26 (1966).
- [36] K. Ueda, *Homological mirror symmetry for toric Del Pezzo surfaces*, arXiv:math.AG/0411654.