Российская Академия Наук
Математический институт имени В.А. Стеклова

На правах рукописи
УДК 510.64

БЕКЛЕМИШЕВ Лев Дмитриевич

Схемы рефлексии в формальной арифметике

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Москва – 1998 г.

Моим дорогим родителям
Дмитрию Владимировичу и Людмиле Анатолиевне

Содержание

Введение

Настоящая диссертация посвящена исследованию схем рефлексии для фрагментов формальной арифметики Пеано и применению этих схем к вопросам сравнения и классификации арифметических теорий.

Схемы рефлексии возникли в математической логике вскоре после доказательства Гёделем его фундаментальных теорем о неполноте [17].[1] Для данной теории T эти схемы представляют собой варианты формализации утверждения *"если формула φ доказуема в T, то φ истинна"*. Они дают примеры истинных, но недоказуемых утверждений, обобщающих первый известный пример такого рода — гёделевскую формулу непротиворечивости теории T.

Тьюринг [43] ввёл в рассмотрение прогрессии теорий, получаемые итерированием процесса пополнения теории схемой рефлексии, и предложил возможный подход к ординальной классификации арифметических теорий на основе таких прогрессий. В дальнейшем этот подход был проанализирован и развит Феферманом в [15]. Построенные Тьюрингом и Феферманом примеры показали, что на пути подобной классификации встают существенные трудности, связанные с проблемой канонического выбора итерированных схем рефлексии и связанным с ней вопросом о естественном представлении ординалов в арифметике.

Крайзель и Леви в [20] показали, что схемы рефлексии являются удобным инструментом для изучения вопросов сложности аксиоматизации формальных теорий. Ими была доказана дедуктивная эквивалентность так называемой равномерной схемы рефлексии для примитивно рекурсивной арифметики и полной схемы индукции, откуда, в частности, вытекает невозможность задания арифметики Пеано множеством аксиом ограниченной кванторной сложности. В этой же работе была доказана эквивалентность схемы трансфинитной индукции до ординала ε_0 и равномерной схемы рефлексии для арифметики Пеано. В дальнейшем были установлены тесные связи между схемами рефлексии и другими истинными невыводимыми утверждениями, включая известные комбинаторные принципы Париса–Харрингтона.

В диссертации получено решение ряда важных вопросов о схемах рефлексии, что позволило сделать аппарат этих схем универсальным инструментом анализа и ординальной классификации арифметических теорий. Описание исследуемой теории в терминах схем рефлексии позволяет использовать свойства таких схем для получения разнообразных результатов о её строении и соотношении с другими теориями, в частности, результатов о независимости, аксиоматизируемости, (частичной) консервативности и характеризации классов доказуемо тотальных вычислимых функций.

Одно из наиболее активно развивающихся в последнее время направлений математической логики связано с изучением подсистем, или фрагментов, формальной арифметики Пеано PA. Интерес к этим вопросам был вызван прежде всего обнаружившимися связями с теорией сложности вычислений и попытками формализации понятия эффективного (feasible) доказательства. Монография [18] содержит накопленные в этой области к 1993 году основные результаты и обширную библиографию.

В настоящей работе подход, основанный на схемах рефлексии, применён к исследованию иерархий фрагментов PA. Изучены взаимосвязи схем рефлексии и основных форм индукции ограниченной арифметической сложности. Как следствие получен ряд новых результатов, относящихся к иерархиям фрагмен-

[1] Схемы рефлексии появились впервые, по-видимому, в работе Россера 1937 г. [34]. При этом Россер ссылается на неопубликованные результаты Клини, рассмотревшего в 1935 г. вариант логического правила, эквивалентный, в современной терминологии, равномерной схеме рефлексии (см. ниже §2.1).

тов PA, определяемых правилом индукции и схемой индукции без параметров ограниченной арифметической сложности.

К основным результатам диссертации можно отнести следующие.

1) Точная характеризация правил индукции ограниченной арифметической сложности в терминах схем рефлексии (теоремы 2, 3, 4 диссертации).

Существенной чертой полученной характеризации является её инвариантность, то есть независимость от выбора базисной теории достаточно широкого класса, над которой эти правила рассматриваются. В частности, это позволяет получить естественную аксиоматизацию с помощью схем аксиом замыканий *произвольных* достаточно сильных арифметических теорий относительно правил индукции (следствия 3.16, 3.18 и 5.24).

2) Точная характеризация схем беспараметрической индукции ограниченной арифметической сложности в терминах схем рефлексии (теорема 5).

Возникающие при этом так называемые локальные схемы рефлексии в простейшем случае были известны еще со времени работы Тьюринга. Однако, их связь с фрагментами PA или другими формальными системами, определяемыми независимым образом, ранее не была известна.

3) Детально изучено строение иерархии локальных схем рефлексии над произвольной достаточно сильной арифметической теорией. В частности, получены оптимальные в смысле арифметической сложности результаты о консервативности для этой иерархии (теорема 1), а также результаты о связи равномерной и локальной схем рефлексии (теорема 6, предложения 6.27 и 6.28).

Вместе с результатами 2) это позволяет дать ответ на ряд вопросов о схемах беспараметрической индукции в арифметике, а также получить новое конструктивное доказательство некоторых результатов об этих схемах, для которых ранее было известно лишь неконструктивное теоретико-модельное доказательство.

4) Получен ответ на стоявший в области фрагментов арифметики вопрос о доказуемо тотальных вычислимых функциях теории, аксиоматизируемой схемой индукции для Π_2-формул без параметров. Показано, что класс таких функций совпадает с примитивно рекурсивными функциями (следствие 6.9). Расширение этой теории схемой индукции для Σ_1-формул с параметрами имеет более широкий класс доказуемо тотальных вычислимых функций, совпадающий с классом дважды рекурсивных функций в смысле Р. Петер (предложение 7.29). Эти результаты, по-видимому, являются наиболее интересными приложениеми результатов 2) и 3).

5) Построение иерархий итерированных схем рефлексии с естественными свойствами, позволяющее обобщить на такие схемы результаты о консервативности из 3). В частности, показано, что для таких иерархий α раз итерированная схема локальной рефлексии, где α — конструктивный ординал, доказывает те же Π_1-предложения, что и ω^α раз итерированное утверждение о непротиворечивости (теорема 7).

В отличие от традиционного подхода, связанного с ординальными границами доказуемости трансфинитной индукции в формальных теориях (см., например, [29]), изложенный в диссертации подход дает более тонкую классификацию, позволяющую различить теории уже на уровне их Π_1-следствий. На основе этого подхода получено обобщение на более широкий класс теорий теоремы Шмерля [35] о тонкой структуре иерархии итерированных схем равномерной рефлексии над примитивно рекурсивной арифметикой и вычислены ординалы основных фрагментов PA (теорема 8, следствие 7.25). Также получены обобщения результатов 4) на схемы беспараметрической индукции арифметической сложности Π_n для произвольного $n \geq 2$ (предложение 7.29).

Применяемые в диссертации методы можно разделить на три группы. К первой группе относятся широко известные методы структурной теории доказательств, используемые при получении характеризаций 1) и 2), такие как техника устранения сечения и сколемизация. Отметим, что применяемый нами для анализа правила Σ_n-индукции вариант техники сколемизации является усовершенствованием техники "операторных теорий" работы [37].

Ко второй группе относится нетрадиционная техника, используемая для анализа схем локальной рефлексии. Ключевую роль здесь играет логика доказуемости и связанные с ней модели Крипке. Первые применения подобной техники к анализу схем рефлексии содержатся в работах [11, 1].

Наконец, подход, предлагаемый нами для построения иерархий итерированных схем рефлексии, использует некоторые идеи работ [15, 35]. Введенное в диссертации понятие гладкой прогрессии теорий позволяет существенно упростить построение итерированных схем рефлексии, делая ненужным использование языка теории рекурсии и его формализации в арифметике, а также использование так называемых фундаментальных последовательностей ординальных обозначений. При этом достигается большая общность результатов и, в некотором смысле, каноничность определяемых посредством этой конструкции схем.

1 Основные понятия

1.1 Элементарная арифметика

Язык элементарной арифметики — это язык первого порядка, содержащий бинарные предикатные символы $=$ и $\leq$; бинарные функциональные символы $+$ и $\cdot$; унарные функциональные символы S и exp и константу 0. *Стандартная модель* арифметики — это модель с унивесумом $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, на котором все символы интерпретируются естественным образом: $=$ есть отношение равенства; $\leq$ есть отношение порядка; $+$ и $\cdot$ суть операции сложения и умножения; S есть функция следования $S(x) = x + 1$; exp есть показательная функция $\exp(x) = 2^x$.

Формулы этого языка называются *арифметическими.* Мы будем следовать обычным соглашениям об опускании излишних скобок в формулах; использовать инфиксное написание $=, \leq, +$ и $\cdot$ (то есть будем писать, например, $x \leq y$ вместо $\leq(x, y)$); будем писать 2^x вместо $\exp(x)$ и так далее. $x < y$ есть сокращение для $x \leq y \wedge \neg x = y$.

Выражения $\forall x \leq t\ A(x)$ и $\exists x \leq t\ A(x)$ являются сокращениями для формул $\forall x\ (x \leq t \to A(x))$ и $\exists x\ (x \leq t \wedge A(x))$, соответственно (где t — любой терм, не содержащий переменной x). Вхождения кванторов такого вида называются *ограниченными*; ограниченными или *элементарными формулами* называются арифметические формулы, все вхождения кванторов в которые ограничены. Заметим, что по определению бескванторные формулы являются элементарными. Аналогично определяются выражения $\forall x < t\ A(x)$ и $\exists x < t\ A(x)$. *Элементарные предикаты* или *отношения* — это отношения, определимые элементарными формулами в стандартной модели арифметики.

Арифметические формулы классифицируются по своей логической сложности в классическую *арифметическую иерархию.* Для $n \geq 0$ классы Σ_n- and Π_n- формул определяются индуктивно следующим образом. Σ_0- и Π_0-формулы — это элементарные формулы. Σ_{n+1}-формулы — это формулы вида

$$\exists x_1 \dots \exists x_m A(x_1, \dots, x_m),$$

где A — некоторая Π_n-формула. Π_{n+1}-формулы — это формулы вида

$$\forall x_1 \dots \forall x_m A(x_1, \dots, x_m),$$

где A — некоторая Σ_n-формула. Другими словами, Σ_n-формулы — это ограниченные формулы с префиксом из n чередующихся блоков однотипных кванторов, начинающиеся с $\exists$, а Π_n-формулы определены двойственным образом. Классы Σ_n- and Π_n-формул будем обозначать Σ_n и Π_n, соответственно.

По теореме о предваренной нормальной форме, всякая арифметическая формула логически эквивалентна Σ_n-формуле для некоторого n. Допуская вольность речи, мы будем иногда называть Σ_n-формулами также и формулы, логически эквивалентные Σ_n-формулам в смысле нашего официального определения. По модулю логической эквивалентности

1. Классы Σ_n и Π_n замкнуты относительно $\vee, \wedge$.
2. $A \in \Sigma_n \iff \neg A \in \Pi_n$ и двойственно.
3. Для $n \geq 1$, класс Π_n замкнут относительно $\forall$,
   класс Σ_n замкнут относительно $\exists$.

С вычислительной точки зрения, наиболее важным классом формул является Σ_1. Предикат является Σ_1-определимым, если и только если он (рекурсивно) перечислим.

Элементарные предикаты разрешимы, причем грубая оценка сложности разрешающей процедуры дает верхнюю оценку порядка 2^x_n на число ее шагов, где n — некоторая константа, а x — размер входа. Здесь 2^x_n означает *суперэкспоненциальную функцию* двух аргументов:

$$2^x_0 := x; \quad 2^x_{n+1} := 2^{2^x_n}.$$

Функции вида 2^x_n для фиксированного n называются *мультиэкспоненциальными,* таким образом всякий элементарный предикат разрешим за мультиэкспоненциальное время. Обратное также верно: всякий предикат, разрешимый за мультиэкспоненциальное время, элементарен (см. [4]).

Арифметика Пеано PA — теория первого порядка с равенством, сформулированная в арифметическом языке и задаваемая следующими математическими аксиомами:

P1. $\neg S(a) = 0$

P2. $S(a) = S(b) \to a = b$

P3. $a + 0 = a$

P4. $a + S(b) = S(a + b)$

P5. $a \cdot 0 = 0$

P6. $a \cdot S(b) = a \cdot b + a$

P7. $\exp(0) = S(0)$

P8. $\exp(S(a)) = \exp(a) + \exp(a)$

P9. $a \le 0 \leftrightarrow a = 0$

P10. $a \le S(b) \leftrightarrow (a \le b \vee a = S(b))$

вместе со следующей *схемой аксиом индукции*, для всех арифметических формул $\varphi(x)$ (возможно, содержащих параметры, т.е. свободные переменные помимо x):

$$\mathsf{IA}: \qquad \varphi(0) \wedge \forall x\,(\varphi(x) \to \varphi(S(x))) \to \forall x \varphi(x).$$

Элементарная арифметика EA аксиоматизируется над P1-P10 схемой индукции для элементарных формул $\varphi(x)$.

Элементарная арифметика представляет собой достаточно слабый фрагмент PA. Хорошо известно, что, аналогично PA, EA имеет эквивалентную формулировку в языке арифметики без символа экспоненты. Теория $I\Delta_0$ задается в этом языке аксиомами P1–P6, P9, P10 вместе со схемой индукции для Δ_0-формул (т.е. ограниченных формул языка без exp). Известно, что график функции 2^x можно естественным образом определить некоторой Δ_0-формулой $\mathrm{Exp}(x,y)$ ([18], с. 299). Для этой формулы в $I\Delta_0$ выводимы аналоги аксиом P7, P8 и свойства функциональности и монотонности. Формула $\mathrm{Exp}(x,y)$ определяет интерпретацию EA в теории $I\Delta_0 + \mathsf{Exp}$, где Exp есть аксиома $\forall x \exists y \mathrm{Exp}(x,y)$, выражающая тотальность экспоненты ([18], с. 37). Фактически, EA дедуктивно эквивалентна консервативному дефинициальному расширению $I\Delta_0 + \mathsf{Exp}$ с помощью символа для функции exp. Нетрудно убедиться в том, что эта интерпретация сохраняет классы Σ_n и Π_n-формул при $n \ge 1$ по модулю выводимости в $I\Delta_0 + \mathsf{Exp}$. (Класс элементарных отношений, однако, строго шире, чем класс Δ_0-отношений. Элементарные отношения совпадают с доказуемо Δ_1-отношениями для теории $I\Delta_0 + \mathsf{Exp}$.)

В отличие от PA, $I\Delta_0 + \mathsf{Exp}$ и EA являются конечно аксиоматизируемыми теориями ([18], с. 366). Нетрудно убедиться, что EA аксиоматизируема формулами сложности Π_1 в арифметической иерархии, а $I\Delta_0 + \mathsf{Exp}$ имеет сложность аксиоматизации Π_2 (в языке без exp).

Элементарными (по Кальмару) функциями называются функции, которые могут быть получены из функций $Z(x) \equiv 0,\ S,\ +,\ \cdot,\ 2^x$, функции

$$x \dot{-} y := \begin{cases} 0, & \text{если } x \le y \\ x - y, & \text{иначе} \end{cases}$$

и проектирующих функций $I_i^n(x_1, \dots, x_n) = x_i$ с помощью операций композиции и ограниченной минимизации [32]:

$$\mu i \le z\ R(i, \vec{x}) := \begin{cases} y, & \text{если } y \le z \text{ и } R(y, \vec{x}) \wedge \forall i < y \neg R(i, \vec{x}) \\ 0, & \text{если } \forall i \le z \neg R(i, \vec{x}) \end{cases}$$

(Здесь R — предикат вида $g(i, \vec{x}) = 0$ для некоторой ранее определенной функции g.)

Класс элементарных функций обозначается $\mathcal{E}$ и совпадает с классом функций, вычислимых по Тьюрингу за мультиэкспоненциальное время (см. [4]). Класс $\mathcal{E}$ замкнут относительно операций ограниченного суммирования, ограниченного умножения и ограниченной примитивной рекурсии. Фактически, по модулю композиции и достаточно большого набора начальных функций каждая из этих операций эквивалентна ограниченной минимизации (см. [32], гл. 5).

Символы для всех элементарных функций могут быть естественным образом введены в консервативном дефинициальном расширении EA. В этом расширении любая ограниченная формула расширенного языка эквивалентна бескванторной. Более того, само это расширение можно аксиоматизировать множеством чисто универсальных (или бескванторных) формул. С другой стороны, всякая ограниченная формула расширенного языка эквивалентна ограниченной арифметической формуле, и то же самое относится к остальным классам арифметической иерархии. В частности, в дефинициальном расширении EA допустима индукция по ограниченным формулам расширенного языка. Таким образом, формулировки EA в стандартном и расширенном языках являются в сильном смысле эквивалентными, и мы часто будем их отождествлять. Вышеприведенные утверждения являются фольклорными; бескванторная формулировка EA приведена, например, в работе [30]. В более общей ситуации мы подробно рассматриваем аналоги этих утверждений в §5.2.

1.2 Арифметизация синтаксиса

Стандартная арифметизация синтаксиса теорий первого порядка, подробно развитая в работе Фефермана [14] для случая PA, или для случая примитивно рекурсивной арифметики в книге Сморинского [39], проходит и в элементарной арифметике без существенных изменений. Это связано с тем, что все необходимые для определения основных синтаксических понятий применения оператора примитивной рекурсии фактически являются мультиэкспоненциально ограниченными и тем самым допустимыми в EA (см. также [30]).

Формулы арифметического языка естественным образом отождествляются со словами в некотором конечном алфавите. В свою очередь, слова могут быть естественным взаимно однозначным образом отождествлены с натуральными числами, например с помощью преобразования их в двоичные слова и последующего двоичного декодирования. (Заметим, что последнее легко выражается в EA с помощью экспоненты и арифметических операций.) Таким образом мы фиксируем единое каноническое кодирование — или *гёделеву нумерацию* — всех выражений арифметического языка: переменных, термов, формул и т.д. Код или *гёделев номер* выражения τ обозначается $\ulcorner\tau\urcorner$. Нетрудно убедиться в том, что при таком кодировании естественные синтаксические отношения, такие как приведенные ниже, являются элементарными. Более того, их простейшие свойства, верифицируемые с помощью элементарной индукции, доказуемы в EA. Мы не будем приводить длинный список этих свойств, который можно найти, например, в работе [14].

$x \in St$	"x есть гёделев номер арифметического предложения"
$x \in \Pi_n$	"x есть гёделев номер Π_n-формулы"
$LogAx(x)$	"x есть гёделев номер логической аксиомы"
$EqAx(x)$	"x есть гёделев номер аксиомы равенства"
$MP(x,y,z)$	"формула z следует из формул x и y по правилу *modus ponens*"
$Gen(x,y)$	"формула y следует из формулы x по правилу обобщения"

Мы также фиксируем взаимно-однозначную элементарную функцию кодирования конечных последовательностей натуральных чисел. $\langle x_1,\dots,x_n\rangle$ означает код последовательности $x_1,\dots,x_n$ и является элементарной функцией $x_1,\dots,x_n$ при каждом фиксированном n. $(x)_i$ означает $i+1$-й элемент последовательности, кодируемой числом x, и является элементарной функцией аргументов x и i. $\langle\,\rangle$ означает код пустой последовательности. Следующие функции и отношения также элементарны и естественно представимы в EA:

$Seq(x)$	"x есть код последовательности"
$lh(x)$	длина последовательности x
$end(x)$	последний элемент последовательности x
$x * y$	конкатенация последовательностей x и y

Мы предполагаем, что кодирование последовательностей доказуемо монотонно в том смысле, что код последовательности увеличивается при её удлиннении или увеличении любого из элементов.

Теориями мы будем называть теории первого порядка с равенством. Как правило, если не оговорено противное, мы будем подразумевать, что теории сформулированы в арифметическом языке и содержат EA. Теория T называется *элементарно аксиоматизированной,* если множество гёделевых номеров ее (математических) аксиом элементарно, то есть определено некоторой ограниченной формулой $\mathsf{Ax}_T(x)$. Все обычные теории, такие как EA, PA и другие, встречающиеся в данной работе, являются элементарно аксиоматизированными. Более того, в силу известной леммы Крейга [14] всякая перечислимая теория имеет элементарную аксиоматизацию, и таким образом элементарная аксиоматизируемость не является существенно ограничительным условием. Теория T называется *корректной*, если все теоремы T истинны в стандартной модели арифметики. Теория T *Σ_n-корректна*, если все ее теоремы арифметической сложности Σ_n истинны в стандартной модели. Теории T и U называются дедуктивно эквивалентными, если у них одно и то же множество теорем (обозначается $T \equiv U$). Если T и U — элементарно аксиоматизированные теории, то через $T+U$ обозначается теория, аксиомы которой задаются формулой $\mathsf{Ax}_T(x) \vee \mathsf{Ax}_U(x)$.

С любой элементарно аксиоматизированной теорией T связывается предикат *"y кодирует вывод формулы x в теории T"*, задаваемый элементарной формулой $\mathsf{Prf}_T(y,x)$. Формула $\mathsf{Prf}_T(y,x)$ строится следующим образом, буквально следуя гильбертовскому определению вывода в логике первого порядка:

$$\begin{aligned}\mathsf{Prf}_T(y,x) \quad := \quad & Seq(y) \wedge end(y) = x \wedge \\ & \forall n < lh(y)\,[LogAx((y)_n) \vee EqAx((y)_n) \vee \mathsf{Ax}_T((y)_n) \\ & \qquad \vee \exists i,j < n\, MP((y)_i,(y)_j,(y)_n) \\ & \qquad \vee \exists i < n\, Gen((y)_i,(y)_n)].\end{aligned}$$

Другими словами, y кодирует последовательность формул, заканчивающуюся на x, такую что каждый элемент y является или логической аксиомой, или аксиомой равенства, или математической аксиомой T, или следует из предыдущих формул по правилам *modus ponens* или обобщения.

Гёделевская формула $\Box_T(x)$ доказуемости в T определяется как $\exists y\,\mathsf{Prf}_T(y,x)$. Мы используем следующие стандартные сокращения. Замкнутые термы вида $S(S(\ldots S(0)\ldots))$ (n раз) называются ***нумералами*** и обозначаются $\overline{n}$. Мы также опускаем черту в тех случаях, когда n невозможно спутать с переменной. Если φ — формула, мы пишем $\Box_T\varphi$ вместо $\Box_T(\ulcorner\varphi\urcorner)$. Символ $\bot$ означает логическую связку "ложь", а $\mathsf{Con}(T)$ есть формула непротиворечивости теории T, определяемая как $\neg\Box_T\bot$. Выражение $\ulcorner\sigma(\dot{x}_1,\ldots,\dot{x}_k)\urcorner$ означает естественный элементарный определимый терм для функции, сопоставляющей последовательности $n_1,\ldots,n_k$ гёделев номер $\ulcorner\sigma(\overline{n}_1,\ldots,\overline{n}_k)\urcorner$ результата подстановки нумералов $\overline{n}_1,\ldots,\overline{n}_k$ вместо переменных $x_1,\ldots,x_k$ в формулу σ. Мы также пишем $\Box_T\sigma(\dot{x}_1,\ldots,\dot{x}_n)$ вместо $\Box_T(\ulcorner\sigma(\dot{x}_1,\ldots,\dot{x}_n)\urcorner)$.

Предикат доказуемости удовлетворяет следующим свойствам, называемым *условиями Лёба*: для любых предложений φ,ψ

L1. $T \vdash \varphi \implies \mathsf{EA} \vdash \Box_T\varphi$

L2. $\mathsf{EA} \vdash \Box_T(\varphi \to \psi) \to (\Box_T\varphi \to \Box_T\psi)$

L3. $\mathsf{EA} \vdash \Box_T\varphi \to \Box_T\Box_T\varphi$

Аналогичные утверждения имеют место и для формул со свободными переменными.

L1°. $T \vdash \varphi(x) \implies \mathsf{EA} \vdash \Box_T\varphi(\dot{x})$

L2°. $\mathsf{EA} \vdash \Box_T(\varphi(\dot{x}) \to \psi(\dot{x})) \to (\Box_T\varphi(\dot{x}) \to \Box_T\psi(\dot{x}))$

L3°. $\mathsf{EA} \vdash \Box_T\varphi(\dot{x}) \to \Box_T\Box_T\varphi(\dot{x})$

L4°. $\mathsf{EA} \vdash \Box_T\forall x\varphi(x) \to \forall x\,\Box_T\varphi(\dot{x})$

Заметим, что L4° следует из L1° и L2° с помощью аксиомы $\forall x\varphi(x) \to \varphi(x)$. Свойства L3 и L3° следуют из более общего утверждения, известного как *доказуемая* Σ_1*-полнота* [18, 39].

Утверждение 1.1. *(i) Для любого Σ_1-предложения σ*

$$\mathsf{EA} \vdash \sigma \to \Box_T\sigma.$$

(ii) Для любой Σ_1-формулы $\sigma(x_1,\ldots,x_n)$, где все свободные переменные σ указаны явно,

$$\mathsf{EA} \vdash \sigma(x_1,\ldots,x_n) \to \Box_T\sigma(\dot{x}_1,\ldots,\dot{x}_n).$$

Возможность формализации Σ_1-полноты теории T в EA следует из наличия мультиэкспоненциальной оценки на размер EA-доказательства одной из формул $\varphi(\overline{n})$ или $\neg\varphi(\overline{n})$ в зависимости от n для любой элементарной формулы $\varphi(x)$ (см. [39] и [18], с. 175).

Для доказательства теорем Гёделя о неполноте и многих других результатов ключевую роль играет следующая арифметическая *лемма о неподвижной точке* [14, 39].

Утверждение 1.2. *(i) Для любой формулы $\varphi(x)$ найдется формула ψ, зависящая от свободных переменных φ кроме x, такая что*

$$\mathsf{EA} \vdash \psi \leftrightarrow \varphi(\ulcorner \psi \urcorner).$$

(ii) Для любой формулы $\varphi(x, x_1, \ldots, x_n)$ найдется формула $\psi(x_1, \ldots, x_n)$, такая что

$$\mathsf{EA} \vdash \psi(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \varphi(\ulcorner \psi(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n) \urcorner).$$

Следующее обобщение теоремы Гёделя было получено Лёбом [23]. Ввиду его важности для настоящей работы мы приводим короткое доказательство.

Утверждение 1.3 (Лёб). *Для любой элементарно аксиоматизированной теории T, содержащей EA, и любого предложения φ*

$$T \vdash \Box_T\varphi \to \varphi \iff T \vdash \varphi.$$

Доказательство. Импликация $(\Leftarrow)$ очевидна. Для доказательства противоположной импликации, с помощью леммы о неподвижной точке мы получаем предложение ψ такое, что

$$\mathsf{EA} \vdash \psi \leftrightarrow (\Box_T\psi \to \varphi).$$

Опираясь на условия Лёба и тот факт, что теория T содержит EA, мы последовательно выводим в T:

1. $\Box_T(\psi \to (\Box_T\psi \to \varphi))$
2. $\Box_T\psi \to \Box_T(\Box_T\psi \to \varphi)$
3. $\Box_T\psi \to (\Box_T\Box_T\psi \to \Box_T\varphi)$
4. $\Box_T\psi \to \Box_T\varphi$
5. $\Box_T\psi \to \varphi$, поскольку $T \vdash \Box_T\varphi \to \varphi$
6. ψ
7. $\Box_T\psi$
8. φ, q.e.d.

Подставляя $\bot$ вместо φ, как следствие получаем вторую теорему Гёделя о неполноте.

Следствие 1.4 (Гёдель). *Для любой элементарно аксиоматизированной теории T, содержащей EA,*

(i) если T непротиворечива, то $T \nvdash \mathsf{Con}(T)$;

(ii) если, кроме того, T Σ_1-корректна, то $T \nvdash \neg\mathsf{Con}(T)$.

Замечание 1.5. Теорема Лёба может в свою очередь рассматриваться как следствие второй теоремы Гёделя для теории $T + \neg\varphi$ при условии, что аксиомы этой теории определены формулой $\mathsf{Ax}_{T+\neg\varphi}(x) := \mathsf{Ax}_T(x) \vee x = \ulcorner\neg\varphi\urcorner$. Для соответствующего предиката доказуемости имеем

$$\mathsf{EA} \vdash \mathsf{Con}(T + \neg\varphi) \leftrightarrow \neg\Box_T\varphi,$$

в силу формализуемости теоремы о дедукции в EA (см. [14]).

Следующее утверждение представляет собой формализацию теоремы Лёба и может быть выведено с помощью условий Лёба из неформализованного варианта этой теоремы (см. [12]).

Утверждение 1.6. *Для любого предложения φ,*

$$\mathsf{EA} \vdash \Box_T(\Box_T\varphi \to \varphi) \to \Box_T\varphi.$$

Доказательство. Обозначим формулу $\Box_T(\Box_T\varphi \to \varphi) \to \Box_T\varphi$ через ψ. Опираясь на условия Лёба, нетрудно вывести, что

$$\mathsf{EA} \vdash \Box_T\psi \to \psi. \tag{1}$$

Отсюда, по утверждению 1.3, $T \vdash \psi$, а значит $\mathsf{EA} \vdash \Box_T\psi$ и $\mathsf{EA} \vdash \psi$ в силу (1), q.e.d.

1.3 Логика доказуемости

Базисная *логика доказуемости* **GL** формулируется в языке пропозициональной логики высказываний, обогащенном унарной связкой модальности $\Box$. Выражения $\Diamond\varphi$, $\Box^+\varphi$ и $\Box^n\varphi$ суть сокращения для $\neg\Box\neg\varphi$, $\varphi \wedge \Box\varphi$ и $\Box\Box\ldots\Box\varphi$ (n раз), соответственно. Аксиомами **GL** являются все частные случаи тавтологий в описанном языке вместе со следующими схемами:

A1. $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$;

A2. $\Box\varphi \to \Box\Box\varphi$;

A3. $\Box(\Box\varphi \to \varphi) \to \Box\varphi$.

Правилами вывода **GL** являются *moduls ponens* и $\varphi \vdash \Box\varphi$ (*усиление*).

Арифметической реализацией языка **GL** мы называем любую функцию $(\cdot)^*$, отображающую пропозициональные переменные во множество арифметических предложений. Для всякой модальной формулы φ $(\varphi)^*_T$ означает результат подстановки вместо пропозициональных переменных φ соответствующих арифметических предложений и расшифровки $\Box$ как формулы доказуемости $\Box_T$:

$$\begin{aligned}(\varphi \to \psi)^*_T &:= ((\varphi)^*_T \to (\psi)^*_T)\\ (\neg\varphi)^*_T &:= \neg(\varphi)^*_T\\ (\Box\varphi)^*_T &:= \Box_T(\varphi)^*_T\end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что при этой интерпретации аксиомы A1, A2 и правило усиления соответствуют трем условиям Лёба, а аксиома A3 есть формализация теоремы Лёба (см. утверждение 1.6). Отсюда следует, что для любой модальной формулы φ $\mathbf{GL} \vdash \varphi$ влечет $\mathsf{EA} \vdash (\varphi)^*_T$ для любой арифметической реализации $(\cdot)^*$ переменных φ. Противоположная импликация для случая Σ_1-корректной теории T также верна. Это утверждение составляет содержание известной теоремы Р. Соловея об *арифметической полноте* **GL** (см. [12]).

Моделью Крипке для **GL** называется тройка $(W, R, \Vdash)$, где

1. W есть непустое конечное множество;

2. R есть отношение иррефлексивного частичного порядка на W;

3. $\Vdash$ есть отношение вынуждения между элементами W (*мирами*) и модальными формулами такое, что

$$\begin{array}{rcl} x \Vdash \neg\varphi & \iff & x \nVdash \varphi, \\ x \Vdash (\varphi \to \psi) & \iff & (x \nVdash \varphi \text{ или } x \Vdash \psi), \\ x \Vdash \Box\varphi & \iff & \forall y \in W\ (xRy \Rightarrow y \Vdash \varphi). \end{array}$$

Теорема 4 на стр. 95 монографии [12], принадлежащая К. Сегербергу, утверждает, что модальная формула является доказуемой в **GL**, если и только если она вынуждается в любом мире любой модели Крипке описанного выше типа. Это дает полезный критерий проверки модальных формул на выводимость в **GL**.

Отметим, что приложения логики доказуемости в настоящей работе опираются на полноту **GL** относительно класса конечных иррефлексивных транзитивных моделей Крипке. Однако они используют лишь *корректность* **GL** относительно арифметической интерпретации, то есть не опираются на теорему Соловея.

2 Общие свойства схем рефлексии

2.1 Схемы рефлексии

Схемы рефлексии для элементарно аксиоматизированной теории T формально выражают корректность T, то есть утверждение о том, что всякое предложение, доказуемое в T, истинно. Две основных формы схемы рефлексии суть:

- *Локальная* схема рефлексии $\mathsf{Rfn}(T)$:

$$\Box_T\varphi \to \varphi,$$

  для всех арифметических предложений φ;

- *Равномерная* схема рефлексии $\mathsf{RFN}(T)$:

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \, (\Box_T\varphi(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n) \to \varphi(x_1, \ldots, x_n)),$$

  для всех арифметических формул $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$.

Очевидно, для любой теории T

$$\mathsf{EA} + \mathsf{RFN}(T) \vdash \mathsf{Rfn}(T) \quad \text{и} \quad \mathsf{EA} + \mathsf{Rfn}(T) \vdash \mathsf{Con}(T).$$

Значит, по теореме Гёделя, ни одна из двух схем рефлексии не выводима в T при условии непротиворечивости T. Теорема Лёба говорит о том, что, фактически, ни один нетривиальный частный случай локальной и, тем более, равномерной схемы рефлексии не является выводимым в T.

Другие естественные формы принципа рефлексии, как правило, сводятся к одной из двух основных форм. Например, функция кодирования последовательностей позволяет свернуть несколько свободных переменных в одну, и таким образом схема

$$\forall x \, (\Box_T\varphi(\dot{x}) \to \varphi(x))$$

для формул $\varphi(x)$ с единственной свободной переменной x эквивалентна $\mathsf{RFN}(T)$ над EA. Феферман [15] показал, что следующие два принципа также являются эквивалентными равномерной схеме рефлексии:

(a) $\forall x \Box_T\varphi(\dot{x}) \to \forall x\varphi(x)$;

(b) $\dfrac{\forall x \Box_T\varphi(\dot{x})}{\forall x\varphi(x)}$ *(правило Клини).*

Заметим, что, в отличие от (b), правило локальной рефлексии, т.е. правило $\dfrac{\Box_T\varphi}{\varphi}$ для *предложений* φ, является допустимым в T при условии Σ_1-корректности T.

Нам будет полезна следующая лемма [15], называемая иногда “малым принципом рефлексии", поскольку она утверждает доказуемость схемы рефлексии для “стандартных"или “малых"выводов.

Лемма 2.1. *(i) Для любой формулы $\varphi(x)$ и любых $m, n \in \mathbf{N}$*

$$T \vdash \mathsf{Prf}_T(\overline{m}, \ulcorner\varphi(\overline{n})\urcorner) \to \varphi(\overline{n}).$$

(ii) Утверждение (i) формализуемо в EA*, то есть*

$$\mathsf{EA} \vdash \forall x, y \, \Box_T(\mathsf{Prf}_T(\dot{y}, \ulcorner\varphi(\dot{x})\urcorner) \to \varphi(\dot{x})).$$

Доказательство. Достаточно доказать (ii). С одной стороны,

$$\begin{aligned}\mathsf{EA} \vdash \mathsf{Prf}_T(y, \ulcorner\varphi(\dot{x})\urcorner) &\to \Box_T\varphi(\dot{x}) \\ &\to \Box_T(\mathsf{Prf}_T(\dot{y}, \ulcorner\varphi(\dot{x})\urcorner) \to \varphi(\dot{x})).\end{aligned}$$

С другой стороны, по доказуемой Σ_1-полноте

$$\begin{aligned}\mathsf{EA} \vdash \neg\mathsf{Prf}_T(y, \ulcorner\varphi(\dot{x})\urcorner) &\to \Box_T\neg\mathsf{Prf}_T(\dot{y}, \ulcorner\varphi(\dot{x})\urcorner) \\ &\to \Box_T(\mathsf{Prf}_T(\dot{y}, \ulcorner\varphi(\dot{x})\urcorner) \to \varphi(\dot{x})).\end{aligned}$$

Комбинируя вместе эти две формулы, получаем требуемое, q.e.d.

Заметим, что применяя правило Клини (b) к доказуемой формуле из части (ii) предыдущей леммы, мы получаем вывод соответствующего частного случая схемы $\mathsf{RFN}(T)$. Отсюда следует эквивалентность $\mathsf{RFN}(T)$ и принципов (a) и (b).

Схемы *частичной* рефлексии получаются из локальной и равномерной схем наложением ограничения, состоящего в том, что формула φ пробегает лишь некоторый подкласс Γ класса всех арифметических предложений (формул). Такие схемы обозначаются $\mathsf{Rfn}_\Gamma(T)$ и $\mathsf{RFN}_\Gamma(T)$, соответственно, а в качестве Γ обычно рассматривается один из классов Σ_n или Π_n арифметической иерархии.

Лемма 2.2. *Следующие схемы дедуктивно эквивалентны над* EA *для любого* $n \geq 1$*:*

(i) $\mathsf{RFN}_{\Sigma_n}(T) \equiv \mathsf{RFN}_{\Pi_{n+1}}(T)$*;*

(ii) $\mathsf{RFN}_{\Pi_1}(T) \equiv \mathsf{Rfn}_{\Pi_1}(T) \equiv \mathsf{Con}(T)$.

Доказательство. (i) Рассмотрим Π_{n+1}-формулу $\forall y \varphi(y, x)$, где $\varphi(y, x) \in \Sigma_n$. Тогда в $\mathsf{EA} + \mathsf{RFN}_{\Sigma_n}(T)$ можно, пользуясь свойством L4°, вывести

$$\begin{aligned}\vdash \Box_T\forall y \varphi(y, \dot{x}) &\to \forall y \Box_T\varphi(\dot{y}, \dot{x}) \\ &\to \forall y \varphi(y, x).\end{aligned}$$

(ii) Для формулы $\varphi(x) \in \Pi_1$, используя доказуемую Σ_1-полноту, выводим в EA:

$$\begin{aligned}\vdash \Box_T\varphi(\dot{x}) \wedge \neg\varphi(x) &\to \Box_T\neg\varphi(\dot{x}) \\ &\to \Box_T(\varphi(\dot{x}) \wedge \neg\varphi(\dot{x})) \\ &\to \Box_T\bot.\end{aligned}$$

Следовательно, $\neg\Box_T\bot$ влечет $\Box_T\varphi(\dot{x}) \to \varphi(x)$, q.e.d.

Замечание 2.3. Для $n \geq 1$ арифметическая сложность всех примеров схемы $\mathsf{RFN}_{\Pi_n}(T)$ есть Π_n.

Как хорошо известно, классы Σ_n- и Π_n-формул имеют определения истинности в теории EA [39, 18].

Утверждение 2.4. *Для любого* $n \geq 1$ *существует арифметическая* Π_n*-формула* $\mathsf{True}_{\Pi_n}(x)$ *такая, что для всех* Π_n*-формул* $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$

$$\mathsf{EA} \vdash \varphi(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \mathsf{True}_{\Pi_n}(\ulcorner\varphi(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)\urcorner).$$

Аналогично для классов Σ_n.

Формула $\mathsf{True}_{\Pi_n}(x)$ называется *определением истинности* для Π_n-формул в EA. В дальнейшем, говоря о классах арифметической иерархии, мы будем неявно предполагать $n \geq 1$. Определения истинности позволяют дать важную альтернативную формулировку схем частичной рефлексии.

Лемма 2.5. *Над* EA *схема* $\mathsf{RFN}_{\Pi_n}(T)$ *эквивалентна её универсальному частному случаю*

$$\forall z\, (\Box_T \mathsf{True}_{\Pi_n}(\dot{z}) \to \mathsf{True}_{\Pi_n}(z)). \qquad (*)$$

Аналогичное утверждение имеет место для класса Σ_n*.*

Доказательство. Для вывода $\mathsf{RFN}_{\Pi_n}(T)$ из формулы $(*)$ заметим, что утверждение 2.4 влечет

$$\mathsf{EA} \vdash \forall x_1 \dots \forall x_n\, \Box_T(\varphi(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) \leftrightarrow \mathsf{True}_{\Pi_n}(\ulcorner \varphi(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) \urcorner)),$$

и, следовательно, можно вывести

$$\begin{array}{lll} \vdash \Box_T \varphi(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) & \to & \Box_T \mathsf{True}_{\Pi_n}(\ulcorner \varphi(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) \urcorner) \\ & \to & \mathsf{True}_{\Pi_n}(\ulcorner \varphi(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) \urcorner), \quad \text{из } (*) \text{ с } z = \ulcorner \varphi(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) \urcorner \\ & \to & \varphi(x_1, \dots, x_n), \qquad \text{q.e.d.} \end{array}$$

Следствие 2.6. *Схемы* $\mathsf{RFN}_{\Pi_n}(T)$ *и* $\mathsf{RFN}_{\Sigma_n}(T)$ *для* $n \geq 1$ *конечно аксиоматизируемы над* EA.

2.2 Теоремы о неограниченности

Многие приложения схем рефлексии для анализа формальных теорий основываются на так называемых *теоремах о неограниченности,* принадлежащих Крайзелю и Леви.

Говорят, что теория U есть *конечное расширение* теории T, если она аксиоматизируема над T конечным числом предложений. U называется *расширением T арифметической сложности* Γ или Γ-*расширением* T, если U аксиоматизируема над T множеством предложений из класса Γ. В качестве Γ обычно рассматривается один из классов арифметической иерархии. (Заметим, что, в принципе, множество гёделевых номеров аксиом U может не быть перечислимым или даже арифметическим. Речь идет о сложности формул, аксиоматизирующих U.) Теория U называется Γ-консервативной над T, если для любого предложения $\varphi \in \Gamma$ $\ U \vdash \varphi$ влечет $T \vdash \varphi$ (обозначение $U \subseteq_\Gamma T$).

Предложение 2.7. *Пусть T — элементарно аксиоматизированная теория.*

(i) $\mathsf{Rfn}_{\Pi_n}(T)$ *не содержится ни в одном непротиворечивом конечном расширении T сложности Σ_n (и двойственно для* Rfn_{Σ_n}*).*

(ii) $\mathsf{RFN}_{\Pi_n}(T)$ *не содержится ни в одном непротиворечивом расширении T сложности Σ_n.*

Доказательство. (i) Допустим $T + \varphi \vdash \mathsf{Rfn}_{\Pi_n}(T)$, где $\varphi \in \Sigma_n$. Тогда, в частности,

$$T + \varphi \vdash \Box_T \neg\varphi \to \neg\varphi.$$

Поэтому

$$\begin{array}{lll} T & \vdash & \varphi \to (\Box_T \neg\varphi \to \neg\varphi), \\ & \vdash & \Box_T \neg\varphi \to \neg\varphi. \end{array}$$

Отсюда по теореме Лёба $T \vdash \neg\varphi$, то есть теория $T + \varphi$ противвречива.

(ii) Допустим, что U — расширение T сложности Σ_n, такое что $U \vdash \mathsf{RFN}_{\Pi_n}(T)$. Поскольку схема $\mathsf{RFN}_{\Pi_n}(T)$ конечно аксиоматизируема, существует конечная подтеория $U_0 \subseteq U$, такая что $U_0 \vdash \mathsf{RFN}_{\Pi_n}(T)$. Но тогда U_0 также содержит $\mathsf{Rfn}_{\Pi_n}(T)$, и в силу (i) $T + U_0$ является противоречивой. Следовательно, такова и теория U, q.e.d.

Следствие 2.8. *Пусть T — элементарно аксиоматизированная теория.*

(i) $\mathsf{Rfn}(T)$ *не содержится ни в одном конечном непротиворечивом расширении T.*

(ii) $\mathsf{RFN}(T)$ *не содержится ни в одном расширении T ограниченной арифметической сложности.*

Пример 2.9. Согласно теореме Крайзеля–Леви, арифметика Пеано PA доказывает $\mathsf{RFN}(\mathsf{EA})$. Следовательно, PA не только не является конечно аксиоматизируемой теорией, но и не содержится ни в каком расширении EA ограниченной арифметической сложности.

Следствие 2.10. *Если теория T Σ_1-корректна, то*

$$T + \mathsf{Rfn}(T) \nvdash \mathsf{RFN}(T).$$

Доказательство. Пусть U — расширение T множеством всех истинных Π_1 предложений. (Теория U неперечислима, но является Π_1-расширением T.) Поскольку T не доказывает ложных Σ_1-предложений, U непротиворечива. По предыдущему следствию $U \nvdash \mathsf{RFN}(T)$. С другой стороны, $U \vdash \mathsf{Rfn}(T)$, поскольку

$$\begin{array}{rcll} T \vdash \varphi & \Rightarrow & T \vdash \Box_T\varphi \to \varphi, & \text{и} \\ T \nvdash \varphi & \Rightarrow & \mathbf{N} \models \neg\Box_T\varphi \ \Rightarrow & \\ U \vdash \neg\Box_T\varphi & \Rightarrow & U \vdash \Box_T\varphi \to \varphi, & \quad \text{q.e.d.} \end{array}$$

Замечание 2.11. Условие Σ_1-корректности в этом известном утверждении может быть ослаблено, однако это требует более глубоких соображений (см. следствие 2.28 ниже).

Часть (i) теоремы 2.7 и следствия 2.8 имеет важное усиление. Слово “конечное"в них может быть заменено на “рекурсивно перечислимое". Это вытекает из следующего результата.

Лемма 2.12. *Пусть U — непротиворечивое перечислимое расширение T сложности Σ_n. Тогда найдется Σ_n-предложение φ такое, что $T + \varphi$ непротиворечива и содержит U. (Двойственно для Π_n-аксиоматизированных расширений.)*

Доказательство. Для теорий, содержащих PA, результат вытекает непосредственно из теоремы 4 работы Линдстрема [22]. Однако, для более слабых теорий требуется модификация этой конструкции, которую мы приводим ниже.

По лемме Крейга можно считать, что множество гёделевых номеров Σ_n-аксиом теории U над T задается некоторой элементарной формулой $\mathsf{Ax}_U(x)$. Кроме того, определение истинности для Σ_n-формул имеет вид

$$\mathsf{EA} \vdash \mathsf{True}_{\Sigma_n}(x) \leftrightarrow \exists z\, \mathsf{Wit}_{\Sigma_n}(z, x),$$

для некоторой формулы $\mathsf{Wit}_{\Sigma_n}(z,x) \in \Pi_{n-1}$. Рассмотрим неподвижную точку φ такую, что

$$\mathsf{EA} \vdash \varphi \leftrightarrow \exists x \exists z\, (\forall y \leq x\, (\mathsf{Ax}_U(y) \to \mathsf{Wit}_{\Sigma_n}((z)_y, y)) \wedge \mathsf{Prf}_T(x, \ulcorner \neg\varphi \urcorner)).$$

Мы утверждаем, что φ удовлетворяет условиям леммы.

1) Теория $T + \varphi$ непротиворечива. Действительно, в противном случае найдется число m такое, что

$$\mathsf{EA} \vdash \mathsf{Prf}_T(\overline{m}, \ulcorner \neg\varphi \urcorner).$$

С другой стороны, для каждой аксиомы $\sigma \in \Sigma_n$ теории U такой, что $\ulcorner\sigma\urcorner = y \leq m$ мы имеем $U \vdash \exists z_y\, \mathsf{Wit}_{\Sigma_n}(z_y, \overline{y})$. Поскольку для данного m таких формул σ существует лишь конечное число, все соответствующие z_y можно собрать в одну последовательность $z := \langle z_0, \ldots, z_m \rangle$, где $z_y := 0$ для чисел y, не являющихся кодами аксиом U. Таким образом,

$$U \vdash \exists z \bigwedge\nolimits_{y \leq m, y \in \mathrm{Ax}_U} \mathsf{Wit}_{\Sigma_n}((z)_{\overline{y}}, \overline{y})),$$

откуда вытекает, что

$$U \vdash \exists z \forall y \leq \overline{m}\, (\mathsf{Ax}_U(y) \to \mathsf{Wit}_{\Sigma_n}((z)_y, y)).$$

Следовательно, $U \vdash \varphi$ и $U \vdash \bot$, поскольку по нашему предположению теория $T + \varphi$ противоречива.

2) $T + \varphi$ содержит U. Рассмотрим любую формулу $\sigma \in \mathsf{Ax}_U$, $\ulcorner\sigma\urcorner = m$. Прежде всего заметим, что по малому принципу рефлексии

$$T + \varphi \vdash \forall x \leq \overline{m}\, \neg\mathsf{Prf}_T(x, \ulcorner \neg\varphi \urcorner).$$

Отсюда, рассуждая в теории $T + \varphi$, выводим:

$$\begin{aligned} \vdash \forall y \leq x\, (\mathsf{Ax}_U(x) \to \mathsf{Wit}_{\Sigma_n}((z)_y, y)) \wedge \mathsf{Prf}_T(x, \ulcorner \neg\varphi \urcorner) \quad &\to \quad \overline{m} \leq x \wedge \mathsf{Ax}_U(\overline{m}) \\ &\to \quad \mathsf{Wit}_{\Sigma_n}((z)_{\overline{m}}, \overline{m}) \\ &\to \quad \mathsf{True}_{\Sigma_n}(\overline{m}) \\ &\to \quad \sigma. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $T + \varphi \vdash \sigma$, q.e.d.

Следствие 2.13. *(i)* $\mathsf{Rfn}_{\Pi_n}(T)$ *не содержится ни в одном непротиворечивом перечислимом расширении* T *сложности* Σ_n *(и двойственно для* $\mathsf{Rfn}_{\Sigma_n}(T)$*).*

(ii) $\mathsf{Rfn}(T)$ *не содержится ни в одном непротиворечивом перечислимом расширении* T *ограниченной арифметической сложности.*

2.3 Иерархии схем частичной рефлексии

В этом параграфе мы рассматриваем подробно иерархии схем частичной рефлексии. Мы показываем, что свойства схем локальной рефлексии контрастируют с хорошо известными свойствами схем частичной равномерной рефлексии. Из §2.1 известны следующие факты.

1) Схемы частичной равномерной рефлексии для фиксированной элементарно аксиоматизированной теории T составляют линейно упорядоченную по включению иерархию (см. рис. 1).

2) За исключением полной равномерной схемы рефлексии $\mathsf{RFN}(T)$ все схемы в этой иерархии конечно аксиоматизируемы (следствие 2.6).

Следующая лемма показывает, что в определенном смысле схема $\mathsf{RFN}_{\Pi_{n+1}}(T)$ много сильнее $\mathsf{RFN}_{\Pi_n}(T)$.

Лемма 2.14. *Для любого конечного Σ_n-расширения U теории T схема $\mathsf{RFN}_{\Pi_n}(T)$ дедуктивно эквивалентна $\mathsf{RFN}_{\Pi_n}(U)$ над U. В частности, в $T + \mathsf{RFN}_{\Pi_{n+1}}(T)$ доказуемо $\mathsf{Con}(T + \mathsf{RFN}_{\Pi_n}(T))$.*

Доказательство. Достаточно вывести $\mathsf{RFN}_{\Pi_n}(U)$ в $U + \mathsf{RFN}_{\Pi_n}(T)$. С использованием формализованной теоремы о дедукции, для любой Π_n-формулы $\varphi(x)$ в $\mathsf{EA} + \mathsf{RFN}_{\Pi_n}(T)$ выводимо:

$$\begin{aligned} \vdash \Box_U \varphi(\dot{x}) \quad &\to \quad \Box_T(\psi \to \varphi(\dot{x})) \\ &\to \quad (\psi \to \varphi(x)), \end{aligned}$$

где ψ означает конъюнкцию всех Σ_n-аксиом теории U. Поскольку ψ выводима в U, получаем

$$U + \mathsf{RFN}_{\Pi_n}(T) \vdash \Box_U \varphi(\dot{x}) \to \varphi(x),$$

q.e.d.

Следствие 2.15. *При условии непротиворечивости $T + \mathsf{RFN}_{\Pi_n}(T)$ (в частности, если теория T Π_n-корректна) в этой теории не выводима схема $\mathsf{RFN}_{\Pi_{n+1}}(T)$.*

Таким образом, иерархия схем частичной равномерной рефлексии не вырождается (все теории иерархии различны), если и только если теория $T+\mathsf{RFN}(T)$ непротиворечива. Более того, в случае, когда иерархия невырождена, ни одно из расширений на любом уровне иерархии не является консервативным даже для Π_1-предложений.

Для иерархии схем частичной локальной рефлексии картина существенно меняется. Во-первых, имеет место следующее утверждение.

Предложение 2.16. *Все схемы $\mathsf{Rfn}_{\Sigma_n}(T)$ и $\mathsf{Rfn}_{\Pi_n}(T)$ попарно неэквивалентны при условии непротиворечивости теории $T + \mathsf{Rfn}(T)$. В частности, $\mathsf{Rfn}_{\Sigma_n}(T)$ строго включена в $\mathsf{Rfn}_{\Pi_{n+1}}(T)$, и ни одна из схем $\mathsf{Rfn}_{\Sigma_n}(T)$ и $\mathsf{Rfn}_{\Pi_n}(T)$ не влечет другую для любого $n > 1$ (см. рис. 1).*

Доказательство. Поскольку в силу первой части теоремы 2.7 схема $\mathsf{Rfn}_{\Pi_1}(T)$, эквивалентная Π_1-предложению $\mathsf{Con}(T)$, строго слабее $\mathsf{Rfn}_{\Sigma_1}(T)$, нам будет достаточно установить лишь второе утверждение леммы.

Заметим, что для $n > 1$ $\mathsf{Rfn}_{\Sigma_n}(T)$ есть перечислимое, и даже элементарное, множество Σ_n-предложений. Таким образом, по следствию 2.13,

$$T + \mathsf{Rfn}_{\Sigma_n}(T) \nvdash \mathsf{Rfn}_{\Pi_n}(T).$$

Утверждение о том, что

$$T + \mathsf{Rfn}_{\Pi_n}(T) \nvdash \mathsf{Rfn}_{\Sigma_n}(T),$$

доказывается симметричным образом, q.e.d.

Пусть $\mathcal{B}(\Sigma_n)$ обозначает множество всех булевых комбинаций Σ_n-предложений. Мы имеем следующее полезное утверждение.

Лемма 2.17. *Над EA схема $\mathsf{Rfn}_{\Sigma_1}(T)$ эквивалентна $\mathsf{Rfn}_{\mathcal{B}(\Sigma_1)}(T)$.*

Доказательство. Докажем, что

$$\mathsf{EA} + \mathsf{Rfn}_{\Sigma_1}(T) \vdash \Box_T \varphi \to \varphi$$

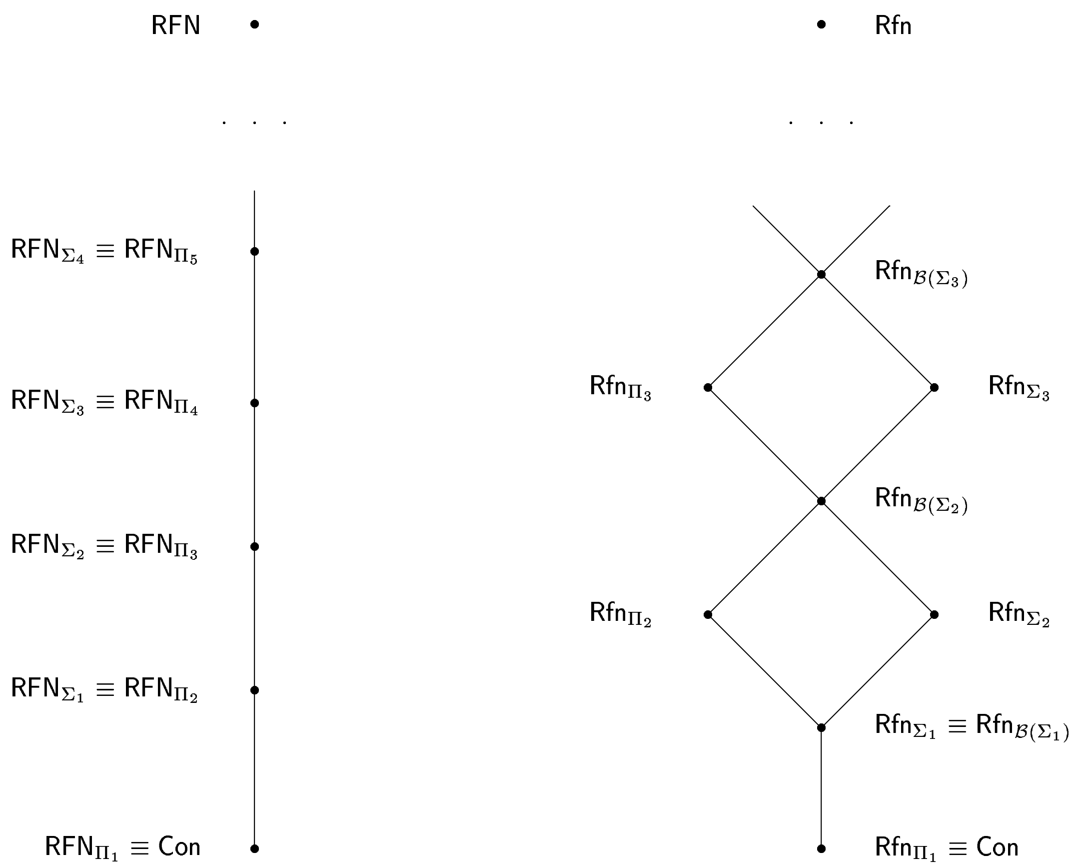

Рис. 1: Иерархии схем частичной рефлексии.

для любой булевой комбинации Σ_1-предложений φ. Формула φ логически эквивалентна формуле вида $\bigwedge_{i=1}^{n}(\pi_i \vee \sigma_i)$, для некоторых предложений $\pi_i \in \Pi_1$ и $\sigma_i \in \Sigma_1$. Поскольку предикат доказуемости $\Box_T$ коммутирует с конъюнкцией, достаточно вывести в $\mathsf{EA} + \mathsf{Rfn}_{\Sigma_1}(T)$ формулы

$$\Box_T(\pi_i \vee \sigma_i) \to (\pi_i \vee \sigma_i),$$

для любого i. Опираясь на доказуемую Σ_1-полноту и условия Лёба, получаем

$$\begin{aligned} \vdash \Box_T(\pi_i \vee \sigma_i) \wedge \neg\pi_i \quad &\to \quad \Box_T \neg\pi_i \\ &\to \quad \Box_T \sigma_i \\ &\to \quad \sigma_i, \end{aligned}$$

используя $\mathsf{Rfn}_{\Sigma_1}(T)$. Отсюда

$$\mathsf{EA} + \mathsf{Rfn}_{\Sigma_1}(T) \vdash \Box_T(\pi_i \vee \sigma_i) \to (\pi_i \vee \sigma_i),$$

q.e.d.

Отметим, что в силу предложения 2.16 прямое обобщение этого утверждения на классы Σ_n при $n > 1$ не имеет места. (Некоторое разумное обобщение, использующее релятивизированные схемы рефлексии, приведено в разделе 6.)

Далее, для схем локальной рефлексии мы имеем следующие результаты.

1) Ни одна из схем $\mathsf{Rfn}_{\Sigma_n}(T)$ и $\mathsf{Rfn}_{\Pi_{n+1}}(T)$ для $n \geq 1$ не является конечно аксиоматизируемой над T. (Единственным исключением является схема $\mathsf{Rfn}_{\Pi_1}(T)$, которая эквивалентна $\mathsf{Con}(T)$.)

2) Все схемы локальной рефлексии, за очевидным исключением $\mathsf{Rfn}_{\Pi_1}(T)$, являются Π_1-консервативными друг над другом, то есть доказывают одни и те же Π_1-предложения. В частности, в теории $T + \mathsf{Rfn}_{\Pi_{n+1}}(T)$ не выводима непротиворечивость $T + \mathsf{Rfn}_{\Pi_n}(T)$ для $n > 1$ [3].

3) Имеет место более сильное утверждение [50]: полная схема локальной рефлексии $\mathsf{Rfn}(T)$ Π_n- (соотв., Σ_n-) консервативна над $T + \mathsf{Rfn}_{\Pi_n}(T)$ (соотв., $T + \mathsf{Rfn}_{\Sigma_n}(T)$). Этот результат о консервативности оптимален относительно арифметической сложности в том смысле, что схемы можно различить уже на уровне Σ_n- (соотв., Π_n) предложений.

Несмотря на их базисный характер, все эти результаты были получены сравнительно недавно. Их доказательства представляют собой красивое применение техники логики доказуемости. Первый результат этого типа был найден Булосом [11] и Артёмовым [1, 2], которые независимо показали, что n-кратно итерированная формула непротиворечивости для корректной теории T не может быть выведена из менее чем n частных случаев локальной схемы рефлексии. Мы получим этот и другие результаты с помощью единой более общей конструкции, найденной в [50].

Лемма 2.18. *Определим модальные формулы Q_i следующим образом:*

$$Q_1 := p, \qquad Q_{i+1} := Q_i \vee \Box Q_i,$$

где p — пропозициональная переменная. Тогда, для любых переменных $p_1, \ldots, p_m$,

$$\mathbf{GL} \vdash \Box^+\left(\bigwedge_{i=1}^{m}(\Box p_i \to p_i) \to p\right) \to \left(\bigwedge_{i=1}^{m}(\Box Q_i \to Q_i) \to p\right). \qquad (*)$$

Доказательство. Не предъявляя явно доказательства формулы $(*)$, мы установим её выводимость в $\mathbf{GL}$, опираясь на стандартную семантику Крипке логики $\mathbf{GL}$.

Рассмотрим любую модель Крипке $(W, R, \Vdash)$, в которой заключение $(\bigwedge_{i=1}^{m}(\Box Q_i \to Q_i) \to p)$ ложно в некотором мире $x \in W$. Это означает, что $x \nVdash p$ и $x \Vdash \Box Q_i \to Q_i$ для каждого $i \leq m$. С помощью очевидной индукции по i нетрудно установить, что $x \nVdash Q_i$ для всех $i \leq m+1$, в частности, $x \nVdash Q_{m+1}$.

Отсюда, расшифровывая определение Q_{m+1}, мы видим, что в W найдется последовательность миров

$$x = x_{m+1} R x_m R \ldots R x_1,$$

такая что $x_i \nVdash Q_i$ для всех $i \leq m+1$. Поскольку отношение R иррефлексивно и транзитивно, все x_i попарно различны. Кроме того, индукцией по i нетрудно убедиться, что для всех i

$$\mathbf{GL} \vdash p \to Q_i.$$

Значит, $x_i \nVdash p$ для любого $i \leq m+1$.

Заметим теперь, что для любого i формула $\Box p_i \to p_i$ может быть ложной не более чем в одном элементе линейной цепи $x_{m+1}, \ldots, x_1$. Отсюда, по принципу Дирихле, среди $m+1$ мира x_i найдется мир z, такой что

$$z \Vdash \bigwedge_{i=1}^{m}(\Box p_i \to p_i) \wedge \neg p.$$

В случае, если z совпадает с $x = x_{m+1}$, мы имеем

$$x \nVdash \bigwedge_{i=1}^{m}(\Box p_i \to p_i) \to p.$$

В случае, когда $z = x_i$ для некоторого $i \leq m$, мы имеем xRz по транзитивности R, и таким образом

$$x \nVdash \Box(\bigwedge_{i=1}^{m}(\Box p_i \to p_i) \to p).$$

Это показывает, что формула $(*)$ вынуждается в любом мире любой модели Крипке; следовательно она выводима в $\mathbf{GL}$, q.e.d.

Следствие 2.19. $\mathbf{GL} \vdash \Box^{+}\neg\bigwedge_{i=1}^{m}(\Box p_i \to p_i) \to \Box^m \bot$.

Доказательство. Подставляя в $(*)$ формулу $\bot$ вместо p, получаем

$$\mathbf{GL} \vdash Q_i(p/\bot) \leftrightarrow \Box^{i-1}\bot,$$

а значит

$$\mathbf{GL} \vdash \bigwedge_{i=1}^{m}(\Box Q_i(p/\bot) \to Q_i(p/\bot)) \leftrightarrow \neg\Box^m\bot,$$

q.e.d.

Прогрессия теорий, основанная на *итерации формулы непротиворечивости*, определяется следующим образом.

$$T_0 := T, \quad T_{n+1} := T_n + \mathsf{Con}(T_n), \quad T_\omega := \bigcup_{n \geq 0} T_n.$$

Лемма 2.20. $\mathsf{EA} \vdash \mathsf{Con}(T_n) \leftrightarrow \neg\Box_T^{n+1}\bot$.

Доказательство. Индукция по n с использованием условий Лёба, q.e.d.

Формула $\mathsf{Con}(T_n)$ называется *n-кратно итерированной формулой непротиворечивости* теории T. Если T — Σ_1-корректная теория, то по теореме Гёделя T_n образуют строго возрастающую последовательность Σ_1-корректных расширений T.

Следующее утверждение получено в [11, 2].

Предложение 2.21. *$\mathsf{Con}(T_n)$ не выводима из* любых *n частных случаев локальной схемы рефлексии для теории T, при условии непротиворечивости T_n.*

Доказательство. Допустим

$$T \vdash \bigwedge\nolimits_{i=1}^{n} (\Box_T \varphi_i \to \varphi_i) \to \mathsf{Con}(T_n).$$

Тогда по лемме 2.20, с помощью контрапозиции,

$$T \vdash \Box_T^{n+1} \bot \to \neg \bigwedge\nolimits_{i=1}^{n} (\Box_T \varphi_i \to \varphi_i),$$

и, используя условия Лёба, получаем

$$\mathsf{EA} \vdash \Box_T^{n+2} \bot \to \Box_T \neg \bigwedge\nolimits_{i=1}^{n} (\Box_T \varphi_i \to \varphi_i).$$

Рассматривая арифметическую реализацию, сопоставляющую каждой переменной p_i формулу φ_i, по следствию 2.19 получаем

$$\mathsf{EA} \vdash \Box_T^{n+2} \bot \to \Box_T^{n+1} \bot.$$

Отсюда по теореме Лёба $\mathsf{EA} \vdash \Box_T^{n+1} \bot$, а значит теория T_n противоречива, q.e.d.

Замечание 2.22. Формулы $\Box_T^{i+1} \bot \to \Box_T^{i} \bot$ для $i \leq n$ дают пример $n+1$-го частного случая локальной схемы рефлексии (фактически, примера схемы $\mathsf{Rfn}_{\Sigma_1}(T)$), которые влекут $\mathsf{Con}(T_n)$ над EA. Заметим также, что отсюда следует включение $T_\omega \subseteq T + \mathsf{Rfn}_{\Sigma_1}(T)$.

Предложение 2.23. *Для $n \geq 1$ схемы $\mathsf{Rfn}_{\Sigma_n}(T)$ и $\mathsf{Rfn}_{\Pi_{n+1}}(T)$ не являются конечно аксиоматизируемыми над T, при условии непротиворечивости теории T_ω.*

Доказательство. По 2.21 любых m примеров этих схем не достаточно, чтобы вывести формулу $\mathsf{Con}(T_m)$. С другой стороны, формула $\mathsf{Con}(T_m)$ выводима в T_ω, а значит и в любой из схем $\mathsf{Rfn}_{\Sigma_n}(T)$ и $\mathsf{Rfn}_{\Pi_{n+1}}(T)$ при $n \geq 1$, q.e.d.

Другой формой той же самой идеи является следующий результат, полученный Горячевым в [3].

Предложение 2.24. *Любые n частных случаев локальной схемы рефлексии для T Π_1-консервативны над теорией T_n.*

Доказательство. Пусть $\pi \in \Pi_1$ и

$$T \vdash \bigwedge\nolimits_{i=1}^{n} (\Box_T \varphi_i \to \varphi_i) \to \pi.$$

Тогда в силу условий Лёба

$$T \vdash \Box_T \neg \pi \to \Box_T \neg \bigwedge\nolimits_{i=1}^{n} (\Box_T \varphi_i \to \varphi_i)$$

и

$$T \vdash \Box_T^+ \neg\pi \to \Box^+ \neg \bigwedge\nolimits_{i=1}^n (\Box_T \varphi_i \to \varphi_i).$$

С помощью арифметической интерпретации из следствия 2.19 мы получаем

$$T \vdash \Box_T^+ \neg\pi \to \Box_T^n \bot,$$

откуда

$$T \vdash \neg\pi \to \Box_T^n \bot$$

по доказуемой Σ_1-полноте. Таким образом, $T \vdash \neg\Box_T^n \bot \to \pi$ и $T_n \vdash \pi$, q.e.d.

Следствие 2.25. *Для любой элементарно аксиоматизированной теории T в теориях $T + \mathsf{Rfn}(T)$ и T_ω выводимы одни и те же Π_1-предложения.*

Отсюда также получается следующее следствие.

Следствие 2.26. *Теория $T + \mathsf{Rfn}(T)$ непротиворечива тогда и только тогда, когда непротиворечива теория T_ω.*

Как уже отмечалось, $T + \mathsf{Rfn}_{\Sigma_n}(T)$ содержит T_ω для любого $n \geq 1$. Следовательно, в отличие от схем равномерной рефлексии, все такие схемы доказывают одни и те же Π_1-предложения. Для схем частичной локальной рефлексии имеет место более сильный результат о консервативности [50].

Теорема 1. *Для $n > 1$*

(i) в теориях $T + \mathsf{Rfn}(T)$ и $T + \mathsf{Rfn}_{\Pi_n}(T)$ доказуемы одни и те же Π_n-предложения;

(ii) в теориях $T + \mathsf{Rfn}(T)$ и $T + \mathsf{Rfn}_{\Sigma_n}(T)$ доказуемы одни и те же Σ_n-предложения;

(iii) в $T + \mathsf{Rfn}(T)$ и $T + \mathsf{Rfn}_{\Sigma_1}(T)$ доказуемы одни и те же $\mathcal{B}(\Sigma_1)$-предложения.

Доказательство. Допустим

$$T \vdash \bigwedge\nolimits_{i=1}^m (\Box_T \varphi_i \to \varphi_i) \to \pi.$$

В силу условий Лёба мы также имеем

$$T \vdash \Box_T (\bigwedge\nolimits_{i=1}^m (\Box_T \varphi_i \to \varphi_i) \to \pi).$$

Рассматривая арифметическую реализацию, которая сопоставляет переменной p предложение π, а p_i предложение φ_i для всех i, по лемме 2.18 заключаем, что

$$T \vdash \bigwedge\nolimits_{i=1}^m (\Box_T \psi_i \to \psi_i) \to \pi,$$

где ψ_i означает арифметическую интерпретацию модальной формулы Q_i. Заметим теперь, что если $\pi \in \Pi_n$ для $n > 1$, то $\psi_i \in \Pi_n$ для всех i. Значит

$$T + \mathsf{Rfn}_{\Pi_n}(T) \vdash \pi.$$

Аналогично, Σ_n-следствия $\mathsf{Rfn}(T)$ содержатся в $\mathsf{Rfn}_{\Sigma_n}(T)$, и $\mathcal{B}(\Sigma_1)$-следствия $\mathsf{Rfn}(T)$ содержатся в теории $\mathsf{Rfn}_{\mathcal{B}(\Sigma_1)}(T)$, которая эквивалентна $\mathsf{Rfn}_{\Sigma_1}(T)$ по лемме 2.17, q.e.d.

Следующее утверждение показывает, что доказанная выше теорема оптимальна в смысле арифметической сложности.

Лемма 2.27. *При условии непротиворечивости* T_ω, *для* $n > 1$ *найдется* Σ_n-*(соответственно,* Π_n*) предложение, доказуемое в* $T + \mathsf{Rfn}(T)$, *но не доказуемое в* $T + \mathsf{Rfn}_{\Pi_n}(T)$ *(соотв.,* $T + \mathsf{Rfn}_{\Sigma_n}(T)$*).*

Доказательство. По 2.16 в качестве такого предложения можно взять соответствующий частный случай схемы $\mathsf{Rfn}_{\Sigma_n}(T)$ (соотв., $\mathsf{Rfn}_{\Pi_n}(T)$), q.e.d.

В заключение отметим следующее усиление следствия 2.10.

Следствие 2.28. $T + \mathsf{Rfn}(T) \nvdash \mathsf{RFN}(T)$, *если и только если теория* T_ω *непротиворечива.*

Доказательство. В силу следствия 2.26, если T_ω противоречива, то и $T + \mathsf{Rfn}(T)$ — противоречивая теория, то есть $T + \mathsf{Rfn}(T) \vdash \mathsf{RFN}(T)$. С другой стороны, если $T + \mathsf{Rfn}(T) \vdash \mathsf{RFN}(T)$, то в силу конечной аксиоматизируемости $\mathsf{RFN}_{\Sigma_1}(T)$ найдутся некоторые n частных случаев схемы $\mathsf{Rfn}(T)$, из которых выводима $\mathsf{RFN}_{\Sigma_1}(T)$. Однако $T + \mathsf{RFN}_{\Sigma_1}(T)$ содержит T_ω, а значит и $\mathsf{Con}(T_n)$. Таким образом, в силу предложения 2.21 T_n и T_ω противоречивы, q.e.d.

Более глубокие результаты, связывающие локальную и равномерную схемы рефлексии, будут получены нами в §6.3.

3 Индукция и рефлексия

В этом и последующим разделах мы приводим основные результаты, касающиеся взаимоотношения между схемами рефлексии и различными формами индукции в арифметике.

3.1 Основные формы индукции

Мы будем рассматривать две основные формы индукции в арифметике: схему аксиом IA и правило индукции IR.

IA: $\varphi(0) \wedge \forall x\, (\varphi(x) \to \varphi(x+1)) \to \forall x \varphi(x)$,

IR: $\dfrac{\varphi(0),\ \forall x\, (\varphi(x) \to \varphi(x+1))}{\forall x \varphi(x)}$.

Схема и правило индукции для формул φ, пробегающих некоторый подкласс Γ класса арифметических формул, обозначаются Γ-IA и Γ-IR, соответственно. Как было отмечено выше, арифметика Пеано PA аксиоматизируется над EA схемой IA для произвольных формул $\varphi(x)$, возможно содержащих другие свободные переменные. Правило индукции дает эквивалентную аксиоматизацию PA. Однако, схема и правило индукции для формул ограниченной арифметической сложности приводят к различным иерархиям фрагментов арифметики. Систематическое изучение этих иерархий, а также других естественных фрагментов PA, начатое Парсонсом в начале 70-х годов, к настоящему времени представляет собой активно развивающуюся область исследований (обширную библиографию см. в [18]).

$I\Sigma_n$ означает теорию, аксиоматизированную над EA схемой IA для всех Σ_n-формул $\varphi(x)$;$I\Sigma_n^R$ аксиоматизируется правилом IR для всех Σ_n-формул $\varphi(x)$;$I\Sigma_n^-$ аксиоматизируется схемой IA для Σ_n-формул $\varphi(x)$ с единственной свободной переменной x. $I\Pi_n$, $I\Pi_n^R$ и $I\Pi_n^-$ определяются аналогично. Мы установим, что эти иерархии и иерархии схем рефлексии тесно связаны друг с другом. Первый и наиболее известный результат этого типа был получен Крайзелем и Леви [20], которые доказали, что PA эквивалентна полной равномерной схеме рефлексии над примитивно рекурсивной арифметикой. Впоследствии эта теорема была обобщена Лейвантом [21], который фактически установил точную связь между иерархией теорий $I\Sigma_n$ и иерархией схем частичной равномерной рефлексии. Ниже мы даём точные характеризации правил индукции и схем беспараметрической индукции в терминах схем рефлексии, полученные в работах [52, 53]. Применяемая нами техника позволяет также легко получить и некоторое усиление результата Лейванта, поэтому последний мы приводим с доказательством (см. §3.3). Основная конструкция затем будет применена и для анализа правила Π_n-индукции. Более трудный случай правила Σ_n-индукции рассматривается в разделе 5.

3.2 Исчисление Тейта

Мы опираемся на стандартную технику устранения сечения в секвенциальном исчислении Тейта, изложенную, например, в статье Швихтенберга [10]. *Формулы* в исчислении Тейта строятся, как и в логике первого порядка, из атомарных формул и их отрицаний с помощью связок $\wedge$, $\vee$ и кванторов $\forall$, $\exists$. При этом также удобно считать, что алфавиты связанных и свободных переменных не пересекаются. Операция отрицания формулы определена по правилам де Моргана. *Секвенции* представляют собой конечные множества формул, обозначаемые Γ, Δ, ... и понимаемые как дизъюнкции входящих в них формул. $\Gamma \cup \{\varphi\}$ записывается как Γ, φ.

Исчисление Тейта задаётся аксиомами вида $\Gamma, \varphi, \neg\varphi$, где φ — атомарная формула, и следующими правилами вывода:

$$\frac{\Gamma, \varphi \quad \Gamma, \psi}{\Gamma, \varphi \wedge \psi}\ (\wedge) \qquad \frac{\Gamma, \varphi}{\Gamma, \varphi \vee \psi}\ (\vee_0) \qquad \frac{\Gamma, \psi}{\Gamma, \varphi \vee \psi}\ (\vee_1)$$

$$\frac{\Gamma, \varphi(a)}{\Gamma, \forall x \varphi(x)}\ (\forall), \quad \text{где } a \text{ не входит свободно в } \Gamma$$

$$\frac{\Gamma, \varphi(t)}{\Gamma, \exists x \varphi(x)}\ (\exists) \qquad \frac{\Gamma, \varphi \quad \Gamma, \neg\varphi}{\Gamma}\ (Cut)$$

Нетрудно показать, что секвенция Γ является выводимой в исчислении Тейта тогда и только тогда, когда формула $\bigvee\Gamma$ выводима в чистом исчислении предикатов PC. Теорема об устранении сечения (см. [10]) утверждает, что существует эффективная процедура, переводящая любой вывод секвенции Γ в исчислении Тейта в некоторый вывод Γ, не содержащий применений правила (Cut). Выводы без сечений обладают тем свойством, что всякая формула, входящая в такой вывод, является подформулой некоторой формулы заключительной секвенции. (При этом свойство быть подформулой понимается с точностью до подстановки термов вместо свободных переменных.) В частности, вывод Π_n-формулы без сечений состоит целиком из Π_n-формул.

Понятие секвенции и вывода в исчислении Тейта может быть легко формализовано в EA. Однако, теорема об устранении сечения не доказуема в EA в силу известных неэлементарных нижних оценок на размер вывода без сечения в зависимости от размера исходного вывода (см. [42, 7]). Для формализации этой теоремы используется расширение EA новой Π_2-аксиомой, утверждающей, что функция 2^x_n определена при любых значениях аргументов n, x. (График функции 2^x_n нетрудно определить элементарной формулой.) Мы обозначаем эту теорию EA^+ (эквивалентная теория обозначается $I\Delta_0 + \mathsf{Supexp}$ в [18]). Отметим, что в EA^+ можно ввести новый символ для функции 2^x_n, причем в соответствующем дефинициальном расширении доказуема схема индукции для ограниченных формул расширенного языка (см. [18], с. 271 и предложение 4.13 настоящей работы).

Из статьи [10] можно извлечь грубую верхнюю оценку на размер вывода без сечения порядка 2^x_{cn}, где n — ранг сечений, x — размер исходного вывода, а c — некоторая константа. Это позволяет непосредственно формализовать в EA^+ обычное индуктивное доказательство теоремы об устранении сечения (см. также [18], с. 376).

Для языка исчисления Тейта технически удобно распространить синтаксическое понятие Π_n-формулы на все формулы, получающиеся из элементарных с помощью связок $\wedge$, $\vee$ и квантора $\forall$. В этом и следующем параграфах мы будем работать в исчислении Тейта для арифметического языка без символа экспоненты. Определение истинности для Δ_0-формул, выражаемое элементарной формулой в EA, построено в [18], с. 364. На основе этого, как в [18], с. 58–59, строятся определения истинности для классов Σ_n и Π_n арифметической иерархии при $n \geq 1$.

Помимо утверждения 2.4 нам будут нужны некоторые дополнительные свойства определения истинности для Π_n-формул, называемые *условиями Тарского.* Условия Тарского формально выражают тот факт, что определение истинности $\mathsf{True}_{\Pi_n}(x)$ корректно определено на атомарных формулах и доказуемо в EA коммутирует с булевыми связками и кванторами на классе Π_n-формул. Другими словами, в EA доказуемо: *для любых формул $\varphi, \psi, \theta, \alpha, \gamma$ таких, что*

$\varphi, \neg\varphi, \psi, \theta, \forall x\gamma(x), \exists x\alpha(x) \in St \cap \Pi_n$,

$$\begin{aligned}
\mathsf{True}_{\Pi_n}(\ulcorner\neg\varphi\urcorner) &\leftrightarrow \neg\mathsf{True}_{\Pi_n}(\ulcorner\varphi\urcorner),\\
\mathsf{True}_{\Pi_n}(\ulcorner\theta\wedge\psi\urcorner) &\leftrightarrow \mathsf{True}_{\Pi_n}(\ulcorner\theta\urcorner)\wedge\mathsf{True}_{\Pi_n}(\ulcorner\psi\urcorner),\\
\mathsf{True}_{\Pi_n}(\ulcorner\theta\vee\psi\urcorner) &\leftrightarrow \mathsf{True}_{\Pi_n}(\ulcorner\theta\urcorner)\vee\mathsf{True}_{\Pi_n}(\ulcorner\psi\urcorner),\\
\mathsf{True}_{\Pi_n}(\ulcorner\exists x\alpha(x)\urcorner) &\leftrightarrow \exists x\mathsf{True}_{\Pi_n}(\ulcorner\alpha(\dot{x})\urcorner),\\
\mathsf{True}_{\Pi_n}(\ulcorner\forall x\gamma(x)\urcorner) &\leftrightarrow \forall x\mathsf{True}_{\Pi_n}(\ulcorner\gamma(\dot{x})\urcorner).
\end{aligned}$$

Подчеркнем, что вышеприведенные условия доказуемы в EA не только для индивидуальных формул φ,ψ, ... , но и с кванторами общности по их гёделевым номерам. (В последнем случае обозначение $\ulcorner\alpha(\dot{x})\urcorner$ следует понимать как определимый терм для элементарной функции, сопоставляющей номеру формулы α и числу x номер формулы $\alpha(\overline{x})$. Поскольку ниже мы используем условия Тарского лишь в неформальном контексте, мы не будем вводить специальных обозначений для такого рода функций.)

Мы также предполагаем, что формализация операции $\bigvee\Gamma$ на секвенциях Γ, состоящих из Π_n-формул, доказуемо в EA согласована с $\mathsf{True}_{\Pi_n}(x)$ в том смысле, что истинность $\bigvee\Gamma$ не зависит от упорядочения формул секвенции Γ в дизъюнкцию. В частности, в EA доказуемо: *для любых* $\varphi \in \Gamma \subseteq St \cap \Pi_n$

$$\mathsf{True}_{\Pi_n}(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \mathsf{True}_{\Pi_n}(\ulcorner\bigvee\Gamma\urcorner). \tag{2}$$

Считаем, что для пустой секвенции Γ $\bigvee\Gamma := \bot$ и тем самым доказуемо $\neg\mathsf{True}_{\Pi_n}(\ulcorner\bigvee\Gamma\urcorner)$.

В EA мы также имеем элементарную определимую универсальную функцию для термов языка без экспоненты, то есть функцию $\mathsf{eval}(u,x)$, для любого терма $t(x_0,\dots,x_n)$ удовлетворяющую условию[2]

$$\mathsf{EA} \vdash \mathsf{eval}(\ulcorner t\urcorner, \langle x_0,\dots,x_n\rangle) = t(x_0,\dots,x_n).$$

Обычно функция $\mathsf{eval}(u,x)$ используется явно в конструкции определения истинности для означивания атомарных и ограниченных формул ([18], с. 363–364). Вместе с доказуемой тотальностью $\mathsf{eval}(u,x)$ это влечет, что определение истинности и универсальная функция согласованы в том смысле, что в EA доказуемо: *для любых* Π_n*-формул* $\varphi(z_0,\dots,z_m)$ *и термов* $t_0(\vec{x}),\dots,t_m(\vec{x})$

$$\begin{gathered}
\bigwedge\nolimits_{i=0}^{m}\mathsf{eval}(\ulcorner t_i\urcorner,\langle\vec{x}\rangle) = y_i \to\\
(\mathsf{True}_{\Pi_n}(\ulcorner\varphi(t_0(\dot{\vec{x}}),\dots,t_m(\dot{\vec{x}}))\urcorner) \leftrightarrow \mathsf{True}_{\Pi_n}(\ulcorner\varphi(\dot{y}_0,\dots,\dot{y}_m)\urcorner)).
\end{gathered} \tag{3}$$

Здесь и ниже $\vec{x}$ есть сокращение для $x_0,\dots,x_k$; $\dot{\vec{x}}$ обозначает $\dot{x}_0,\dots,\dot{x}_k$; $\overline{\vec{x}}$ обозначает $\overline{x}_0,\dots,\overline{x}_k$; а $\langle\vec{x}\rangle$ есть $\langle x_0,\dots,x_k\rangle$.

3.3 Схемы индукции и их характеризация

Мы начнем с базисной леммы о схемах индукции ограниченной арифметической сложности. Как и ранее, в формулировках нижеследующих утверждений, говоря о классах Σ_n и Π_n арифметической иерархии, мы предполагаем $n \geq 1$. Следующая лемма доказана в [28].

[2] Подразумеваем, что все переменные арифметического языка упорядочены в фиксированную последовательность $x_0,\dots,x_n,\dots$

Лемма 3.1. $I\Sigma_n \equiv I\Pi_n$.

Доказательство. Рассмотрим любую Π_n-формулу $\varphi(x)$. Чтобы вывести пример схемы IA для $\varphi(x)$ с помощью Σ_n-индукции, рассмотрим Σ_n-формулу $\psi(a,x) := \neg\varphi(a \dot{-} x)$. Тогда $\forall x\,(\varphi(x) \to \varphi(x+1))$ влечет $\forall x\,(\psi(a,x) \to \psi(a,x+1))$, следовательно $\psi(a,0) \to \psi(a,a)$, по $I\Sigma_n$. Но это означает, что $\varphi(0) \to \varphi(a)$, q.e.d.

Замечание 3.2. Отметим роль параметра a в этом рассуждении: оно не проходит для теории $I\Sigma_n^-$.

Следующее важное предложение для случая примитивно рекурсивной арифметики PRA вместо EA и $n \geq 2$ получено Д. Лейвантом [21]. Случай $n = 1$ требует ослабления теории PRA до EA. Включение теорий слева направо в этой теореме было отмечено Х. Оно [25].

Предложение 3.3. $I\Sigma_n \equiv \mathsf{EA} + \mathsf{RFN}_{\Sigma_{n+1}}(\mathsf{EA})$.

Доказательство. Включение ($\subseteq$) доказывается легко. Пусть $\sigma(x,y) \in \Sigma_n$, где без ограничения общности мы рассматриваем единственный параметр y. Обозначим через $\psi(y)$ формулу

$$\sigma(0,y) \wedge \forall x\,(\sigma(x,y) \to \sigma(x+1,y)).$$

С помощью очевидной индукции по k получаем

$$\forall k,m \in \mathbf{N} \quad \mathsf{EA} \vdash \psi(\overline{m}) \to \sigma(\overline{k},\overline{m}).$$

Размер соответствующего EA-вывода оценивается элементарной функцией от k и m, поэтому внешняя индукция по k формализуема в EA:

$$\mathsf{EA} \vdash \forall x,y\, \Box_{\mathsf{EA}}(\psi(\dot{y}) \to \sigma(\dot{x},\dot{y})).$$

Заметим, что $\psi(y) \to \sigma(x,y)$ логически эквивалентна Σ_{n+1}-формуле, поэтому с помощью равномерной схемы Σ_{n+1}-рефлексии выводим

$$\mathsf{EA} + \mathsf{RFN}_{\Sigma_{n+1}}(\mathsf{EA}) \vdash \forall x,y\,(\psi(y) \to \sigma(x,y)),$$

что эквивалентно соответствующему примеру схемы индукции.

Для доказательства $\mathsf{RFN}_{\Sigma_{n+1}}(\mathsf{EA})$ в $I\Sigma_n$ заметим, что достаточно вывести в $I\Sigma_n$ схему равномерной Σ_{n+1}-рефлексии $\mathsf{RFN}_{\Sigma_{n+1}}(\mathsf{PC})$ для *чистого исчисления предикатов* PC в арифметическом языке без экспоненты. Это следует из доказуемой эквивалентности EA и $I\Delta_0 + \mathsf{Exp}$ и того, что $I\Delta_0 + \mathsf{Exp}$ имеет конечную Π_2 аксиоматизацию (над PC), откуда в силу аналога леммы 2.14

$$\begin{aligned} \mathsf{EA} \vdash \mathsf{RFN}_{\Sigma_{n+1}}(\mathsf{EA}) \quad &\leftrightarrow \quad \mathsf{RFN}_{\Sigma_{n+1}}(I\Delta_0 + \mathsf{Exp}) \\ &\leftrightarrow \quad \mathsf{RFN}_{\Sigma_{n+1}}(\mathsf{PC}). \end{aligned}$$

Для заданной Σ_{n+1}-формулы $\sigma(z) := \exists y_1 \ldots \exists y_m\, \alpha(y_1,\ldots,y_m,z)$, где $\alpha \in \Pi_n$, и числа $k \in \mathbf{N}$ рассмотрим вывод без сечения секвенции $\sigma(\overline{k}), \Pi$ для некоторого множества Π_n-формул Π. По свойству подформульности любая формула, входящая в этот вывод, или (a) имеет вид

$$\exists y_i \ldots \exists y_m\; \alpha(t_0,\ldots,t_{i-1},y_i,\ldots,y_m,\overline{k}),$$

для некоторого $0 \leq i \leq m$ и термов $t_0,\ldots,t_{i-1}$; или (b) есть Π_n-формула.

Пусть $I_\sigma(h,k)$ означает Π_n-формулу, естественным образом выражающую следующее:

“Для любого p, если p есть код вывода без сечения секвенции вида $\Gamma(\overline{k}), \Pi(\vec{a})$, где $\Gamma(\overline{k})$ есть множество формул вида (a) выше, $\Pi(\vec{a})$ есть множество Π_n-формул, и если высота вывода p меньше h, то $\forall \vec{x}\, \mathsf{True}_{\Pi_n}(\ulcorner \bigvee \Pi(\dot{\vec{x}}) \urcorner)$.”

Лемма 3.4. $\mathsf{EA} \vdash \neg\sigma(z) \to \Big(I_\sigma(0,z) \wedge \forall h\, (I_\sigma(h,z) \to I_\sigma(h+1,z))\Big)$.

Доказательство. Мы докажем лемму, рассуждая неформально внутри EA. $I_\sigma(0,z)$ имеет место тривиальным образом. Покажем, что $I_\sigma(h,z)$ влечет $I_\sigma(h+1,z)$. Для этого рассмотрим вывод без сечения высоты h секвенции вида $\Gamma, \Pi(\vec{a})$, где Γ и Π определены как выше, и покажем, что дизъюнкция Π истинна в смысле True_{Π_n} при любой подстановке нумералов вместо свободных переменных в Π. Мы разбираем несколько случаев, в зависимости от вида последнего применения правила в данном выводе. Утверждение $I_\sigma(h,z)$ мы будем называть предположением индукции.

Случай 1. Секвенция $\Gamma, \Pi(\vec{a})$ есть логическая аксиома, то есть имеет вид $\Delta, \varphi(\vec{a}), \neg\varphi(\vec{a})$ для некоторой атомарной формулы φ. Поскольку все формулы типа (a) содержат кванторы существования, и тем самым не являются атомарными формулами или их отрицаниями, φ и $\neg\varphi$ должны входить в Π. Условия Тарского влекут, что для любого $\vec{x}$

$$\mathsf{True}_{\Pi_n}(\ulcorner \varphi(\dot{\vec{x}}) \urcorner) \vee \mathsf{True}_{\Pi_n}(\ulcorner \neg\varphi(\dot{\vec{x}}) \urcorner).$$

Отсюда мы выводим $\forall \vec{x}\, \mathsf{True}_{\Pi_n}(\ulcorner \bigvee \Pi(\dot{\vec{x}}) \urcorner)$ в силу (2).

Случай 2. Секвенция $\Gamma, \Pi(\vec{a})$ получена по правилу введения булевой связки или квантора в формулу из $\Pi(\vec{a})$. Все эти правила рассматриваются аналогично, опираясь на свойство подформульности для выводов без сечения и условия Тарского для True_{Π_n}. Например, правило введения квантора общности имеет вид

$$\frac{\Gamma, \Pi'(\vec{a}), \varphi(\vec{a}, b)}{\Gamma, \Pi'(\vec{a}), \forall x \varphi(\vec{a}, x)},$$

где b не входит свободно в $\Gamma, \Pi'(\vec{a})$. Мы должны показать, что для любого набора $\vec{x}$ формула $\bigvee \Pi'(\overline{\vec{x}}) \vee \forall y \varphi(\overline{\vec{x}}, y)$ истинна. По предположению индукции, поскольку b не входит свободно в Π', мы знаем, что для любого y формула $\bigvee \Pi'(\overline{\vec{x}}) \vee \varphi(\overline{\vec{x}}, \overline{y})$ истинна. Коммутируя True_{Π_n} с $\vee$ мы получаем, что для любого y или $\bigvee \Pi'(\overline{\vec{x}})$, или $\varphi(\overline{\vec{x}}, \overline{y})$ истинна. Поскольку $\mathsf{True}_{\Pi_n}(\ulcorner \bigvee \Pi'(\dot{\vec{x}}) \urcorner)$ не зависит от y, отсюда вытекает, что или $\bigvee \Pi'(\overline{\vec{x}})$ истинна, или для любого y $\varphi(\overline{\vec{x}}, \overline{y})$ истинна. Коммутируя True_{Π_n} с квантором общности, а затем с дизъюнкцией в обратном направлении, мы заключаем, что формула $\bigvee \Pi'(\overline{\vec{x}}) \vee \forall y \varphi(\overline{\vec{x}}, y)$ истинна, что и требовалось доказать.

Случай 3. Последнее применение правила вывода добавляет квантор существования непосредственно перед α, то есть вывод имеет вид

$$\frac{\Gamma', \alpha(t_0(\vec{a}), \ldots, t_{m-1}(\vec{a}), t_m(\vec{a}), \overline{z}), \Pi(\vec{a})}{\Gamma', \exists y_m \alpha(t_0(\vec{a}), \ldots, t_{m-1}(\vec{a}), y_m, \overline{z}), \Pi(\vec{a})}.$$

По предположению индукции или дизъюнкция $\Pi(\overline{\vec{x}})$, или формула

$$\alpha(t_0(\overline{\vec{x}}), \ldots, t_m(\overline{\vec{x}}), \overline{z})$$

истинна. Нам нужно опровергнуть вторую возможность, рассуждая внутри EA.

Заметим, что хотя, вообще говоря, t_i являются “нестандартными” термами, α — фиксированная “стандартная” Π_{n+1}-формула. Поэтому утверждение 2.4

может быть применено к α после вычисления значений термов t_i. Так, по (3) и утверждению 2.4 мы получаем:

$$\begin{aligned} \mathsf{True}_{\Pi_n}(\ulcorner \alpha(t_0(\dot{\vec{x}}), \ldots, t_m(\dot{\vec{x}}), \dot{z})\urcorner) \wedge \bigwedge\nolimits_{i=0}^{m} \mathsf{eval}(\ulcorner t_i \urcorner, \langle \vec{x} \rangle) = y_i \quad &\to \\ \to \quad &\mathsf{True}_{\Pi_n}(\ulcorner \alpha(\dot{y}_0, \ldots, \dot{y}_m, \dot{z})\urcorner) \\ \to \quad &\alpha(y_0, \ldots, y_m, z). \end{aligned}$$

Поскольку универсальная функция доказуемо тотальна в EA, отсюда вытекает, что формула

$$\mathsf{True}_{\Pi_n}(\ulcorner \alpha(t_0(\dot{\vec{x}}), \ldots, t_m(\dot{\vec{x}}), \dot{z})\urcorner)$$

влечет $\exists y_0 \ldots \exists y_m\, \alpha(y_0, \ldots, y_m, z)$, то есть противоречит гипотезе $\neg\sigma(z)$. Таким образом, для любых $t_0, \ldots, t_m$ и $\vec{x}$ формула $\alpha(t_0(\overline{\vec{x}}), \ldots, t_m(\overline{\vec{x}}), \overline{z})$ не может быть истинной, значит истинна дизъюнкция $\Pi(\overline{\vec{x}})$.

Случай 4. $\Gamma, \Pi(\vec{a})$ получается по правилу, вводящему любой другой квантор существования в формулу из Γ. Тогда наше утверждение непосредственно следует из предположения индукции, поскольку Π-часть посылки в этом случае совпадает с соответствующей частью заключения, q.e.d.

Поскольку для $n \geq 1$ $I\Sigma_n$ эквивалентна $I\Pi_n$ и содержит EA^+, из предыдущей леммы непосредственно вытекает, что

$$I\Sigma_n \vdash \neg\sigma(z) \to \forall h\, I_\sigma(h, z). \tag{4}$$

Чтобы вывести $\mathsf{RFN}_{\Sigma_{n+1}}(\mathsf{PC})$ мы рассуждаем теперь внутри $I\Sigma_n$ для каждой Σ_{n+1}-формулы $\sigma(z)$ следующим образом.

Допустим $\neg\sigma(z)$ и $\Box_{\mathsf{PC}}\, \sigma(\dot{z})$, тогда секвенция, состоящая из единственной формулы $\sigma(\overline{z})$, доказуема в исчислении Тейта. По (формализованной) теореме об устранении сечения мы получаем вывод этой секвенции без сечений и по (4) заключаем, что имеет место $\mathsf{True}_{\Pi_n}(\ulcorner \bot \urcorner)$. Но отсюда следует $\bot$, то есть противоречие, q.e.d.

Следствие 3.5 (Крайзель–Леви). PA *эквивалентна* $\mathsf{EA} + \mathsf{RFN}(\mathsf{EA})$.

Как следствие теорем о неограниченности для равномерной рефлексии мы получаем следующие результаты.

Следствие 3.6. *(i) (Рабин, Крайзель–Леви)* PA *не содержится ни в одном непротиворечивом расширении* EA *ограниченной арифметической сложности.*

(ii) (Лейвант) $I\Sigma_n$ *не содержится ни в одном непротиворечивом расширении* EA *сложности* Σ_{n+2}.

Отметим, что сложность очевидной аксиоматизации $I\Sigma_n$ есть Π_{n+2}.

Следствие 3.7. *Ни* $I\Pi^R_{n+1}$, *ни* $I\Pi^-_{n+1}$ *не содержат* $I\Sigma_n$.

Доказательство. Арифметическая сложность аксиоматизации этих теорий есть Π_{n+1} и Σ_{n+2}, соответственно (все формулы, являющиеся заключениями примеров правила Π_{n+1}-IR, имеют сложность Π_{n+1}), q.e.d.

3.4 Правила индукции, сводимости

Иерархии теорий $I\Sigma_n^R$ и $I\Pi_n^R$, основанных на правиле индукции для формул ограниченной сложности, были введены Парсонсом [27, 28]. В частности, им была показана эквивалентность теорий $I\Sigma_n^R$ и $I\Pi_{n+1}^R$, а также установленный нами выше (другим методом) результат о том, что $I\Pi_{n+1}^R$ строго слабее схемы индукции $I\Sigma_n$. В отличие от простой леммы 3.1, доказательство эквивалентности $I\Sigma_n^R$ и $I\Pi_{n+1}^R$ основано на глубоком анализе этих теорий. Это не случайно, поскольку факт эквивалентности правил Σ_n-IR и Π_{n+1}-IR существенно зависит от выбора базисной теории, над которой эти правила рассматриваются. Так, например,

$$I\Sigma_1 + \Sigma_1\text{-}\mathsf{IR} \equiv I\Sigma_1 \not\equiv I\Sigma_1 + \Pi_2\text{-}\mathsf{IR},$$

поскольку, как хорошо известно, $I\Sigma_1 + \Pi_2$-IR доказывает непротиворечивость $I\Sigma_1$ (см. ниже следствие 3.16). Таким образом, в некотором более точном смысле, Σ_n-IR и Π_{n+1}-IR являются существенно различными правилами вывода.

Этот аспект был детально проанализирован в работе [52], где был впервые дан *инвариантный* относительно выбора базисной теории анализ правил индукции. Это позволило дать ответ на вопрос об аксиоматизации замыканий произвольных теорий относительно правил индукции, а в дальнейшем также дать ответ на ряд интересных открытых вопросов о схемах беспараметрической индукции.

В инвариантной характеризации правил индукции существенную роль играют схемы рефлексии. В этом разделе мы даём такую характеризацию для более простого случая правила Π_n-индукции. Аналогичный результат для правила Σ_n-индукции более сложен и устанавливается в разделе 5.

Для начала мы введем некторую общую терминологию и обозначения, касающихся правил вывода в арифметике. Мы называем *правилом* произвольное множество *примеров*, то есть выражений вида

$$\frac{\varphi_1, \dots, \varphi_n}{\psi},$$

где $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ и ψ — арифметические формулы. Выводы с использованием правил определяются стандартным образом; $T + R$ означает замыкание теории T относительно правила R и логики первого порядка. $[T, R]$ означает замыкание T относительно *однократного применения* правила R, то есть теорию, аксиоматизированную над T всеми формулами ψ такими, что для некоторых формул $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, выводимых в T, $\frac{\varphi_1, \dots, \varphi_n}{\psi}$ есть пример R.

Правило R_1 называется *выводимым* из R_2, если для любой теории T, содержащей EA, $T + R_1 \subseteq T + R_2$. Эквивалентным образом, это означает, что любой вывод из посылок с использованием R_1 можно заменить на эквивалентный вывод с использованием EA и R_2. Правило R_1 называется *сводимым* к R_2, если для любой теории T, содержащей EA, $[T, R_1] \subseteq [T, R_2]$. R_1 и R_2 называются *конгруэнтными*, если они взаимно сводимы (обозначается $R_1 \cong R_2$). Для теории U, содержащей EA, мы говорим, что R_1 и R_2 *конгруэнтны по модулю* U, если для любого расширения T теории U $[T, R_1] \equiv [T, R_2]$. Правило R *конгруэнтно множеству аксиом* U, если R конгруэнтно U как правилу с пустой посылкой, то есть если для любой теории T, содержащей EA, $[T, R] \equiv T + U$. Нетрудно видеть, что правила, конгруэнтные схемам аксиом, имеют тривиальное поведение в том смысле, что многократные применения таких правил эквивалентны однократному:

$$[[T, R], R] \equiv [T, R] + U \equiv (T + U) + U \equiv T + U \equiv [T, R].$$

Теперь мы рассмотрим более подробно правила индукции для формул ограниченной арифметической сложности. Вообще говоря, мы допускаем параметры в индукционных формулах правил Σ_n-IR и Π_n-IR, однако имеет место следующая полезная лемма.

Лемма 3.8. *(i)* Π_n-IR *сводится к правилу* Π_n-IR *без параметров.*

(ii) Σ_n-IR *сводится к правилу* Σ_n-IR *без параметров.*

Доказательство. Применение IR к формуле $\varphi(x,a)$ с индукционной переменной x и параметром a очевидным образом сводится к применению IR для формулы $\forall z\varphi(x,z)$, и это доказывает первое утверждение леммы.

Допустим теперь, что $\varphi(x,y,a)\in\Pi_{n-1}$ и

$$T \vdash \exists y\,\varphi(0,y,a), \text{ и} \tag{5}$$
$$T \vdash \forall x\,(\exists y\,\varphi(x,y,a)\to\exists y\,\varphi(x+1,y,a)). \tag{6}$$

Обозначим
$$\varphi'(x,y) := \forall i\le x\varphi((i)_0,(y)_i,(i)_1).$$

Тогда мы имеем, в силу (5) и монотонности кодирования последовательностей, $T\vdash\exists y\,\varphi'(0,y)$. Для доказательства

$$T\vdash\forall x\,(\exists y\,\varphi'(x,y)\to\exists y'\,\varphi'(x+1,y'))$$

предположим, что $\forall i\le x\,\varphi((i)_0,(y)_i,(i)_1)$. Если $(x+1)_0=0$, то по (5) найдется элемент z, такой что $\varphi(0,z,(x+1)_1)$, и в качестве y' можно взять последовательность $y*\langle z\rangle$. Если же $(x+1)_0>0$, то код пары $p:=\langle (x+1)_0-1,(x+1)_1\rangle$ строго меньше $x+1$, и таким образом (по индуктивному предположению) найдется $z=(y)_p$ такой, что $\varphi((x+1)_0-1,z,(x+1)_1)$. Из (6) следует, что для некоторого z' имеет место $\varphi((x+1)_0,z',(x+1)_1)$. Значит, можно взять в качестве y' последовательность $y*\langle z'\rangle$. Таким образом, применение IR для формулы $\exists y\,\varphi(x,y,a)$ сводится к применению IR для Σ_n-формулы $\exists y\,\varphi'(x,y)$ без параметров, q.e.d.

Следствие 3.9. $I\Sigma_n^R\subseteq I\Sigma_n^-,\ \ I\Pi_n^R\subseteq I\Pi_n^-$.

Другие формы правила индукции при ограничении на классы арифметической иерархии обычно сводятся к Π_n-IR, Σ_n-IR или Σ_n-IA. Мы рассмотрим несколько наиболее естественных вариантов:

$$\begin{array}{ll}
\mathsf{IR}_0: & \dfrac{\forall x\,(\varphi(x)\to\varphi(x+1))}{\varphi(0)\to\forall x\,\varphi(x)},\\
\mathsf{IR}_<: & \dfrac{\forall x\,(\forall y<x\,\varphi(y)\to\varphi(x))}{\forall x\,\varphi(x)},\\
\mathsf{LR}: & \dfrac{\exists x\,\varphi(x)}{\exists x\,(\varphi(x)\wedge\forall y<x\,\neg\varphi(y))}.
\end{array}$$

Как обычно, Γ-IR_0, Γ-$\mathsf{IR}_<$ и Γ-LR обозначают вышеприведенные правила с ограничением $\varphi\in\Gamma$. Мы также предполагаем, что $\varphi(x)$ может содержать параметры.

Лемма 3.10. Σ_n-$\mathsf{IR}_0\cong\Pi_n$-$\mathsf{IR}_0\cong\Sigma_n$-$\mathsf{IR}$.

Доказательство. 1. Конгруэнтность Σ_n-$\mathsf{IR}_0\cong\Pi_n$-IR_0 доказывается аналогично эквивалентности Σ_n-IA и Π_n-IA. Например, чтобы доказать сводимость Σ_n-IR_0 к Π_n-IR_0, рассмотрим формулу $\varphi(x)\in\Sigma_n$, такую что

$$T\vdash\forall x\,(\varphi(x)\to\varphi(x+1)).$$

Тогда для $\psi(a,x) := \neg\varphi(a \dot{-} x)$ имеем

$$T \vdash \forall x\,(\psi(a,x) \to \psi(a,x+1)),$$

откуда

$$\begin{array}{rcl} [T, \Pi_n\text{-}\mathsf{IR}_0] & \vdash & \psi(a,0) \to \forall x\,\psi(a,x) \\ & \vdash & \psi(a,0) \to \psi(a,a) \\ & \vdash & \varphi(0) \to \varphi(a), \qquad \text{q.e.d.} \end{array}$$

2. Очевидно, Σ_n-IR сводится к Σ_n-IR_0, таким образом достаточно установить сводимость Σ_n-IR_0 к Σ_n-IR. Пусть $\exists y \varphi(y,x) \in \Sigma_n$, где $\varphi(y,x) \in \Pi_{n-1}$, и пусть

$$T \vdash \forall x\,(\exists y \varphi(y,x) \to \exists y \varphi(y,x+1)).$$

Тогда

$$T \vdash \forall x\,(\exists y\,(\varphi(a,0) \to \varphi(y,x)) \to \exists y\,(\varphi(a,0) \to \varphi(y,x+1)))$$

и очевидно

$$T \vdash \exists y\,(\varphi(a,0) \to \varphi(y,0)).$$

Значит,

$$\begin{array}{rcl} [T, \Sigma_n\text{-}\mathsf{IR}] & \vdash & \forall x \exists y\,(\varphi(a,0) \to \varphi(y,x)) \\ & \vdash & \exists u \varphi(u,0) \to \forall x \exists y\,\varphi(y,x), \qquad \text{q.e.d.} \end{array}$$

Следствие 3.11. Π_n-IR *сводится к* Σ_n-IR.

Доказательство. Очевидно, Π_n-IR сводится к Π_n-IR_0, и по лемме 3.10 Π_n-IR_0 сводится к Σ_n-IR, q.e.d.

Лемма 3.12. Π_n-$\mathsf{IR}_< \cong \Pi_n$-$\mathsf{IR}$, Σ_n-$\mathsf{IR}_< \cong \Sigma_n$-$\mathsf{IR}$.

Доказательство. Единственная нетривиальная сводимость здесь — это сведение Σ_n-$\mathsf{IR}_<$ к Σ_n-IR. (Заметим, что для $\varphi(x) \in \Sigma_n$ формула $\forall y \leq x\,\varphi(y)$, вообще говоря, не обязана быть эквивалентной Σ_n-формуле в EA.)

Допустим, что

$$T \vdash \forall x\,(\forall y < x\,\varphi(y) \to \varphi(x)), \tag{7}$$

где $\varphi(x) := \exists u\,\varphi_0(x,u)$, $\varphi_0(x,u) \in \Pi_{n-1}$. Положим

$$\psi(x) := \exists z \forall y \leq x\,\varphi_0(y,(z)_y).$$

Очевидно, $\psi(x) \in \Sigma_n$, и из (7) легко следует

$$T \vdash \psi(0) \wedge \forall x\,(\psi(x) \to \psi(x+1)).$$

Применяя Σ_n-IR один раз, получаем $\forall x\,\psi(x)$ и $\forall x \exists y\,\varphi_0(x,u)$, q.e.d.

Теперь мы рассмотрим некоторые правила, конгруэнтные схемам индукции. Среди таких правил наиболее очевидным является генценовское правило индукции “с боковыми формулами”. В гильбертовской формулировке оно может выглядеть, например, следующим образом:

$$\frac{\psi \to \forall x\,(\varphi(x) \to \varphi(x+1))}{\psi \to (\varphi(0) \to \forall x \varphi(x))}.$$

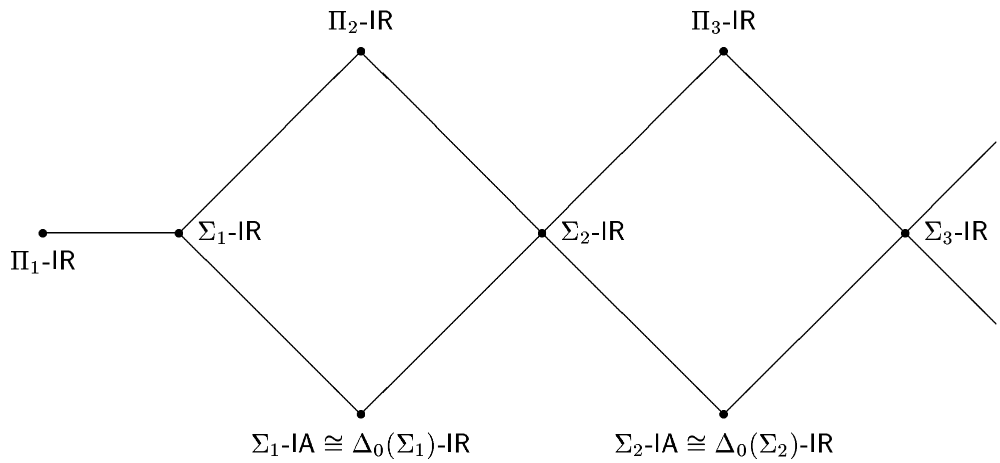

Рис. 2: Правила индукции ограниченной арифметической сложности. Иерархия по сводимости.

Хорошо известно, что если сложность индукционной формулы φ здесь ограничена классом Σ_n, это правило дает эквивалентную аксиоматизацию $I\Sigma_n$ над EA. Более того, для вывода любого примера схемы Σ_n-IA необходимо лишь одно применение этого правила. С другой стороны, любая теория, содержащая $I\Sigma_n$, замкнута относительно правила индукции с боковыми формулами, поэтому данное правило конгруэнтно Σ_n-IA.

Для данного множества формул Γ, $\Delta_0(\Gamma)$-*формулы* получаются из формул Γ с помощью булевых связок и ограниченных кванторов. Парсонс [28], по существу, установил следующий факт.

Лемма 3.13. $\Delta_0(\Sigma_n)$-IR $\cong \Sigma_n$-IA.

Доказательство. Чтобы вывести пример Σ_n-IA, применяем IR к следующей $\Delta_0(\Sigma_n)$-формуле:

$$\varphi(0) \wedge \forall x < a\, (\varphi(x) \to \varphi(x+1)) \to \forall x \leq a\, \varphi(x), \tag{8}$$

где $\varphi(x) \in \Sigma_n$.

Чтобы показать, что теория $T + \Sigma_n$-IA замкнута относительно $\Delta_0(\Sigma_n)$-IR для любой теории T, заметим, что известен более сильный факт: $I\Sigma_n$ содержит $\Delta_0(\Sigma_n)$-IA (см. [28] или [18], лемма 2.14, стр. 65), q.e.d.

Эта лемма интересна тем, что в стандартной модели арифметики класс $\Delta_0(\Sigma_n)$-отношений строго включен в класс Π_{n+1}-отншений, однако теория $I\Pi_{n+1}^R$, как мы отмечали выше, строго включена в $I\Sigma_n$. Этот эффект объясняется тем, что EA является достаточно слабой теорией и не исключает возможности того, что $\Delta_0(\Sigma_n)$-формулы могут иметь высокую арифметическую сложность.

Структура правил индукции относительно упорядочения по сводимости (и выводимости) представлена на следующей диаграмме (рис. 2). Из сводимостей, изображенных на диаграмме, нам осталось лишь установить редукцию Σ_n-IA к Σ_{n+1}-IR. Это вытекает из следующей леммы.

Лемма 3.14. [EA, Σ_{n+1}-IR] *содержит* $I\Sigma_n$.

Доказательство. Пример схемы индукции для Σ_n-формулы $\varphi(x)$ следует по правилу Σ_{n+1}-IR для Σ_{n+1}-формулы

$$\varphi(0) \wedge \forall y\, (\varphi(y) \to \varphi(y+1)) \to \varphi(x),$$

q.e.d.

Лемма 3.15. *Ни одно из правил* Π_{n+1}-IR *и* Σ_n-IA *не выводимо из другого, таким образом все сводимости, указанные на диаграмме, являются строгими.*

Доказательство. В самом деле, над EA схема Σ_n-IA строго сильнее Π_{n+1}-IR: по следствию 3.7 теория $\mathsf{EA}+\Pi_{n+1}$-IR не содержит $I\Sigma_n$. С другой стороны, над $I\Sigma_n$ правило Π_{n+1}-IR строго сильнее Σ_n-IA, например, по теореме 2, доказываемой в следующем параграфе.

По теореме 3, доказываемой в разделе 3, $[\mathsf{EA}, \Sigma_1\text{-}\mathsf{IR}]$ содержит $\mathsf{RFN}_{\Sigma_1}(\mathsf{EA})$, и следовательно не содержится ни в одном непротиворечивом расширении EA с помощью Π_1-предложений. В частности, $[\mathsf{EA}, \Sigma_1\text{-}\mathsf{IR}]$ не содержится в $\mathsf{EA}+\Pi_1$-IR, и это показывает, что правило Σ_1-IR не выводимо из Π_1-IR, q.e.d.

В заключение отметим без доказательства (см. [52]), что

$$\Pi_n\text{-}\mathsf{LR} \cong \Sigma_n\text{-}\mathsf{LR} \cong \Sigma_n\text{-}\mathsf{IA}.$$

Таким образом, в отличие от соответствующих схем аксиом правило порядковой индукции и правило наименьшего числа не являются взаимно выводимыми.

3.5 Характеризация правила Π_n-индукции

В этом параграфе мы даем инвариантную характеризацию правила Π_n-индукции в терминах схем рефлексии.

Определение 3.1. Для данной элементарно аксиоматизированной теории T правилом *метарефлексии над* T называется следующее правило вывода:

$$\mathsf{RR}_{\Pi_n}(T): \qquad \frac{\varphi}{\mathsf{RFN}_{\Pi_n}(T+\varphi)}.$$

Это же правило с ограничением $\varphi \in \Pi_m$ обозначается Π_m-$\mathsf{RR}_{\Pi_n}(T)$.

Обычно в качестве T мы будем рассматривать EA или чистое исчисление предикатов в арифметическом языке без символа экспоненты PC. Факт эквивалентности теорий EA и $I\Delta_0 + \mathsf{Exp}$ можно установить в EA, и при этом доказуемо сохраняются классы Π_n и Σ_n арифметической иерархии для $n \geq 1$. Отсюда, в силу конечной Π_2-аксиоматизируемости $I\Delta_0 + \mathsf{Exp}$, для любых $m \geq 2$, $n \geq 1$ имеем

$$\Pi_m\text{-}\mathsf{RR}_{\Pi_n}(\mathsf{PC}) \cong \Pi_m\text{-}\mathsf{RR}_{\Pi_n}(I\Delta_0 + \mathsf{Exp}) \cong \Pi_m\text{-}\mathsf{RR}_{\Pi_n}(\mathsf{EA}).$$

Следующая теорема получена в [47, 52].

Теорема 2. *(i)* Π_n-$\mathsf{IR} \cong \Pi_{n+1}$-$\mathsf{RR}_{\Pi_n}(\mathsf{EA})$ *для* $n > 1$*;*

(ii) Π_1-$\mathsf{IR} \cong \Pi_2$-$\mathsf{RR}_{\Pi_1}(\mathsf{EA})$ *(по модулю* EA^+*).*

Доказательство. Для редукции Π_n-IR к Π_{n+1}-$\mathsf{RR}_{\Pi_n}(\mathsf{EA})$ допустим, что теория T выводит

$$\varphi(0) \wedge \forall x\, (\varphi(x) \to \varphi(S(x))), \tag{9}$$

где мы можем предполагать, что φ не содержит дополнительных параметров. Заметим, что (9) логически эквивалентна некоторому Π_{n+1}-предложению, скажем ψ. Для каждого $n \in \mathbf{N}$ мы имеем $\mathsf{EA} + \psi \vdash \varphi(\overline{n})$, и, формализуя этот факт в EA, получаем

$$\mathsf{EA} \vdash \forall x\, \Box_{\mathrm{EA}+\psi}\, \varphi(\dot{x}).$$

С другой стороны, с помощью метарефлексии из ψ мы получаем

$$[T, \Pi_{n+1}\text{-}\mathsf{RR}_{\Pi_n}(\mathsf{EA})] \vdash \mathsf{RFN}_{\Pi_n}(\mathsf{EA} + \psi),$$

откуда

$$[T, \Pi_{n+1}\text{-}\mathsf{RR}_{\Pi_n}(\mathsf{EA})] \vdash \forall x \varphi(x),$$

что и требовалось.

Теперь нам нужно показать, что для T, содержащей EA (или EA^+ при $n = 1$),

$$[T, \Pi_n\text{-}\mathsf{IR}] \vdash \mathsf{RFN}_{\Pi_n}(\mathsf{EA} + \psi)$$

для любого предложения $\psi \in \Pi_{n+1}$ такого, что $T \vdash \psi$. Без ограничения общности мы можем считать, что T сформулирована в арифметическом языке без экспоненты и $T \equiv I\Delta_0 + \mathsf{Exp} + \psi$. Используя конечную аксиоматизируемость $I\Delta_0 + \mathsf{Exp}$ мы также предполагаем, что единственная нелогическая аксиома T имеет вид $\forall x_0 \ldots \forall x_m \neg\alpha(x_0, \ldots, x_m)$, где $\alpha \in \Pi_n$. В частности, эта формула аккумулирует все аксиомы равенства и конечную Π_2-аксиоматизацию $I\Delta_0 + \mathsf{Exp}$.

Для доказательства $\mathsf{RFN}_{\Pi_n}(T)$ мы рассматриваем в исчислении Тейта произвольные выводы без сечения секвенций вида

$$\exists x_0 \ldots \exists x_m\, \alpha(x_0, \ldots, x_m), \Pi,$$

где Π есть множество Π_n-формул. В этой ситуации непосредственно применима лемма 3.4: формула $\exists x_0 \ldots \exists x_m\, \alpha(x_0, \ldots, x_m)$, то есть отрицание аксиомы T, играет роль формулы σ. Параметр z в этом случае отсутствует.

Поскольку T содержит EA, по лемме 3.4

$$T \vdash I_\sigma(0) \wedge \forall h\, (I_\sigma(h) \to I_\sigma(h+1)).$$

Поэтому, по правилу Π_n-IR мы можем вывести

$$[T, \Pi_n\text{-}\mathsf{IR}] \vdash \forall h\, I_\sigma(h),$$

что влечет $\mathsf{RFN}_{\Pi_n}(T)$ над EA^+. Осталось заметить, что при $n > 1$ теория $[\mathsf{EA}, \Pi_n\text{-}\mathsf{IR}]$ содержит EA^+, q.e.d.

Пусть, для фиксированного $n \geq 1$, $(T)_k^n$ означает последовательность теорий, основанную на итерации схемы Π_n-рефлексии над T:

$$(T)_0^n := T, \quad (T)_{k+1}^n := (T)_k^n + \mathsf{RFN}_{\Pi_n}((T)_k^n), \quad (T)_\omega^n := \bigcup_{k \geq 0} (T)_k^n.$$

Аналогично, $[T, \Pi_n\text{-}\mathsf{IR}]_k$ определяется итерированным применением правила Π_n-IR:

$$[T, \Pi_n\text{-}\mathsf{IR}]_0 := T, \quad [T, \Pi_n\text{-}\mathsf{IR}]_{k+1} := [[T, \Pi_n\text{-}\mathsf{IR}]_k, \Pi_n\text{-}\mathsf{IR}].$$

Очевидно,

$$T + \Pi_n\text{-}\mathsf{IR} \equiv \bigcup_{k \geq 0} [T, \Pi_n\text{-}\mathsf{IR}]_k.$$

Поскольку схема $\mathsf{RFN}_{\Pi_n}(T)$ конечно аксиоматизируема, теорема 2 может быть применена несколько раз, и мы получаем следующее следствие.

Следствие 3.16. *Пусть T — конечная Π_{n+1}-аксиоматизированная теория, содержащая* EA *(или* EA^+ *для $n = 1$). Тогда*

$$T + \Pi_n\text{-}\mathsf{IR} \equiv (T)^n_\omega.$$

Более того, для каждого $k \geq 1$ имеет место

$$[T, \Pi_n\text{-}\mathsf{IR}]_k \equiv (T)^n_k.$$

Так, k-кратное применение правила индукции в точности соответствует k-раз итерированной схеме рефлексии над T.

Следствие 3.17. $I\Pi^R_{n+1} \equiv (\mathsf{EA})^{n+1}_\omega$ *для любого $n \geq 1$.*

Отметим, что замыкание произвольной теории T относительно Π_n-IR является объединением теорий вида $F + \Pi_n$-IR для всех конечных Π_{n+1}-аксиоматизированных подтеорий $F \subseteq T$, поэтому следствие 3.16 фактически дает характеризацию замыканий произвольных содержащих EA теорий относительно Π_n-IR.

Интересный частный случай следствия 3.16 относится к правилу индукции для Π_1-формул.

Следствие 3.18. *Для конечных Π_2-аксиоматизированных теорий T, содержащих* EA^+,

$$T + \Pi_1\text{-}\mathsf{IR} \equiv T_\omega \equiv T + \mathsf{Con}(T) + \mathsf{Con}(T + \mathsf{Con}(T)) + \ldots \tag{10}$$

Следствие 3.19. *Для Π_{n+1}-аксиоматизированных теорий T, содержащих* EA *(или* EA^+ *для $n = 1$), теория $T + \Pi_n$-IR не является конечно аксиоматизируемой, при условии её непротиворечивости.*

Следствие 3.20. *Теории $I\Pi^R_n$ для $n > 1$, а также теория* $\mathsf{EA}^+ + \Pi_1$-IR*, не являются конечно аксиоматизируемыми.*

Замечание 3.21. Инвариантная характеризация правила Π_1-IR с точностью до конгруэнтности по модулю EA может быть получена на основе идей работы Уилки и Париса [45]. В этой ситуации семейство формул непротиворечивости T в смысле доказуемости с рангом сечений $\leq k$, $\mathsf{Con}_k(T)$ для $k \geq 0$, играет роль единственной формулы $\mathsf{Con}(T)$. Известно, что EA достаточно сильна, чтобы вывести теорему об устранении сечения для любого фиксированного ранга ([18], с. 376). Остальные рассуждения в доказательстве теоремы 2 проходят без существенных изменений и дают следующий результат:

$$\Pi_1\text{-}\mathsf{IR} \cong \frac{\varphi}{\mathsf{Con}_k(\mathsf{EA} + \varphi)},$$

где $k \in \mathbf{N}$, $\varphi \in \Pi_2$. В силу результатов [45] отсюда также следует, что $I\Pi^R_1$ не является конечно аксиоматизируемой теорией.

4 Доказуемо тотальные рекурсивные функции

4.1 Базисные результаты

В этом параграфе мы рассматриваем доказуемо тотальные рекурсивные функции (д.т.р.ф.) арифметических теорий и характеризуем такие функции для замыканий теорий относительно правила Σ_1-IR. Применяемая техника основывается на теореме Эрбрана и является стандартной для этих вопросов.

Мы будем иметь дело с различными классами числовых функций. Для некоторого класса K через $\mathbf{C}(K)$ обозначим замыкание $K \cup \mathcal{E}$ относительно композиции. $[K, \mathbf{PR}]$ обозначает замыкание $K \cup \mathcal{E}$ относительно композиции и однократного применения примитивной рекурсии, то есть класс $\mathbf{C}(F)$, где F есть множество всех функций $f(n, \vec{a})$, определимых схемой

$$\begin{cases} f(0, \vec{a}) &= g(\vec{a}) \\ f(n+1, \vec{a}) &= h(f(n, \vec{a}), n, \vec{a}) \end{cases}$$

для $g, h \in \mathbf{C}(K)$. $\mathbf{E}(K)$ есть элементарное замыкание K, то есть класс всех функций, получающихся из $K \cup \mathcal{E}$ замыканием относительно композиции и ограниченной минимизации.

Определение 4.1. Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется *доказуемо тотальной рекурсивной* в теории T, если график f представим (в стандартной модели) Σ_1-формулой $\psi(x_1, \ldots, x_n, y)$ такой, что

$$T \vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n \exists ! y \, \psi(x_1, \ldots, x_n, y).$$

Класс д.т.р.ф. теории T обозначается $\mathcal{F}(T)$ и представляет собой важную характеристику теории T.

Для теорий T, содержащих EA, класс $\mathcal{F}(T)$ содержит $\mathcal{E}$ и замкнут относительно композиции, но не обязательно элементарно замкнут. Это создает определенные трудности, иметь дело с элементарно замкнутыми классами функций технически проще. Иногда рассматривают д.т.р.ф. *с элементарными графиками*, то есть для элементарных формул ψ. Эти классы функций замкнуты относительно ограниченной минимизации, но не относительно композиции. Однако, имеет место следующее очевидное предложение.

Предложение 4.1. *Для любой теории T, содержащей EA, всякая д.т.р.ф. может быть получена композицией д.т.р.ф. с элементарным графиком и фиксированной элементарной функции.*

Доказательство. Пусть формула $\psi(\vec{x}, y) := \exists z \, \psi_0(z, \vec{x}, y)$, где ψ_0 элементарна, определяет график f, так что

$$T \vdash \forall \vec{x} \exists ! y \, \psi(\vec{x}, y).$$

Используя стандартное кодирование пар, положим

$$\varphi(\vec{x}, y) := \psi_0((y)_0, \vec{x}, (y)_1) \wedge \forall z < (y)_0 \, \neg \psi_0(z, \vec{x}, (y)_1).$$

Тогда нетрудно видеть, что φ определяет некоторую д.т.р.ф. g в T, φ элементарна, и $f(n) = (g(n))_1$ для всех n, q.e.d.

Поскольку $\mathcal{F}(T)$ зависит лишь от Π_2-фрагмента теорий T, мы сконцентрируем внимание на Π_2-аксиоматизированных теориях.

Определение 4.2. Пусть $\pi := \forall x \exists y\, \varphi(x,y) \in \Pi_2$, где формула φ элементарна. Функция $f(x)$ называется *свидетелем* формулы π, если $\forall x\, \varphi(x, f(x))$ истинна в стандартной модели арифметики.

Любое истинное Π_2-предложение имеет свидетеля. Функция $f_\pi(x)$, график которой определен формулой $\varphi(x,y) \wedge \forall z < y\, \neg\varphi(x,z)$, называется *стандартным свидетелем* π.

Предложение 4.2. *Пусть T — конечная Π_2-аксиоматизированная корректная теория, содержащая* EA*, и пусть f — стандартный свидетель единственной аксиомы T. Тогда $\mathcal{F}(T) = \mathbf{C}(f)$.*

Доказательство. Очевидно, f есть д.т.р.ф. в T, и значит $\mathbf{C}(f) \subseteq \mathcal{F}(T)$. Противоположное включене более или менее непосредственно получается из теоремы Эрбрана. Рассмотрим чисто универсальную аксиоматизацию EA в языке с символами для всех элементарных функций и добавим в язык новый функциональный символ f вместе с аксиомой

$$\forall x\, \varphi(x, f(x)),$$

где $\forall x \exists y\, \varphi(x,y)$ — единственная аксиома T над EA. Используя подходящие элементарные термы, мы можем избавиться от всех ограниченных кванторов в φ. Поэтому получившаяся теория является консервативным расширением T и имеет чисто универсальную аксиоматизацию.

Допустим теперь, что $T \vdash \forall x \exists! y \exists z \psi_0(x,y,z)$, где ψ_0 элементарна (а в нашей формулировке эквивалентна бескванторной). Поскольку T имеет чисто универсальную аксиоматизацию, по теореме Эрбрана мы получаем термы $t_1, \dots, t_k, u_1, \dots, u_k$ расширенного языка, такие что

$$T \vdash \psi_0(a, t_1(a), u_1(a)) \vee \cdots \vee \psi_0(a, t_k(a), u_k(a)).$$

Очевидно, термы t_i и u_i представляют функции в $\mathbf{C}(f)$. Теперь мы полагаем

$$t(x) := \begin{cases} t_1(x), & \text{если } \psi_0(x, t_1(x), u_1(x)), \\ t_2(x), & \text{если } \psi_0(x, t_2(x), u_2(x)) \text{ и } \neg\psi_0(x, t_1(x), u_1(x)), \\ \dots & \dots \\ t_k(x), & \text{если } \psi_0(x, t_k(x), u_k(x)) \text{ и } \neg\psi_0(x, t_i(x), u_i(x)) \text{ для всех } i < k, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Функция $u(x)$ определяется аналогично, с термами u_i вместо t_i. Поскольку функция

$$\mathrm{Cond}(x,y,z) := \begin{cases} x, & \text{если } z = 0 \\ y, & \text{если } z \neq 0 \end{cases}$$

элементарна, класс $\mathbf{C}(f)$ замкнут относительно определений разбором случаев, и таким образом $t(x)$ и $u(x)$ определяются некоторыми $\mathbf{C}(f)$ термами. Для этих термов мы, очевидно, имеем $T \vdash \psi_0(a, t(a), u(a))$. Отсюда следует, что

$$T \vdash \forall x \exists z\, \psi_0(x, t(x), z),$$

и в силу функциональности ψ

$$T \vdash \forall x, y\, (t(x) = y \leftrightarrow \psi(x,y)).$$

Поскольку все теоремы T истинны, ψ представляет график $t(x)$ в стандартной модели, q.e.d.

Замечание 4.3. Фактически, мы показали, что $\mathcal{F}(T) \subseteq \mathbf{C}(f)$ для *любого* свидетеля f аксиомы T, не только для стандартного.

Следствие 4.4. *Пусть T — конечное Π_2-аксиоматизируемое корректное расширение* EA. *Тогда класс $\mathcal{F}(T)$ имеет конечный базис относительно композиции.*

Доказательство следует из предыдущего предложения и того факта, что $\mathcal{E}$ имеет конечный базис (см., например, [6, 26]).

Аккуратный анализ доказательства предложения 4.2 показывает, что существование конечного базиса в $\mathcal{E}$ может быть выведено из конечной аксиоматизируемости EA.

Рассмотрим конечную Π_1-аксиоматизацию EA в языке арифметики. Введем конечное число элементарных функций, чтобы бескванторно представить ограниченные части этих Π_1-аксиом. При этом получается чисто универсальное консервативное расширение EA. Повторение доказательства предложения 4.2 показывает, что каждая доказуемо тотальная рекурсивная функция EA представима термом расширенного языка. При этом в ходе рассуждения необходимо будет ввести еще некоторые элементарные функции, например $\mathrm{Cond}(x, y, z)$ и функции, кодирующие пары. Мы опускаем детали, q.e.d.

Замечание 4.5. Обращение предыдущего следствия не имеет места. Например, теория EA_ω расширяет EA множеством истинных Π_1-предложений, и поэтому имеет тот же самый, конечно базируемый класс д.т.р.ф., что и EA. Однако эта теория не конечно аксиоматизируема в силу теоремы Гёделя.

Предложение 4.6. *Пусть T — конечное Π_2-аксиоматизированное корректное расширение* EA, *и пусть f — стандартный свидетель единственной аксиомы T. Тогда*

$$\mathcal{F}([T, \Sigma_1\text{-}\mathsf{IR}]) = [\mathbf{C}(f), \mathbf{PR}].$$

Доказательство. Пусть $g(n, x)$ определена примитивной рекурсией

$$\begin{cases} g(0, x) &= e(x) \\ g(n+1, x) &= h(g(n, x), n, x), \end{cases}$$

где $e, h \in \mathbf{C}(f)$ и без ограничения общности мы рассматриваем единственный параметр x. Поскольку все функции из $\mathbf{C}(f)$ являются д.т.р.ф. в T, графики e и h определимы Σ_1-формулами $E(x, y) := \exists w\, E_0(w, x, y)$ и $H(z, n, x, y) := \exists v\, H_0(v, z, n, x, y)$ для некоторых элементарных формул H_0 и E_0.

График g наиболее естественно определяется (в стандартной модели) следующей формулой:

$$g(n, x) = y \leftrightarrow \exists s \in Seq\ ((s)_0 = e(x) \wedge \forall i < n\ (s)_{i+1} = h((s)_i, i, x) \wedge (s)_n = y).$$

Однако, в EA эта формула может не быть эквивалентной Σ_1-формуле. Мы модифицируем ее следующим образом (подобный прием был использован нами ранее в доказательстве предложения 3.12): $g(n, x) = y \leftrightarrow$

$$\exists w \exists s, v \in Seq[E_0(w, x, (s)_0) \wedge \forall i < n\ H_0((v)_i, (s)_i, i, x, (s)_{i+1}) \wedge (s)_n = y]. \quad (11)$$

Эта формула является Σ_1-формулой, и теперь мы покажем тотальность g в теории $[T, \Sigma_1\text{-}\mathsf{IR}]$.

Очевидно, $T \vdash \exists y\, g(0, x) = y$, поскольку $e(x)$ доказуемо тотальна. Чтобы показать

$$T \vdash \forall n\, (\exists y\, g(n, x) = y \rightarrow \exists y\, g(n+1, x) = y)$$

мы неформально рассуждаем следующим образом. Допустим $g(n,x) = y$, то есть нам даны две последовательности s и v длины $n+1$, удовлетворяющие (11). Нам нужно построить соответствующие последовательности длины $n+2$. Поскольку функция h доказуемо тотальна, мы можем найти z такой, что $h(y,n,x) = z$. Значит существует w такой, что имеет место $H_0(w,y,n,x,z)$. Возьмем любой такой w и добавим z к концу последовательности s, а w к концу v. Получившиеся последовательности такие, как и требовалось. Применяя Σ_1-IR мы получаем:

$$[T, \Sigma_1\text{-}\mathsf{IR}] \vdash \forall n \exists y\, g(n,x) = y.$$

Для доказательства функциональности g рассуждаем следующим образом. Пусть $R(n,w,s,v,x,y)$ означает элементарную часть формулы (11), то есть формулу в квадратных скобках, и допустим, что имеют место $R(n,w_1,s_1,v_1,x,y_1)$ и $R(n,w_2,s_2,v_2,x,y_2)$. Мы докажем $\forall i \leq n\ (s_1)_i = (s_2)_i$ индукцией по i (с параметрами n,w_j,s_j,v_j,x,y_j). Заметим, что эта индукция элементарна, хотя применяется здесь как схема, а не как правило. Базис и шаг индукции непосредственно следуют из функциональности e и h. Так мы получаем $(s_1)_n = (s_2)_n$, и поэтому $y_1 = y_2$. Заметим, что все это рассуждение формализуемо в T.

Теперь мы покажем, что д.т.р.ф. $[T, \Sigma_1\text{-}\mathsf{IR}]$ содержатся в $[\mathbf{C}(f), \mathbf{PR}]$. Поскольку $[T, \Sigma_1\text{-}\mathsf{IR}]$ есть корректная Π_2-аксиоматизированная теория, достаточно показать, что любая формула, получающаяся применением Σ_1-IR, имеет свидетеля в классе $[\mathbf{C}(f), \mathbf{PR}]$. (Здесь мы опираемся на замечание 4.3.)

Рассмотрим произвольную элементарную формулу $\varphi(x,y,a)$ такую, что

$$\begin{array}{lcl} T & \vdash & \exists y\, \varphi(0,y,a) \quad \text{и} \\ T & \vdash & \forall x\, (\exists y \varphi(x,y,a) \to \exists y \varphi(x+1,y,a)). \end{array}$$

По предложению 4.2 мы имеем функции $e(a)$ и $h(y,x,a)$ в $\mathbf{C}(f)$ такие, что e свидетельствует $\forall a \exists y\, \varphi(0,y,a)$, а h свидетельствует

$$\forall a,x,y \exists z\, (\varphi(x,y,a) \to \varphi(x+1,z,a)).$$

Рассмотрим примитивную рекурсию

$$\left\{ \begin{array}{rcl} g(0,a) & = & e(a) \\ g(x+1,a) & = & h(g(x,a),x,a). \end{array} \right.$$

Простая индукция по x показывает, что $\varphi(x,g(x,a),a)$ имеет место в стандартной модели для всех x и a. Это означает, что $g(x,a)$ свидетельствует $\forall x,a \exists y\, \varphi(x,y,a)$, q.e.d.

Следствие 4.7. *Для корректных Π_2-аксиоматизированных теорий T, содержащих* EA*,*

$$\mathcal{F}([T, \Sigma_1\text{-}\mathsf{IR}]) = [\mathcal{F}(T), \mathbf{PR}].$$

Доказательство. Достаточно заметить, что для таких T $\mathcal{F}([T, \Sigma_1\text{-}\mathsf{IR}])$ есть объединение $\mathcal{F}([T_0, \Sigma_1\text{-}\mathsf{IR}])$ для всех конечных подтеорий T_0 теории T, q.e.d.

Замечание 4.8. Заметим, что требование Π_2-аксиоматизируемости T в предыдущем следствии, вообще говоря, не может быть опущено. Пусть $T := \mathsf{EA}+S$, где S есть предложение $S_1 \to S_2$ и $S_i := \mathsf{RFN}_{\Pi_{i+1}}(\mathsf{EA})$ для $i = 1,2$. Очевидно, S — истинное Π_3-предложение. По теореме 3, доказываемой в разделе 5, $[\mathsf{EA}, \Sigma_1\text{-}\mathsf{IR}] \vdash S_1$; значит $[T, \Sigma_1\text{-}\mathsf{IR}] \vdash S_2$ и $\mathcal{F}([T, \Sigma_1\text{-}\mathsf{IR}])$ содержит все примитивно рекурсивные функции (по предложению 3.3 S_2 влечет $I\Sigma_1$ над EA.)

С другой стороны, S Π_2-консервативна над EA, поскольку для любого $\pi \in \Pi_2$ $\mathsf{EA} + S \vdash \pi$ влечет $\mathsf{EA} + \neg S_1 \vdash \pi$ и $\mathsf{EA} + \neg\pi \vdash S_1$. Так как $\neg\pi \in \Sigma_2$, по теореме 2.7 (ii) получаем $\mathsf{EA} \vdash \pi$. Следовательно, $\mathcal{F}(T)$ совпадает с $\mathcal{E}$, и класс $[\mathcal{F}(T), \mathbf{PR}]$ строго включен в класс примитивно рекурсивных функций, q.e.d.

4.2 Элементарное замыкание

Как было отмечено выше, класс $\mathcal{F}(T)$ не обязательно является элементарно замкнутым, даже если теория T содержит EA. Соответствующий пример построен в [54]. Здесь мы установим естественные достаточные условия элементарной замкнутости класса $\mathcal{F}(T)$. Вариант следующего предложения содержится в [26], где дано более сложное доказательство.

Для унарной функции $f(x)$ положим $\bar{f}(n) := \langle f(0), \ldots, f(n)\rangle$.

Предложение 4.9. $\mathbf{E}(f) = \mathbf{C}(\bar{f})$.

Доказательство. Очевидно, $\bar{f} \in \mathbf{E}(f)$, таким образом $\mathbf{C}(\bar{f}) \subseteq \mathbf{E}(f)$. Для противоположного включения мы докажем, что $\mu i \leq x\ g(i,\vec{y}) = 0 \in \mathbf{C}(\bar{f})$, если $g(x,\vec{y}) \in \mathbf{C}(\bar{f})$.

Пусть $(z \upharpoonright n)$ означает начальный сегмент последовательности z длины $n+1$. Эта функция, очевидно, элементарна. Так как $g \in \mathbf{C}(\bar{f})$, g может рассматриваться как терм в языке с символами для всех элементарных функций и функции $\bar{f}$. Мы систематически заменяем все вхождения подтермов вида $\bar{f}(t)$ в g на $(z \upharpoonright t)$, где z — новая переменная. (Безразлично, в каком порядке производить замену.) В результате получаем некоторую элементарную функцию $\tilde{g}(x,\vec{y},z)$. Положим

$$G(x,\vec{y},z) := \mu i \leq x\ \tilde{g}(i,\vec{y},z) = 0.$$

Мы утверждаем, что при всех $x, \vec{y}$

$$(\mu i \leq x\ g(i,\vec{y}) = 0) \quad = \quad G(x,\vec{y},\bar{f}(b(x,\vec{y})))$$

для некоторого терма $b(x,\vec{y}) \in \mathbf{C}(\bar{f})$. Для этого достаточно выбрать функцию $b(x,\vec{y})$ таким образом, чтобы

$$\forall i \leq x\ \forall z \geq b(x,\vec{y}) \quad g(i,\vec{y}) = \tilde{g}(i,\vec{y},\bar{f}(z)). \tag{12}$$

В свою очередь, для выполнения (12) нужно лишь обеспечить, чтобы значение $b(x,\vec{y})$ превосходило все значения $t(i,\vec{y})$ для $i \leq x$, где термы t входят в g в контексте $\bar{f}(t)$. Заметим, что $\bar{f}$ — возрастающая функция. Поэтому каждый терм $t(x,\vec{y})$ мажорируется некоторой возрастающей функцией из $\mathbf{C}(\bar{f})$, и мы можем взять сумму всех таких функций в качестве $b(x,\vec{y})$, q.e.d.

Отметим, что это предложение легко обобщается на случай нескольких функций.

Предложение 4.10. *Если функция $f(x)$ не убывает, и график f элементарен, то $\bar{f} \in \mathbf{C}(f)$ и $\mathbf{C}(f) = \mathbf{E}(f)$.*

Доказательство. Если f не убывает, то для некоторой элементарной функции b мы имеем

$$\bar{f}(n) = \mu z \leq b(n, f(n))\ \ \forall i \leq n\ (z)_i = f(i),$$

поскольку код последовательности оценивается элементарной функцией ее длины и наибольшего элемента $(= f(n))$, q.e.d.

Предложение 4.9 также имеет следующее полезное следствие.

Предложение 4.11. *Для любого класса функций K класс $[K, \mathbf{PR}]$ элементарно замкнут.*

Доказательство. Класс $[K, \mathbf{PR}]$ порождается всеми функциями из K, $\mathcal{E}$, и функциями $f(n,a)$, полученными примитивной рекурсией

$$\begin{cases} f(0,a) &= g(a) \\ f(n+1,a) &= h(f(n,a),n,a) \end{cases}$$

для $g, h \in \mathbf{C}(K)$. По предложению 4.9 достаточно показать, что вместе с любой такой f $[K, \mathbf{PR}]$ также содержит функцию $\bar{f}_1$, где $f_1(n) := f((n)_0, (n)_1)$.

Если $(n+1)_0 > 0$, то

$$\begin{aligned} f_1(n+1) &= f((n+1)_0, (n+1)_1) \\ &= h(f((n+1)_0 - 1, (n+1)_1), (n+1)_0 - 1, (n+1)_1) \\ &= h_1(f_1(p(n+1)), n) \end{aligned}$$

для некоторой $h_1 \in \mathbf{C}(K)$, где $p(n) := \langle (n)_0 - 1, (n)_1 \rangle$. Заметим, что $p(n+1) < n+1$, если $(n+1)_0 > 0$. (Стандартная функция $\langle x, y \rangle$, кодирующая пары, монотонна по обоим аргументам.) С другой стороны, если $(n+1)_0 = 0$, то, очевидно, $f_1(n+1) = g((n+1)_1)$. Отсюда следует, что $\bar{f}_1$ определима примитивной рекурсией

$$\bar{f}_1(n+1) = \begin{cases} \bar{f}_1(n) * \langle h_1((\bar{f}_1(n))_{p(n+1)}, n) \rangle, & \text{если } (n+1)_0 \neq 0 \\ \bar{f}_1(n) * \langle g((n+1)_1) \rangle, & \text{если } (n+1)_0 = 0, \end{cases} \qquad \text{q.e.d.}$$

Следствие 4.12. *Для любой корректной Π_2-аксиоматизированной теории T, содержащей EA, класс $\mathcal{F}([T, \Sigma_1\text{-}\mathsf{IR}])$ элементарно замкнут.*

Наконец, мы приведем технически очень полезное предложение, утверждающее, что для монотонной функции f схема индукции для предикатов, элементарных относительно f, эквивалентна схеме индукции для предикатов, элементарных относительно *графика* f. Этот факт, по существу, принадлежит Гайфману и Димитракопулосу [16]. Несколько более слабая версия содержится в [18], предложение 1.3, стр. 271, и мы близко следуем идее этих доказательств.

Пусть $\Delta_0(f)$ обозначает класс ограниченных формул в языке EA, обогащенном символами для всех элементарных функций и новым функциональным символом $f(x)$. В частности, f может входить в термы, ограничивающие кванторы. (Более корректным обозначением было бы $\Delta_0(\mathcal{E}, f)$, но для краткости мы всюду опускаем $\mathcal{E}$.) Пусть $F(x,y)$ обозначает формулу $f(x) = y$, определяющую график f. $\Delta_0(F)$-формулы — это формулы, получающиеся из $F(x,y)$ и элементарных формул с помощью булевых связок и кванторов, ограниченных элементарными функциями. Наконец, пусть EA^{mon} — теория в описанном выше языке, получающаяся добавлением к аксиомам EA аксиомы

$$\forall x, y\, (x \leq y \to f(x) \leq f(y)),$$

выражающей монотонность f.

Предложение 4.13. *Над теорией EA^{mon} схемы индукции для $\Delta_0(f)$-формул и $\Delta_0(F)$-формул дедуктивно эквивалентны.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что любой терм t в языке EA^{mon} доказуемо мажорируется некоторым термом, доказуемо возрастающим по всем переменным (поскольку любая элементарная функция мажорируема монотонной). Мы фиксируем такой терм для каждого терма t и обозначаем его $\tilde{t}$.

Лемма 4.14. *Для любого терма $s(\vec{a})$ найдется монотонный терм $t(\vec{a})$ и $\Delta_0(F)$-формула $\psi(\vec{a}, b, y)$, такая что*

$$\mathsf{EA}^{mon} \vdash \forall y \geq t(\vec{a})\, (s(\vec{a}) = b \leftrightarrow \psi(\vec{a}, b, y)).$$

Доказательство. Рассуждаем индукцией по построению s. Шаг индукции осуществляется следующим образом. Если $s(\vec{a})$ имеет вид $g(s_1(\vec{a}))$, где s_1 — терм, а g есть или f, или символ элементарной функции, то по предположению индукции найдется терм $t_1(\vec{a})$ и $\Delta_0(F)$-формула $\psi_1(\vec{a}, b, y)$ такие, что доказуемо в EA^{mon}

$$s_1(\vec{a}) = b \leftrightarrow \psi_1(\vec{a}, b, y)$$

для $y \geq t_1(\vec{a})$. Тогда мы полагаем

$$t(\vec{a}) := t_1(\vec{a}) + \widetilde{s_1}(\vec{a}),$$

и нетрудно видеть, что для $y \geq t(\vec{a})$ имеет место

$$g(s_1(\vec{a})) = b \leftrightarrow \exists v \leq y\ (\psi_1(\vec{a}, v, y) \wedge g(v) = b).$$

Аналогичная редукция применяется в случае, когда g имеет более одного аргумента, q.e.d.

Лемма 4.15. *Для любой $\Delta_0(f)$-формулы $\psi(\vec{a})$ существует $\Delta_0(F)$-формула $\psi_0(\vec{a}, y_1, \ \dots, y_n)$ и доказуемо монотонные термы $t_1(\vec{a})$, $t_2(\vec{a}, y_1)$, $\dots$, $t_n(\vec{a}, y_1, \dots, y_{n-1})$ такие, что*

$$\mathsf{EA}^{mon} \vdash \bigwedge\nolimits_{i=1}^{n} y_i \geq t_i(\vec{a}, y_1, \dots, y_{i-1}) \to (\psi(\vec{a}) \leftrightarrow \psi_0(\vec{a}, y_1, \dots, y_n)).$$

Доказательство. Рассуждаем индукцией по построению $\Delta_0(f)$-формулы ψ. Базис индукции получается по лемме 4.14, так что мы разбираем лишь наиболее трудный случай, когда ψ имеет вид

$$\forall u \leq s(\vec{a})\ \varphi(\vec{a}, u). \tag{13}$$

Применяя предположение индукции к $\varphi(\vec{a}, u)$, мы получаем $\Delta_0(F)$-формулу $\varphi_0(\vec{a}, u, y_1, \ \dots, y_n)$ и монотонные термы

$$s_1(\vec{a}, u), \dots, s_n(\vec{a}, u, y_1, \dots, y_{n-1})$$

такие, что доказуемо в EA^{mon}

$$\varphi_0(\vec{a}, u, y_1, \dots, y_n) \leftrightarrow \varphi(\vec{a}, u) \tag{14}$$

при условии $y_i \geq s_i(\vec{a}, u, y_1, \dots, y_{i-1})$ для всех $1 \leq i \leq n$. Кроме того, по лемме 4.14 мы получаем монотонный терм $r(\vec{a}, u)$ и $\Delta_0(F)$-формулу $\tau(\vec{a}, u, z)$ такие, что

$$\tau(\vec{a}, u, z) \leftrightarrow u \leq s(\vec{a})$$

для $z \geq r(\vec{a}, u)$.

Мы вводим две новые переменные, y_{n+1} и y_{n+2}, и определяем формулу $\psi_0(\vec{a}, y_1, \dots, y_{n+2})$ следующим образом:

$$\forall u \leq y_{n+1}\ (\tau(\vec{a}, u, y_{n+2}) \to \varphi_0(\vec{a}, u, y_1, \dots, y_n)). \tag{15}$$

Мы также полагаем

$$t_i(\vec{a}, y_1, \dots, y_{i-1}) := s_i(\vec{a}, \tilde{s}(\vec{a}), y_1, \dots, y_{i-1})$$

для $i \leq n$, и $t_{n+1}(\vec{a}, y_1, \dots, y_n) := \tilde{s}(\vec{a})$, $t_{n+2}(\vec{a}, y_1, \dots, y_{n+1}) := r(\vec{a}, y_{n+1})$.

Для доказательства леммы, то есть утверждения о том, что формула (15) доказуемо эквивалентна $\forall u \leq s(\vec{a})\ \varphi(\vec{a}, u)$ для y_i достаточно больших относительно друг друга, мы заметим сначала, что $u \leq y_{n+1}$ влечет $r(\vec{a}, u) \leq$

$r(\vec{a}, y_{n+1}) \leq y_{n+2}$ по доказуемой монотонности терма r и по выбору y_{n+2}. Отсюда следует, что при этих условиях $\tau(\vec{a}, u, y_{n+2})$ эквивалентна $u \leq s(\vec{a})$, что влечет $u \leq \tilde{s}(\vec{a})$, и по монотонности термов s_i для любого такого u мы имеем

$$
\begin{aligned}
&y_1 \geq t_1(\vec{a}) = s_1(\vec{a}, \tilde{s}(\vec{a})) \geq s_1(\vec{a}, u),\\
&y_2 \geq t_2(\vec{a}, y_1) = s_2(\vec{a}, \tilde{s}(\vec{a}), y_1) \geq s_2(\vec{a}, u, y_1),\\
&\ldots \qquad \ldots\\
&y_n \geq t_n(\vec{a}, y_1, \ldots, y_{n-1}) = s_n(\vec{a}, \tilde{s}(\vec{a}), y_1, \ldots, y_{n-1}) \geq s_n(\vec{a}, u, y_1, \ldots, y_{n-1}).
\end{aligned}
$$

Следовательно, применимо предположение индукции, и это дает (14). Отсюда легко заключить, что (13) влечет (15). Противоположная импликация получается аналогично, q.e.d.

Для завершения доказательства предложения 4.13 мы выведем $\Delta_0(f)$-индукцию в форме принципа наименьшего числа

$$\psi(x, \vec{a}) \to \exists x' \leq x\ (\psi(x', \vec{a}) \wedge \forall z < x'\ \neg\psi(z, \vec{a}))$$

для произвольной $\Delta_0(f)$-формулы $\psi(x, \vec{a})$. Мы применяем лемму 4.15 к ψ и рассуждаем в теории EA^{mon} вместе со схемой $\Delta_0(F)$-индукции следующим образом.

Допустим, что $\psi(x, \vec{a})$ и что $y_1, \ldots, y_n$ удовлетворяют посылке импликации в лемме 4.15, так что мы можем вывести $\psi_0(x, \vec{a}, \vec{y})$ из $\psi(x, \vec{a})$ (заметим, что некоторые такие $y_1, \ldots, y_n$ доказуемо существуют). Применяя принцип наименьшего числа для ψ_0, где переменные $\vec{y}$ и $\vec{a}$ играют роль параметров, мы получаем некоторый $x' \leq x$ такой, что

$$\psi_0(x', \vec{a}, \vec{y}) \wedge \forall z < x'\ \neg\psi_0(z, \vec{a}, \vec{y}).$$

Теперь заметим, что по монотонности термов t_i для всех $i \leq n$ мы имеем

$$t_i(x', \vec{a}, y_1, \ldots, y_{i-1}) \leq t_i(x, \vec{a}, y_1, \ldots, y_{i-1}),$$

и, таким образом, посылка импликации в лемме 4.15 удовлетворяется для x', также как и для любого $z < x'$ (по той же причине). Отсюда следует, что x' в самом деле является наименьшим числом, удовлетворяющим $\varphi(x, \vec{a})$, q.e.d.

Замечание 4.16. Фактически, мы доказали, что $\Delta_0(f)$-индукция следует из индукции для $\Delta_0(F)$-формул, все кванторы в которых ограничены переменными.

4.3 Универсальная функция

В этом параграфе мы показываем, что универсальная функция для класса д.т.р.ф. конечной Π_2-аксиоматизированной теории T принадлежит классу $[\mathcal{F}(T), \mathbf{PR}]$ и, следовательно, представима в $[T, \Sigma_1\text{-}\mathsf{IR}]$. В качестве побочного результата мы получаем новое доказательство теоремы Р. Петер (см. [8] и [32]) о том, что так называемая *простая гнездная рекурсия* сводится к примитивной рекурсии.

Пусть $f(x)$ — функция. Всякая функция из класса $\mathbf{C}(f)$ представима термом в языке, содержащем символ для f и конечное число функциональных символов для некоторого базиса в $\mathcal{E}$ (см. предложение 4.4). Мы называем эти функции *начальными*, а термы этого языка будем называть *f-термами*. Мы фиксируем естественную элементарную гёделеву нумерацию f-термов. Считаем, что все переменные упорядочены в фиксированную последовательность $x_0, x_1, \ldots$.

Универсальная функция или *функция означивания* $\mathsf{eval}_f(e,x)$ для f-термов определяется следующим образом:

$$\mathsf{eval}_f(e,x) := \begin{cases} t((x)_0,\dots,(x)_n), & \text{если } e = \ulcorner t \urcorner \text{ для } f\text{-терма } t(x_0,\dots,x_n), \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Нам будет также технически удобно объединить два аргумента $\mathsf{eval}_f(e,x)$ в один и ввести функции $\mathsf{eval}'_f(x) := \mathsf{eval}_f((x)_0,(x)_1)$ и

$$\overline{\mathsf{eval}}_f(x) := \langle \mathsf{eval}'_f(0),\dots,\mathsf{eval}'_f(x)\rangle.$$

Предложение 4.17. $[\mathbf{C}(f),\mathbf{PR}] = \mathbf{C}(\mathsf{eval}_f) = \mathbf{C}(\overline{\mathsf{eval}}_f)$

Доказательство. Сначала мы покажем, что eval_f и $\overline{\mathsf{eval}}_f$ принадлежат $[\mathbf{C}(f),\mathbf{PR}]$. Определение eval_f может быть очевидным образом представлено как возвратная рекурсия:

1. $\mathsf{eval}_f(e,x) := (x)_i$, если $e = \ulcorner x_i \urcorner$, где x_i есть i-я переменная,
2. $\mathsf{eval}_f(e,x) := h(\mathsf{eval}_f(\ulcorner t_0 \urcorner,x),\dots,\mathsf{eval}_f(\ulcorner t_m \urcorner,x))$, если $e = \ulcorner h(t_0,\dots,t_m)\urcorner$ и h — начальная функция,
3. $\mathsf{eval}_f(e,x) := 0$, в противном случае.

Поскольку имеется лишь конечное число начальных функций, это определение имеет вид определения разбором случаев. Случаи являются элементарно распознаваемыми по предположению о естественности кодирования f-термов. Хорошо известно, что возвратная рекурсия, определяющая eval_f, сводится к обычной примитивной рекурсии для функции $\overline{\mathsf{eval}}_f$, из которой eval_f восстанавливается по формуле

$$\mathsf{eval}_f(e,x) = (\overline{\mathsf{eval}}_f(\langle e,x\rangle))_{\langle e,x\rangle}. \tag{16}$$

Теперь мы покажем, что $\mathbf{C}(\mathsf{eval}_f)$ содержит $[\mathbf{C}(f),\mathbf{PR}]$. Рассмотрим примитивно рекурсивное определение

$$\begin{cases} g(0,\vec{a}) &=& g_0(\vec{a}) \\ g(n+1,\vec{a}) &=& h(g(n,\vec{a}),n,\vec{a}) \end{cases}$$

для некоторых f-термов $g_0(\vec{a})$ и $h(x,y,\vec{a})$. Мы выразим $g(n,\vec{a})$ в виде

$$\mathsf{eval}_f(s(n),\langle\vec{a}\rangle)$$

для некоторой функции $s(n)$, которую следует найти. Пусть $\mathrm{num}(n)$ обозначает гёделев номер константного f-терма со значением n, и пусть функция $\mathrm{Sub}_{xy}(e,i,j)$ вычисляет гёделев номер f-терма, получающегося одновременной подстановкой f-термов с номерами i и j вместо переменных x и y, соответственно, в f-терм e. Легко видеть, что функции Sub и num элементарны. Тогда мы можем определить $s(n)$ следующим образом:

$$\begin{cases} s(0) &:=& \ulcorner g_0 \urcorner \\ s(n+1) &:=& \mathrm{Sub}_{xy}(\ulcorner h \urcorner, s(n), \mathrm{num}(n)). \end{cases} \tag{17}$$

Индукцией по n нетрудно убедиться в том, что $s(n)$ есть гёделев номер f-терма $t_n(\vec{a})$ такого, что $t_n(\vec{a}) = g(n,\vec{a})$ для всех $\vec{a}$. Следовательно, $\mathsf{eval}_f(s(n),\langle\vec{a}\rangle) = g(n,\vec{a})$ для всех $\vec{a}$ и n. Таким образом, остается лишь показать, что примитивная рекурсия (17) ограничена. Пусть $|t|$ означает длину (= число символов) терма с индексом t. Для Sub мы имеем следующую оценку:

$$|\mathrm{Sub}_{xy}(e, i, j)| \leq C \cdot |e| \cdot \max(|i|, |j|),$$

поскольку общее число вхождений переменных x и y в терм e не превосходит $|e|$. С другой стороны, длина терма $\mathrm{num}(n)$ линейна по n. Таким образом, для достаточно больших n мы имеем:

$$|s(n+1)| \leq C_1 \cdot |s(n)|.$$

Следовательно, $|s(n)|$ растет не более чем экспоненциально, и, тем самым, $s(n)$ оценивается двойной экспонентой, q.e.d.

Отметим два непосредственных следствия доказанного предложения.

Следствие 4.18. *Класс* $[\mathbf{C}(f), \mathbf{PR}]$ *конечно базируем.*

Следствие 4.19. *Класс* $\mathbf{C}(\mathsf{eval}_f)$ *элементарно замкнут.*

Другое интересное следствие есть редукция *простой гнездной рекурсии* к примитивной рекурсии. Гнездно рекурсивное определение может иметь, например, следующий вид:

$$\begin{cases} g(0, a) &= g_0(a) \\ g(n+1, a) &= h_0(g(n, h_1(g(n, a), a)), n, a). \end{cases}$$

В общем случае разрешаются вхождения g-термов произвольной гнездности в правой части определения, но g должна входить лишь в контексте $g(n, \cdot)$, то есть первый аргумент должен быть всегда равен n. Старый результат Р.Петер состоит в том, что простая гнездная рекурсия сводима к примитивной, и это соотносится с нашей задачей следующим образом.

Предположим, что мы хотим вычислить значение терма $t(u(x))$, где t и u — сложные термы. Делая это наиболее прямолинейным образом, мы должны сначала означить u, а затем t, то есть

$$\mathsf{eval}_f(\ulcorner t(u) \urcorner, x) = \mathsf{eval}_f(\ulcorner t \urcorner, \mathsf{eval}_f(\ulcorner u \urcorner, \langle x \rangle)).$$

Заметим, что eval_f входит гнездно в правую часть этого равенства. Процедура означивания, предписываемая предложением 4.17, другая: мы рассматриваем термы t и u как разложенные на начальные функции и означиваем лишь одну такую функцию за один шаг. Это, вообще говоря, более длинный процесс, хотя он приводит к тому же результату.

Естественное правило вывода для доказательства тотальности функций, определяемых гнездной рекурсией, есть правило Π_2-индукции, а не правило Σ_1-IR, которое a priori подходит лишь для примитивно рекурсивных определений. Мы получаем уточненную версию результата Петер как простое обобщение предыдущего предложения.

Следствие 4.20. *Замыкание класса функций* K*, содержащего* $\mathcal{E}$*, относительно композиции и однократного применения простой гнездой рекурсии совпадает с* $[K, \mathbf{PR}]$.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что K имеет вид $\mathbf{C}(f)$. Теперь мы буквально следуем нашему доказательству второй части предложения 4.17. Функция $g(n, \vec{a})$, определяемая гнездной рекурсией из $\mathbf{C}(f)$, представима в виде $\mathsf{eval}_f(s(n), \langle \vec{a} \rangle)$ для подходящей элементарной функции s.

Оценка на порядок роста функции s, однако, несколько хуже, чем ранее. Для достаточно больших n мы имеем

$$|s(n+1)| \leq C \cdot |s(n)|^k,$$

где k есть максимум глубины гнездности в определении g. Это означает, что s растет не быстрее, чем тройная экспонента, q.e.d.

Пусть T — конечное Π_2-аксиоматизированное расширение EA, и пусть f — стандартый свидетель единственной аксиомы T. Вспомним, что график f определяется элементарной формулой. Мы покажем, что функция означивания f-термов может быть естественно представлена в $[T, \Sigma_1\text{-}\mathsf{IR}]$, и что ее основные свойства доказуемы в этой теории.

Без ограничения общности считаем, что T формулируется в языке, содержащем символы для f и конечного числа начальных элементарных функций. Из предложений 4.6 и 4.17 мы знаем, что eval_f доказуемо рекурсивна в $[T, \Sigma_1\text{-}\mathsf{IR}]$, а значит ее график определим некоторой Σ_1-формулой. Эта формула считывается с примитивно рекурсивного определения eval_f с использованием формализации примитивной рекурсии (11) в доказательстве предложения 4.6. Следующее несколько более точное наблюдение будет существенно для нас ниже.

Лемма 4.21. *График функции $\overline{\mathsf{eval}}_f$ элементарен и естественно определяется элементарной формулой.*

Доказательство. Формула $\overline{\mathsf{eval}}_f(x) = y$ выражает утверждение о том, что y есть последовательность длины $x+1$ такая, что для всех $u \leq x$

1. если $(u)_0$ есть гёделев номер i-й переменной, то $(y)_u = ((u)_1)_i$;
2. если $(u)_0$ есть гёделев номер f-терма $h(t_1, \dots, t_m)$ для начальной функции h и некоторых термов $t_1, \dots, t_m$ (чьи гёделевы номера $j_1, \dots, j_m$ заведомо меньше $(u)_0$), то $(y)_u = h((y)_{\langle j_1, (u)_1 \rangle}, \dots, (y)_{\langle j_m, (u)_1 \rangle})$;
3. $(y)_u = 0$, иначе.

Подчеркнем, что пункт 2 этого определения может быть сформулирован лишь отдельно для каждой индивидуальной начальной функции h. Поскольку график f элементарен, такова и вышеприведенная формула, q.e.d.

Лемма 4.22. $[T, \Sigma_1\text{-}\mathsf{IR}] \vdash \forall x \exists! y\, \overline{\mathsf{eval}}_f(x) = y$.

Доказательство. Это — частный случай предложения 4.6. Для определения, данного в лемме 4.21, тотальность $\overline{\mathsf{eval}}_f$ легко доказывается с помощью однократного применения правила $\Sigma_1\text{-}\mathsf{IR}_<$, которое конгруэнтно $\Sigma_1\text{-}\mathsf{IR}$. Функциональность $\overline{\mathsf{eval}}_f$ доказывается в T как в доказательстве предложения 4.6, q.e.d.

Следствием этой леммы является тот факт, что в теории $[T, \Sigma_1\text{-}\mathsf{IR}]$ можно ввести символ для функции $\overline{\mathsf{eval}}_f$, а значит и для eval_f. Поскольку определения $\overline{\mathsf{eval}}_f$ и eval_f естественны, пункты 1–3 из доказательства предложения 4.17 доказуемы в $[T, \Sigma_1\text{-}\mathsf{IR}]$, и мы получаем следующее утверждение.

Лемма 4.23. *В теории $[T, \Sigma_1\text{-}\mathsf{IR}]$ доказуемо:*

1. “e кодирует i-ю переменную” $\to \mathsf{eval}_f(e, x) = (x)_i$;
2. $\bigwedge_{i=0}^{m}$“e_i кодирует терм” $\to$

   $$\mathsf{eval}_f(\mathrm{Sub}_{x_0 \cdots x_m}(\ulcorner h \urcorner, e_0, \dots, e_m), x) = h(\mathsf{eval}_f(e_0, x), \dots, \mathsf{eval}_f(e_m, x))$$

   для любой начальной функции $h(x_0, \dots, x_m)$.

Отсюда вытекает следующее стандартное следствие.

Предложение 4.24. *Для любого f-терма $t(x_0, \dots, x_n)$*

$$[T, \Sigma_1\text{-}\mathsf{IR}] \vdash \mathsf{eval}_f(\ulcorner t \urcorner, \langle x_0, \dots, x_n \rangle) = t(x_0, \dots, x_n).$$

Доказательство: внешняя индукция по построению терма t, q.e.d.

Чтобы использовать индуктивное определение (случаи 1–3) функции eval_f нам необходима индукция для формул, включающих eval_f.

Предложение 4.25. *Теория $[T, \Sigma_1\text{-}\mathsf{IR}]$ содержит схему индукции для $\Delta_0(\mathsf{eval}_f)$-формул.*

Доказательство. Вспомним, что eval_f определялась через функцию $\overline{\mathsf{eval}}_f$, и заметим два факта: (a) график $\overline{\mathsf{eval}}_f$ элементарен, по лемме 4.21; (b) функция $\overline{\mathsf{eval}}_f$ доказуемо возрастает в теории $[T, \Sigma_1\text{-}\mathsf{IR}]$, в силу монотонности кодирования последовательностей. По предложению 4.13, $\Delta_0(\overline{\mathsf{eval}}_f)$-индукция сводится к элементарной индукции, то есть доказуема в $[T, \Sigma_1\text{-}\mathsf{IR}]$. Остается заметить, что $\Delta_0(\mathsf{eval}_f)$-формулы транслируются в $\Delta_0(\overline{\mathsf{eval}}_f)$-формулы с помощью (16), q.e.d.

Следствие 4.26. *В теории $[T, \Sigma_1\text{-}\mathsf{IR}]$ доказуемо, что для всех термов $t(z)$ от одной переменной и всех термов u,*

$$\mathsf{eval}_f(\mathrm{Sub}_z(\ulcorner t \urcorner, \ulcorner u \urcorner), x) = \mathsf{eval}_f(\ulcorner t \urcorner, \langle \mathsf{eval}_f(\ulcorner u \urcorner, x) \rangle).$$

Доказательство: $\Delta_0(\mathsf{eval}_f)$-индукция по построению t с параметрами u и x, q.e.d.

Аналогичное утверждение также имеет место и для термов t, зависящих от более чем одной свободной переменной z.

4.4 Определение истинности

Пусть T — конечная Π_2-аксиоматизированная теория, содержащая EA. Мы вводим новый символ f для стандартного свидетеля единственной аксиомы T и конечное число функциональных символов для некоторого базиса в $\mathcal{E}$ таким образом, чтобы T получила чисто универсальную аксиоматизацию в расширенном языке. Для нас также существенно, что язык T конечен, и что T имеет лишь конечное число аксиом.

Мы знаем, что $[T, \Sigma_1\text{-}\mathsf{IR}]$ имеет естественную функцию означивания eval_f для f-термов. С ее помощью мы строим определение истинности для бескванторных формул расширенного языка. Следующая лемма хорошо известна.

Лемма 4.27. *Для любой бескванторной формулы $\varphi(\vec{a})$ найдется терм $\chi_\varphi(\vec{a})$ такой, что*

$$T \vdash \varphi(\vec{a}) \leftrightarrow \chi_\varphi(\vec{a}) = 0. \tag{18}$$

Доказательство. Заметим, что доказуемо в T

$$\begin{aligned} t_1(\vec{a}) \leq t_2(\vec{a}) \quad &\leftrightarrow \quad t_1(\vec{a}) \dot{-} t_2(\vec{a}) = 0, \\ \varphi(\vec{a}) \wedge \psi(\vec{a}) \quad &\leftrightarrow \quad \chi_\varphi(\vec{a}) + \chi_\psi(\vec{a}) = 0, \\ \neg\varphi(\vec{a}) \quad &\leftrightarrow \quad 1 \dot{-} \chi_\varphi(\vec{a}) = 0, \end{aligned}$$

если термы χ_φ и χ_ψ удовлетворяют эквивалентности (18) для формул φ и ψ. Утверждение леммы получается отсюда с помощью индукции по построению φ, q.e.d.

Очевидно, функция

$$\mathrm{trm} : \ulcorner\varphi\urcorner \mapsto \ulcorner\chi_\varphi\urcorner$$

элементарна, и лемма 4.27 формализуема в EA. Мы полагаем:

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{Sat}_f(e,a) & := & (\mathsf{eval}_f(\mathrm{trm}(e),a)=0), \\ \mathsf{True}_f(e) & := & \text{“}e \text{ есть номер бескванторного предложения”} \wedge \mathsf{Sat}_f(e,\langle\ \rangle). \end{array}$$

Лемма 4.28. *Для любой атомарной формулы* $\varphi(x_0,\dots,x_n)$

$$[T,\Sigma_1\text{-}\mathsf{IR}] \vdash \mathsf{Sat}_f(\ulcorner\varphi\urcorner,\langle x_0,\dots,x_n\rangle) \leftrightarrow \varphi(x_0,\dots,x_n),$$

где x_i *есть* i*-я переменная.*

Доказательство. Рассмотрим атомарную формулу вида $t_1(\vec{x}) \leq t_2(\vec{x})$. Тогда в $[T,\Sigma_1\text{-}\mathsf{IR}]$ доказуемо:

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{Sat}_f(\ulcorner t_1 \leq t_2\urcorner,\langle\vec{x}\rangle) & \leftrightarrow & \mathsf{eval}_f(\mathrm{trm}(\ulcorner t_1 \leq t_2\urcorner),\langle\vec{x}\rangle)=0 \\ & \leftrightarrow & \mathsf{eval}_f(\ulcorner t_1 \dot{-} t_2\urcorner,\langle\vec{x}\rangle)=0 \\ & \leftrightarrow & t_1(\vec{x}) \dot{-} t_2(\vec{x}) = 0, \quad \text{по предложению 4.24} \\ & \leftrightarrow & t_1(\vec{x}) \leq t_2(\vec{x}), \end{array}$$

q.e.d.

Лемма 4.29. *В* $[T,\Sigma_1\text{-}\mathsf{IR}]$ *доказуемо, что для любых бескванторных формул* φ, ψ

(i) $\mathsf{Sat}_f(\ulcorner\varphi\wedge\psi\urcorner,a) \leftrightarrow (\mathsf{Sat}_f(\ulcorner\varphi\urcorner,a)\wedge\mathsf{Sat}_f(\ulcorner\psi\urcorner,a))$;

(ii) $\mathsf{Sat}_f(\ulcorner\neg\varphi\urcorner,a) \leftrightarrow \neg\mathsf{Sat}_f(\ulcorner\varphi\urcorner,a)$.

Доказательство. В $[T,\Sigma_1\text{-}\mathsf{IR}]$ доказуемо:

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{Sat}_f(\ulcorner\varphi\wedge\psi\urcorner,a) & \leftrightarrow & \mathsf{eval}_f(\mathrm{trm}(\ulcorner\varphi\wedge\psi\urcorner),a)=0 \\ & \leftrightarrow & \mathsf{eval}_f(\ulcorner\chi_\varphi+\chi_\psi\urcorner,a)=0 \\ & \leftrightarrow & \mathsf{eval}_f(\mathrm{trm}(\ulcorner\varphi\urcorner),a)+\mathsf{eval}(\mathrm{trm}(\ulcorner\psi\urcorner),a)=0 \\ & \leftrightarrow & (\mathsf{eval}_f(\mathrm{trm}(\ulcorner\varphi\urcorner),a)=0\wedge\mathsf{eval}_f(\mathrm{trm}(\ulcorner\psi\urcorner),a)=0) \\ & \leftrightarrow & (\mathsf{Sat}_f(\ulcorner\varphi\urcorner,a)\wedge\mathsf{Sat}_f(\ulcorner\psi\urcorner,a)). \end{array}$$

Часть (ii) получается аналогично, q.e.d.

Следствие 4.30. *Для любой бескванторной формулы* $\varphi(x_0,\dots,x_n)$

$$[T,\Sigma_1\text{-}\mathsf{IR}] \vdash \mathsf{Sat}_f(\ulcorner\varphi\urcorner,\langle x_0,\dots,x_n\rangle) \leftrightarrow \varphi(x_0,\dots,x_n).$$

Лемма 4.31. *В теории* $[T,\Sigma_1\text{-}\mathsf{IR}]$ *доказуемо, что для любой бескванторной формулы* $\varphi(x_0,\dots,x_n)$ *и любых термов* $t_0,\dots,t_n$

$$\mathsf{Sat}_f(\ulcorner\varphi(t_0,\dots,t_n)\urcorner,x) \leftrightarrow \mathsf{Sat}_f(\ulcorner\varphi\urcorner,\langle\mathsf{eval}_f(\ulcorner t_0\urcorner,x),\dots,\mathsf{eval}_f(\ulcorner t_n\urcorner,x)\rangle). \qquad (19)$$

Доказательство. Это, по существу, вытекает из леммы 4.26 и следующего верифицируемого в EA свойства функции trm, которое нетрудно усмотреть из доказательства леммы 4.27. Для любой бескванторной формулы $\varphi(x_0,\ldots,x_n)$ и любых термов $t_0,\ldots,t_n$

$$\mathrm{trm}(\ulcorner\varphi(t_0,\ldots,t_n)\urcorner) = \mathrm{Sub}_{x_0\ldots x_n}(\mathrm{trm}(\ulcorner\varphi\urcorner),\ulcorner t_0\urcorner,\ldots,\ulcorner t_n\urcorner), \tag{20}$$

q.e.d.

Лемма 4.32. *В теории* $[T,\Sigma_1\text{-}\mathsf{IR}]$ *доказуемо, что для любой бескванторной формулы* $\varphi(x_0,\ldots,x_n)$

$$\mathsf{True}_f(\ulcorner\varphi(\dot{x}_0,\ldots,\dot{x}_n)\urcorner) \leftrightarrow \mathsf{Sat}_f(\ulcorner\varphi\urcorner,\langle x_0,\ldots,x_n\rangle). \tag{21}$$

Доказательство. Сначала с помощью $\Delta_0(\mathsf{eval}_f)$-индукции устанавливается

$$\forall x\, \mathsf{eval}_f(\ulcorner\overline{x}\urcorner,\langle\ \rangle) = x.$$

Отсюда (21) получается как следствие (19), где t_i есть терм $\overline{x}_i$, q.e.d.

5 Характеризация правила Σ_n-индукции

Полученные в предыдущем разделе результаты позволяют дать естественную инвариантную характеризацию правила Σ_n-индукции в терминах схем рефлексии. Мы начинаем с простого случая правила Σ_1-индукции. Затем мы распространяем эту характеризацию на случай произвольного n с помощью сколемизации некоторого специального типа.

5.1 Правило Σ_1-индукции

Следующая теорема даёт инвариантную характеризацию правила Σ_1-индукции в терминах правила метарефлексии.

Теорема 3. $\Sigma_1\text{-}\mathsf{IR} \cong \Pi_2\text{-}\mathsf{RR}_{\Pi_2}(\mathsf{EA})$.

Доказательство. Так же как в доказательстве теоремы 2, для редукции $\Sigma_1\text{-}\mathsf{IR}$ к $\Pi_2\text{-}\mathsf{RR}_{\Pi_2}(\mathsf{EA})$ допустим, что теория T выводит

$$\varphi(0) \wedge \forall x\, (\varphi(x) \to \varphi(x+1)), \tag{22}$$

где мы можем предполагать, что $\varphi \in \Sigma_1$ не содержит дополнительных параметров. Заметим, что (22) логически эквивалентна некоторому Π_2-предложению, скажем ψ. Для каждого $n \in \mathbf{N}$ мы имеем $\mathsf{EA} + \psi \vdash \varphi(\overline{n})$, и, формализуя этот факт в EA, получаем

$$\mathsf{EA} \vdash \forall x\, \Box_{\mathsf{EA}+\psi}\, \varphi(\dot{x}).$$

С другой стороны, с помощью метарефлексии из ψ мы получаем

$$[T, \Pi_2\text{-}\mathsf{RR}_{\Pi_2}(\mathsf{EA})] \vdash \mathsf{RFN}_{\Pi_2}(\mathsf{EA} + \psi),$$

откуда

$$[T, \Pi_2\text{-}\mathsf{RR}_{\Pi_2}(\mathsf{EA})] \vdash \forall x \varphi(x),$$

что и требовалось.

Для обратной редукции достаточно показать, что

$$[\mathsf{EA} + T, \Sigma_1\text{-}\mathsf{IR}] \vdash \mathsf{RFN}_{\Sigma_1}(T)$$

для любой конечной Π_2-аксиоматизированной теории T. По модулю работы, проделанной в предшествующих параграфах, рассуждение подобно нашему доказательству теоремы 2.

Как и выше, рассмотрим чисто универсальную формулировку теории T в языке, содержащем конечное число начальных элементарных функций и стандартного свидетеля f единственной нелогической Π_2-аксиомы T, аккумулирующей, в частности, все аксиомы равенства. Пусть эта аксиома имеет вид $\forall x_0 \ldots \forall x_m \neg\alpha(x_0, \ldots, x_m)$, где α — бескванторная формула. Рассмотрим вывод без сечений секвенции вида $\exists x_0 \ldots \exists x_m\, \alpha(x_0, \ldots, x_m), \Delta$, где Δ — множество бескванторных предложений. По свойству подформульности любая формула, входящая в этот вывод, или (a) имеет вид $\exists x_k \ldots \exists x_m\, \alpha(t_0, \ldots, t_{k-1}, x_k, \ldots, x_m)$ для некоторых $0 \le k \le m$ и термов $t_0, \ldots, t_{k-1}$, или (b) бескванторна. Далее, поскольку правило введения квантора общности не применяется, без ограничения общности мы можем считать, что все формулы, входящие в вывод, замкнуты. (В противном случае мы можем подставить 0 вместо любой свободной переменной всюду в выводе). Мы называем выводы, удовлетворяющие этому условию, *нормальными*.

Лемма 5.1. *В теории $[T, \Sigma_1\text{-}\mathsf{IR}]$ доказуема равномерная схема рефлексии для бескванторных формул относительно нормальной доказуемости в T, то есть утверждение:*

> Если секвенция Γ, Δ, где Δ — множество бескванторных предложений, а Γ — множество формул типа (a) выше, имеет нормальный вывод, то $\mathsf{True}_f(\ulcorner \bigvee \Delta \urcorner)$.

Доказательство. Рассуждение, по существу, повторяет доказательство леммы 3.4 и даже проще последнего, хотя имеются незначительные формальные различия. Рассуждая в $[T, \Sigma_1\text{-}\mathsf{IR}]$, рассмотрим нормальный вывод p секвенции Γ, Δ. По условию нормальности, любой подвывод q вывода p имеет такой же вид, и его гёделев номер не превосходит номера p. Индукцией по высоте h вывода q мы доказываем следующее:
$(*)$
"Для любых h,q, если q есть подвывод p высоты h, и заключительная секвенция q имеет вид Γ', Δ', где Γ' типа (a), а Δ' бескванторна, то $\mathsf{True}_f(\ulcorner \bigvee \Delta' \urcorner)$."

Отметим, что квантор по всем подвыводам q в этом утверждении ограничен p, а p играет роль свободной переменной. Таким образом, проводимая индукция является примером схемы $\Delta_0(\mathsf{eval}_f)$-индукции, допустимой в $[T, \Sigma_1\text{-}\mathsf{IR}]$ по предложению 4.25.

Как обычно, мы рассматриваем несколько случаев, в зависимости от вида последнего применения правила в q. Случаи логических аксиом и правил введения булевых связок легко рассматриваются на основе леммы 4.29. Мы разберем единственный нетривиальный случай правила введения квантора существования непосредственно перед α, то есть когда применение правила имеет вид

$$\frac{\Gamma'', \alpha(t_0, \ldots, t_{m-1}, t_m), \Delta'}{\Gamma'', \exists x_m \alpha(t_0, \ldots, t_{m-1}, x_m), \Delta'}.$$

По предположению индукции и лемме 4.29 мы получаем, что имеет место

$$\mathsf{True}_f(\ulcorner \alpha(t_0, \ldots, t_{m-1}, t_m) \urcorner) \vee \mathsf{True}_f(\ulcorner \bigvee \Delta' \urcorner).$$

Допустим $\mathsf{True}_f(\ulcorner \alpha(t_0, \ldots, t_m) \urcorner)$, тогда по (19) мы получаем

$$\mathsf{Sat}_f(\ulcorner \alpha \urcorner, \langle \mathsf{eval}_f(\ulcorner t_0 \urcorner, \langle\,\rangle), \ldots, \mathsf{eval}_f(\ulcorner t_m \urcorner, \langle\,\rangle) \rangle)$$

в силу замкнутости термов t_i, откуда

$$\alpha(\mathsf{eval}_f(\ulcorner t_0 \urcorner, \langle\,\rangle), \ldots, \mathsf{eval}_f(\ulcorner t_m \urcorner, \langle\,\rangle))$$

следует по лемме 4.30. Это влечет $\exists y_0 \ldots \exists y_m\ \alpha(y_0, \ldots, y_m)$ и противоречие в $[T, \Sigma_1\text{-}\mathsf{IR}]$.

Таким образом, мы доказали $(*)$, откуда можем вывести, рассматривая заключительную секвенцию вывода p, что имеет место $\mathsf{True}_f(\ulcorner \bigvee \Delta \urcorner)$, q.e.d.

Теперь мы завершаем доказательство теоремы 3. Так как $[\mathsf{EA}, \Sigma_1\text{-}\mathsf{IR}]$ содержит EA^+ и, следовательно, доказывает теорему об устранении сечения, достаточно вывести схему Σ_1-рефлексии для теории T в смысле доказуемости без сечения. Мы рассуждаем в $[T, \Sigma_1\text{-}\mathsf{IR}]$ следующим образом.

Допустим, что формула $\exists x_0 \sigma(x_0, \overline{n})$ доказуема в T без сечений, где формула $\sigma(x_0, x_1)$ бескванторна. Поскольку T имеет чисто универсальную аксиоматизацию, по формализованной теореме Эрбрана, как в доказательстве предложения 4.2, мы получаем замкнутый f-терм t и нормальный вывод секвенции $\exists x_0 \ldots \exists x_m\ \alpha(x_0, \ldots, x_m), \sigma(t, \overline{n})$. Отсюда, по лемме 5.1 мы можем заключить, что имеет место $\mathsf{True}_f(\ulcorner \sigma(t, \overline{n}) \urcorner)$. Таким образом, $\mathsf{Sat}_f(\ulcorner\sigma(x_0,\overline{n})\urcorner, \langle \mathsf{eval}_f(\ulcorner t\urcorner, \langle\ \ \rangle)\rangle)$ по лемме 4.31. Следовательно, $\sigma(\mathsf{eval}_f(\ulcorner t\urcorner, \langle\ \rangle), \overline{n})$ по лемме 4.30, откуда вытекает $\exists y\, \sigma(y, \overline{n})$, q.e.d.

Следствие 5.2. *Пусть T — конечная Π_2-аксиоматизированная теория, содержащая* EA. *Тогда*

$$T + \Sigma_1\text{-}\mathsf{IR} \equiv (T)^2_\omega.$$

Более того, для каждого $k \geq 1$ имеет место

$$[T, \Sigma_1\text{-}\mathsf{IR}]_k \equiv (T)^2_k.$$

Так, k-кратное применение правила Σ_1-индукции в точности соответствует k-раз итерированной схеме Π_2-рефлексии над T.

Поскольку замыкание произвольной теории T относительно Σ_1-IR является объединением теорий вида $F + \Sigma_1$-IR для всех конечных Π_2-аксиоматизированных подтеорий $F \subseteq T$, следствие 5.2 фактически дает характеризацию замыканий произвольных содержащих EA теорий относительно Σ_1-IR.

Следствие 5.3. *Для Π_2-аксиоматизированных теорий T, содержащих* EA, $[T, \Sigma_1\text{-}\mathsf{IR}] \equiv [T, \Pi_2\text{-}\mathsf{IR}]$ *и тем более* $T + \Sigma_1\text{-}\mathsf{IR} \equiv T + \Pi_2\text{-}\mathsf{IR}$.

Отметим, что это следствие обобщает известный результат Парсонса [28] об эквивалентности теорий $I\Sigma_1^R$ и $I\Pi_2^R$.

Следствие 5.4. $I\Sigma_1^R \equiv (\mathsf{EA})^2_\omega \equiv I\Pi_2^R$.

Следствие 5.3 также позволяет распостранить на Σ_1-IR все результаты об аксиоматизируемости, полученные нами для правила Π_2-индукции. Однако, эти результаты применимы к Π_2-аксиоматизированным теориям, а не Π_3-аксиоматизированным, как в случае Π_2-IR.

Следствие 5.5. *Для Π_2-аксиоматизированных теорий T, содержащих* EA, *теория* $T + \Sigma_1\text{-}\mathsf{IR}$ *не является конечно аксиоматизируемой при условии ее непротиворечивости.*

С другой стороны, ясный анализ классов д.т.р.ф. теорий, аксиоматизированных правилом Σ_1-IR, позволяет нам в качестве следствия получить следующий результат Зига [38] для Π_2-IR.

Следствие 5.6. *Доказуемо тотальные рекурсивные функции теорий*

$$[\mathsf{EA}, \Pi_2\text{-}\mathsf{IR}]_k \equiv [\mathsf{EA}, \Sigma_1\text{-}\mathsf{IR}]_k$$

совпадают с классом $\mathcal{E}^{3+k}$ иерархии Гжегорчика.

Доказательство. Это следует из хорошо известного факта (см. [36]), что классы иерархии Гжегорчика получаются из $\mathcal{E}$ итерированным применением оператора примитивной рекурсии, который соответствует Σ_1-IR по следствию 4.7, q.e.d.

5.2 Релятивизация

Цель этого параграфа — переформулировка теоремы 3 для языка с дополнительными функциональными символами. Пусть $\kappa(x)$ — числовая функция. Релятивизированные аналоги классов функций из доказательства теоремы 3 определяются следующим образом.

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^\kappa &:= \mathbf{E}(\kappa), \\ \mathbf{C}^\kappa(K) &:= \mathbf{C}(K \cup \mathcal{E}^\kappa). \end{aligned}$$

Заметим, что $\mathbf{C}^\kappa(f) = \mathbf{C}(\overline{\kappa}, f)$ по предложению 4.9.

Напомним, что $\Delta_0(\kappa)$ означает класс ограниченных формул в языке EA, обогащенном символами для всех элементарных функций и функции κ. Σ_1^κ-формулы — это формулы вида

$$\exists x_1 \ldots \exists x_n\, \varphi(x_1, \ldots, x_n),$$

где $\varphi \in \Delta_0(\kappa)$. Классы Σ_n^κ и Π_n^κ-формул определяются аналогично.

Релятивизированная элементарная арифметика EA^κ формулируется в языке с символами для всех функций из $\mathcal{E}$ и функции κ. В дополнение к аксиомам EA (в языке, расширенном символами для всех элементарных функций) она имеет схему аксиом индукции для $\Delta_0(\kappa)$-формул. Эта формулировка EA^κ не является чисто универсальной из-за наличия ограниченных кванторов в схеме индукции. Мы показываем, как переформулировать эту теорию чисто универсальным образом.

Во-первых, покажем, что график функции $\overline{\kappa}$ (см. §4.2) можно определить $\Delta_0(\kappa)$-формулой и доказать в EA^κ, что эта формула задает тотальную функцию. Определяем вспомогательную функцию $t(x)$

$$t(x) := \mu z \leq x.\ \forall i \leq x\ \kappa(i) \leq \kappa(z).$$

График t, очевидно, $\Delta_0(\kappa)$-определим, и, поскольку $t(x) = y \to y \leq x$ доказуемо в EA^κ, тотальность $t(x)$ легко установить с помощью $\Delta_0(\kappa)$-индукции по x. Затем мы вводим функциональный символ для t и определяем $m(x) := \kappa(t(x))$. Нетрудно видеть, что доказуемо в EA^κ

$$\exists i \leq x\ \kappa(i) = m(x) \wedge \forall i \leq x\ \kappa(i) \leq m(x),$$

таким образом $m(x) = \max_{i \leq x} \kappa(x)$. Теперь мы определяем график $\overline{\kappa}$ следующим образом:

$$\overline{\kappa}(x) = y :\leftrightarrow y \in Seq \wedge lh(y) = x + 1 \wedge \forall i \leq x\ (y)_i = \kappa(i).$$

Чтобы показать

$$\forall x \exists! y\, \overline{\kappa}(x) = y \tag{23}$$

заметим, что в силу монотонности кодирования последовательностей

$$\overline{\kappa}(x) = \mu y.\ \ y \in Seq \wedge lh(y) = x + 1 \wedge \forall i \leq x\ \kappa(i) \leq (y)_i.$$

Значит, для данного x мы можем найти последовательность

$$y = \langle m(x), \ldots, m(x) \rangle,$$

мажорирующую κ на интервале $[0, x]$. Затем применяем принцип наименьшего числа для $\Delta_0(\kappa)$-формул и находим минимальный такой y. Это доказывает (23).

Следующие два полезных свойства функции $\overline{\kappa}$ очевидно доказуемы в EA^κ.

(i) $\forall x\, (\overline{\kappa}(x) \in Seq \wedge lh(\overline{\kappa}(x)) = x + 1)$,

(ii) $\forall x, y\, (x \leq y \to \overline{\kappa}(x) = \overline{\kappa}(y) \upharpoonright x)$.

В частности, второе свойство показывает, что $\overline{\kappa}$ является доказуемо возрастающей функцией. По предложению 4.13 мы знаем, что для таких функций $\Delta_0(\overline{\kappa})$-индукция сводится (над EA) к индукции для предикатов, элементарных относительно графика $\overline{\kappa}$, то есть для формул, построенных из $\overline{\kappa}(x) = y$ и элементарных формул с помощью булевых связок и кванторов, ограниченных элементарными функциями. Поскольку график $\overline{\kappa}$ принадлежит классу $\Delta_0(\kappa)$, отсюда вытекает, что схема $\Delta_0(\overline{\kappa})$-индукции содержится в EA^κ.

С другой стороны, пусть $\mathsf{EA}^{\overline{\kappa}}$ — теория в языке EA, обогащенном функциональными символами для всех элементарных функций и $\overline{\kappa}$. Аксиомами $\mathsf{EA}^{\overline{\kappa}}$ являются аксиомы EA вместе со схемой индукции для *бескванторных* формул и формулами (i) и (ii) выше. Обозначим через EA^{seq} теорию в языке $\mathsf{EA}^{\overline{\kappa}}$, аксиоматизированную лишь формулами (i) и (ii) над EA. Мы только что установили, что $\mathsf{EA}^{\overline{\kappa}}$ содержится, а точнее, интерпретируется, в EA^{κ}. Противоположное включение также имеет место.

Предложение 5.7. *$\mathsf{EA}^{\overline{\kappa}}$ содержит EA^{κ} при интерпретации $\kappa(x)$ как терма $(\overline{\kappa}(x))_x$.*

Доказательство. Во-первых, формализуя доказательство предложения 4.9, мы можем показать, что класс $\mathbf{C}(\overline{\kappa})$ доказуемо замкнут относительно ограниченной минимизации.

Лемма 5.8. *Для любой бескванторной формулы $\varphi(x,\vec{a})$ в языке $\mathsf{EA}^{\overline{\kappa}}$ мы можем эффективно указать терм $g(x,\vec{a})$ такой, что в EA^{seq} доказуемо*

$$\begin{array}{rcl} g(y,\vec{a})=z & \leftrightarrow & (\varphi(z,\vec{a})\wedge\forall x<z\ \neg\varphi(x,\vec{a}))\vee \\ & & (\forall x\leq y\neg\varphi(x,\vec{a})\wedge z=0). \end{array}$$

Очевидно, что любые два терма g_1, g_2, удовлетворяющие этому условию, доказуемо равны в EA^{seq}. Мы обозначим $g(x,\vec{a})$ через $\mu i\leq x\ \varphi(i,\vec{a})$.

Лемма 5.9. *Для любой $\Delta_0(\overline{\kappa})$-формулы $\varphi(\vec{a})$ найдется терм $\chi_\varphi(\vec{a})$ такой, что*

$$\mathsf{EA}^{seq}\vdash\forall\vec{x}\,(\varphi(\vec{x})\leftrightarrow\chi_\varphi(\vec{x})=0).$$

Доказательство. Индукция по построению φ. Атомарные формулы и булевы связки рассматриваются как в лемме 4.27:

$$\begin{array}{rcl} \chi_{t_1(\vec{a})\leq t_2(\vec{a})} & := & t_1(\vec{a})\dot{-}t_2(\vec{a}), \\ \chi_{\varphi(\vec{a})\wedge\psi(\vec{a})} & := & \chi_\varphi(\vec{a})+\chi_\psi(\vec{a}), \\ \chi_{\neg\varphi(\vec{a})} & := & 1\dot{-}\chi_\varphi(\vec{a}). \end{array}$$

Ограниченные кванторы переводятся, с использованием леммы 5.8, следующим образом:

$$\chi_{\forall x\leq t\ \varphi(x,\vec{a})}:=\big(\mu x\leq t\ \neg\varphi(x,\vec{a})\big)+\chi_\varphi(0,\vec{a}). \tag{24}$$

В силу леммы 5.8 в EA^{seq} доказуемо:

$$\begin{array}{rcl} \chi_{\forall x\leq t\ \varphi(x,\vec{a})}(\vec{a})=0 & \leftrightarrow & (\mu x\leq t\ \neg\varphi(x,\vec{a}))=0\wedge\chi_\varphi(0,\vec{a})=0 \\ & \leftrightarrow & \varphi(0,\vec{a})\wedge(\neg\varphi(0,\vec{a})\vee\forall x\leq t\ \varphi(x,\vec{a})) \\ & \leftrightarrow & \forall x\leq t\ \varphi(x,\vec{a}), \end{array}$$

q.e.d.

Из леммы 5.9 вытекает, что мы можем вывести все примеры $\Delta_0(\overline{\kappa})$-индукции в $\mathsf{EA}^{\overline{\kappa}}$. Поскольку функция κ определима термом $\kappa(x):=(\overline{\kappa}(x))_x$, отсюда следует, что $\Delta_0(\kappa)$-индукция сводится к $\Delta_0(\overline{\kappa})$-индукции и тем самым доказуема в $\mathsf{EA}^{\overline{\kappa}}$, q.e.d.

Предложение 5.10. *$\mathsf{EA}^{\overline{\kappa}}$ имеет чисто универсальную аксиоматизацию.*

Доказательство. В стандартной аксиоматизации $\mathsf{EA}^{\overline{\kappa}}$ все аксиомы бескванторной индукции

$$\varphi(0) \wedge \forall x \leq y\ (\varphi(x) \to \varphi(x+1)) \to \forall x \leq y \varphi(x)$$

являются $\Delta_0(\overline{\kappa})$-формулами. Их можно заменить на эквивалентные бескванторные формулы по модулю более слабой чисто универсальной теории EA^{seq}, q.e.d.

Теперь мы сформулируем релятивизированную версию теоремы 3.

Предложение 5.11. *По модулю* $\mathsf{EA}^{\overline{\kappa}}$ *правило* $\Sigma_1^{\overline{\kappa}}$-$\mathsf{IR}$ *конгруэнтно правилу* $\Pi_2^{\overline{\kappa}}$-$\mathsf{RR}(\Pi_2^{\overline{\kappa}})$.

Доказательство. Приведенное нами ранее доказательство теоремы 3 релятивизируется. Редукция $\Sigma_1^{\overline{\kappa}}$-$\mathsf{IR}$ к $\Pi_2^{\overline{\kappa}}$-$\mathsf{RR}(\Pi_2^{\overline{\kappa}})$ проходит без существенных изменений. Для доказательства обратной редукции нам надо установить, что если T — конечная $\Pi_2^{\overline{\kappa}}$-аксиоматизировнная теория, то

$$[\mathsf{EA}^{\overline{\kappa}} + T, \Sigma_1^{\overline{\kappa}}\text{-}\mathsf{IR}] \vdash \mathsf{RFN}_{\Sigma_1^{\overline{\kappa}}}(T).$$

Рассмотрим чисто универсальную формулировку $\mathsf{EA}^{\overline{\kappa}}$ и введем новый функциональный символ f для стандартного свидетеля единственной $\Pi_2^{\overline{\kappa}}$-аксиомы T. Вводя в язык T конечное число символов для элементарных функций и добавляя к T конечное число чисто универсальных аксиом $\mathsf{EA}^{\overline{\kappa}}$, мы можем считать, что график f задается бескванторной формулой, и что T имеет конечную чисто универсальную аксиоматизацию в языке с f. (Это следует по компактности из леммы 5.9 и предложения 5.10.)

Основные шаги в доказательстве теоремы 3 были следующими: (a) определение функции означивания f-термов с использованием лишь однократного применения примитивной рекурсии над $\mathbf{C}(f)$; (b) доказательство тотальности и естественных свойств функции eval_f в $[T, \Sigma_1\text{-}\mathsf{IR}]$; (c) доказательство того, что схема $\Delta_0(\mathsf{eval}_f)$-индукции допустима в $[T, \Sigma_1\text{-}\mathsf{IR}]$; (d) доказательство равномерного принципа рефлексии для бескванторных формул в теории T (в языке с f) с помощью $\Delta_0(\mathsf{eval}_f)$-индукции.

Поскольку $\mathbf{C}^{\overline{\kappa}}(f) = \mathbf{C}(\overline{\kappa}, f)$ и график f элементарен в $\overline{\kappa}$, как в лемме 4.21 мы получаем естественное $\Delta_0(\overline{\kappa})$-определение графика функции означивания $\overline{\mathsf{eval}}_f^{\overline{\kappa}}(x)$ термов в языке T. (Это сводится лишь к добавлению функции $\overline{\kappa}$ к списку начальных.) Для этого определения тотальность $\overline{\mathsf{eval}}_f^{\overline{\kappa}}(x)$ можно показать непосредственно, используя правило $\Sigma_1^{\overline{\kappa}}$-$\mathsf{IR}_<$, сводимое к $\Sigma_1^{\overline{\kappa}}$-$\mathsf{IR}$ как и в предложении 3.12. Это устанавливает релятивизацию леммы 4.22:

Лемма 5.12. $[\mathsf{EA}^{\overline{\kappa}} + T, \Sigma_1^{\overline{\kappa}}\text{-}\mathsf{IR}] \vdash \forall x \exists! y\ \overline{\mathsf{eval}}_f^{\overline{\kappa}}(x) = y$

Как следствие получаем, что функции $\overline{\mathsf{eval}}_f^{\overline{\kappa}}$ и $\mathsf{eval}_f^{\overline{\kappa}}$ представимы в $[\mathsf{EA}^{\overline{\kappa}} + T, \Sigma_1^{\overline{\kappa}}\text{-}\mathsf{IR}]$. Леммы 4.23 и 4.24 остаются без существенных изменений, подразумевая, что $\overline{\kappa}$ включена в список начальных функций. Затем мы получаем релятивизацию предложения 4.25.

Лемма 5.13. *Теория* $[\mathsf{EA}^{\overline{\kappa}} + T, \Sigma_1^{\overline{\kappa}}\text{-}\mathsf{IR}]$ *содержит схему индукции для ограниченных формул в языке* $\mathsf{EA}^{\overline{\kappa}}$*, расширенном функциональным символом для* $\mathsf{eval}_f^{\overline{\kappa}}$.

Это получается, как в доказательстве предложения 4.25, из того, что график f элементарен в $\overline{\kappa}$, и что функция $\overline{\mathsf{eval}}_f^{\overline{\kappa}}$ доказуемо монотонна. Здесь мы опираемся на следующую релятивизацию предложения 4.13.

Лемма 5.14. *Над теорией* $\mathsf{EA}^{\overline{\kappa}} + \forall x, y\,(x \le y \to f(x) \le f(y))$ *схемы индукции для* $\Delta_0(\overline{\kappa}, f)$*-формул и* $\Delta_0(\overline{\kappa}, F)$*-формул дедуктивно эквивалентны, где* F *есть формула* $f(x) = y$*, представляющая график* f*.*

Эта лемма получается как следствие предложения 4.13 для языка с двумя доказуемо монотонными функциями $\overline{\kappa}$ и f.

Функция означивания дает естественное определение истинности $\mathsf{True}^{\overline{\kappa}}_f(e)$ в теории $[\mathsf{EA}^{\overline{\kappa}} + T, \Sigma^{\overline{\kappa}}_1\text{-}\mathsf{IR}]$ для бескванторных предложений теории T. Условия Тарского следуют из свойств $\mathsf{eval}^{\overline{\kappa}}_f(e, x)$, как и ранее, и мы получаем релятивизацию лемммы 5.1.

Лемма 5.15. *Теория* $[\mathsf{EA}^{\overline{\kappa}} + T, \Sigma^{\overline{\kappa}}_1\text{-}\mathsf{IR}]$ *содержит схему равномерной рефлексии для бескванторных предложений* T *относительно доказуемости в* T *без сечения.*

Здесь мы существенно опираемся на тот факт, что T — конечная и чисто универсальная теория, условия Тарского для $\mathsf{True}^{\overline{\kappa}}_f(e)$ и допустимость схемы $\Delta_0(\mathsf{eval}^{\overline{\kappa}}_f)$-индукции. Теорема 5.11 получается отсюда обычным образом, q.e.d.

Замечание 5.16. Очевидно, аналог теоремы 5.11 также имеет место для расширений языка арифметики несколькими дополнительными функциональными символами $\overline{\kappa}$.

5.3 Правило Σ_n-индукции

В этом параграфе мы обобщаем результаты параграфа 5.1 на правило Σ_n-IR для произвольного $n > 1$. Наш основной результат формулируется следующим образом.

Теорема 4. *Для любого* $n > 1$ $\quad \Sigma_n\text{-}\mathsf{IR} \cong \Pi_{n+1}\text{-}\mathsf{RR}_{\Pi_{n+1}}(\mathsf{EA})$ *по модулю* $I\Sigma_{n-1}$*.*

Доказательство. Сведение Σ_n-IR к $\Pi_{n+1}\text{-}\mathsf{RR}_{\Pi_{n+1}}(\mathsf{EA})$ получается легко, аналогично теореме 3. Доказательство противоположного сведения, в целях ясности изложения, мы сначала приведем для случая $n = 2$.

Пусть T — конечное расширение $I\Sigma_1$, задаваемое над PC единственной Π_3-аксиомой

$$\tau := \forall u \exists v \forall w\, \tau_0(u, v, w),$$

где τ_0 элементарна. Пусть

$$\varphi(x) := \exists u \forall v\, \varphi_0(u, v, x)$$

— произвольная Σ_2-формула, где φ_0 элементарна. Нам необходимо показать, что

$$[T, \Sigma_2\text{-}\mathsf{IR}] \vdash \forall x\, (\Box_T \varphi(\dot{x}) \to \varphi(x)).$$

Для этого мы введём сколемовские функции, замещающие самые внутренние вхождения кванторов в τ и φ, то есть новые функциональные символы $\kappa(x)$ и $\nu(x)$ вместе со следующими аксиомами:

$$\forall u \le x\, [\exists w\, \neg\tau_0((u)_0, (u)_1, w) \to \exists w \le \nu(x)\, \neg\tau_0((u)_0, (u)_1, w)], \tag{25}$$

$$\forall u \le x\, [\exists v\, \neg\varphi_0((u)_0, v, (u)_1) \to \exists v \le \kappa(x)\, \neg\varphi_0((u)_0, v, (u)_1)]. \tag{26}$$

Пусть U — расширение $\mathsf{EA}^{\kappa,\nu}$ с помощью аксиом (25), (26) и аксиом, выражающих монотонность κ и ν:

$$\forall x, y\, (x \le y \to \kappa(x) \le \kappa(y)),$$
$$\forall x, y\, (x \le y \to \nu(x) \le \nu(y)).$$

Очевидно, U имеет $\Pi^{\kappa,\nu}_1$-аксиоматизацию.

Лемма 5.17. *Существует интерпретация* $(\cdot)^-$ *теории* U *в* $I\Sigma_1$ *такая, что:*

(a) $(\cdot)^-$ *тождественна на формулах в языке* EA *и коммутирует с булевыми связками и кванторами;*

(b) если $A \in \Sigma_1^{\overline{\kappa},\overline{\nu}}$, *то* $(A)^-$ *эквивалентна* Σ_2*-формуле в* $I\Sigma_1$.

Доказательство. График функции ν определяется формулой $\nu(x) = y$ естественно выражающей, что y есть наименьший z такой, что

$$\forall u \leq x\,[\exists w\,\neg\tau_0((u)_0,(u)_1,w) \to \exists w \leq z\,\neg\tau_0((u)_0,(u)_1,w)]. \qquad (27)$$

Заметим, что формула $\nu(x) = y$ принадлежит классу $\Delta_0(\Sigma_1)$. Чтобы доказать, что в $I\Sigma_1$ выводимо утверждение $\forall x\exists! y\ \nu(x) = y$, мы используем известный факт (см. [18], с. 69) о том, что $I\Sigma_1$ содержит так называемую *сильную схему подстановки* для Σ_1-формул A:

$$\forall x\exists y\forall u \leq x\,(\exists z A(u,z,a) \to \exists z \leq y A(u,z,a)).$$

Рассматривая $\neg\tau_0((u)_0,(u)_1,z)$ в качестве A, а затем применяя принцип наименьшего числа для Π_1-формул, мы выбираем единственный наименьший z, удовлетворяющий (27). Это показывает, что ν доказуемо тотальна и функциональна в $I\Sigma_1$. График κ определяется аналогично.

Непосредственно из определения κ и ν видно, что обе эти функции доказуемо монотонны в $I\Sigma_1$. Из предложения 4.13 следует, что схема индукции для $\Delta_0(\kappa,\nu)$-формул сводится над EA вместе с аксиомами (5.3) к схеме индукции для ограниченных формул относительно графиков ν и κ. Поскольку эти графики интерпретируются $\Delta_0(\Sigma_1)$-формулами, это означает, что $I\Sigma_1$ интерпретирует $\Delta_0(\kappa,\nu)$-индукцию. Легко видеть, что интерпретации аксиом (26) и (25) также доказуемы в $I\Sigma_1$, то есть $I\Sigma_1$ интерпретирует U.

Свойство (a) есть часть определения построенной интерпретации, а для доказательства свойства (b) достаточно установить, что каждая $\Delta_0(\overline{\kappa},\overline{\nu})$-формула является Δ_2-формулой в $I\Sigma_1$, то есть ее интерпретация эквивалентна как Σ_2, так и Π_2-формуле. По лемме 5.9, любая $\Delta_0(\overline{\kappa},\overline{\nu})$-формула эквивалентна бескванторной формуле в теории $\mathsf{EA}^{\overline{\kappa},\overline{\nu}}$. Бескванторные формулы очевидным образом $\mathsf{EA}^{\overline{\kappa},\overline{\nu}}$-эквивалентны Δ_1-формулам относительно графиков $\overline{\kappa}$ и $\overline{\nu}$. Поскольку графики $\overline{\kappa}$ и $\overline{\nu}$ являются $\Delta_0(\Sigma_1)$, и по известной теореме 2.25 (с. 68) из [18] $\Delta_0(\Sigma_1)$-формулы являются Δ_2 в $I\Sigma_1$, таковы будут и интерпретации произвольных $\Delta_0(\overline{\kappa},\overline{\nu})$-формул, q.e.d.

Замечание 5.18. Оба факта об $I\Sigma_1$, упоминаемые в доказательстве леммы, устанавливаются элементарными методами и их аналоги имеют место для теорий $I\Sigma_n$ при всех $n \geq 1$.

Очевидным следствием леммы 5.17 является консервативность теории U над $I\Sigma_1$ и тот факт, что эту консервативность можно формально обосновать в EA. (Можно заметить, что ниже нам фактически нужно будет проинтерпретировать лишь некоторый конечный фрагмент U, а для конечных теорий возможность формализации в EA очевидна.)

Теперь мы заметим, что функция

$$\nu'(u,v) := \mu z \leq \nu(\langle u,v\rangle).\ \neg\tau_0(u,v,z)$$

элементарна в ν, и по лемме 5.8 определима термом в $\mathsf{EA}^{\overline{\kappa},\overline{\nu}}$. По аксиоме (25) мы можем заключить, что в U доказуемо

$$\forall z \tau_0(u,v,z) \leftrightarrow \tau_0(u,v,\nu'(u,v)). \qquad (28)$$

Пусть теперь T^+ означает теорию в языке U, получающуюся добавлением к U аксиомы τ, то есть $T^+ := U + \tau$. В силу (28), T^+ имеет $\Pi_2^{\overline{\kappa},\overline{\nu}}$-аксиоматизацию. Кроме того, поскольку $T \equiv \mathsf{PC} + \tau$ содержит $I\Sigma_1$, T^+ является (доказуемо) консерватвным расширением T. В самом деле, для любой формулы A в языке теории T $T^+ \vdash A$ влечет $U \vdash \tau \to A$, откуда $I\Sigma_1 \vdash \tau \to A$ и $T \vdash A$, по лемме 5.17.

С помощью аналогичного рассужения мы получаем терм $\kappa'(u, x)$ теории $\mathsf{EA}^{\overline{\kappa},\overline{\nu}}$ такой, что

$$U \vdash \varphi(x) \leftrightarrow \exists u \varphi_0(u, \kappa'(u, x), x).$$

Поскольку T^+ есть доказуемо консервативное расширение T, это дает

$$\begin{aligned} \mathsf{EA} \vdash \Box_{T^+} \exists u \varphi_0(u, \kappa'(u, \dot{x}), \dot{x}) \quad &\leftrightarrow \quad \Box_{T^+} \varphi(\dot{x}) &(29)\\ &\leftrightarrow \quad \Box_T \varphi(\dot{x}). &(30)\end{aligned}$$

Теперь мы в состоянии применить теорему 5.11. Поскольку T^+ есть конечное и $\Pi_2^{\overline{\kappa},\overline{\nu}}$-аксиоматизированное расширение $\mathsf{EA}^{\overline{\kappa},\overline{\nu}}$, имеем

$$[T^+, \Sigma_1^{\overline{\kappa},\overline{\nu}}\text{-IR}] \vdash \forall x\, (\Box_{T^+} \exists u \varphi_0(u, \kappa'(u, \dot{x}), \dot{x}) \to \exists u \varphi_0(u, \kappa'(u, x), x)),$$

и отсюда (30) дает

$$[T^+, \Sigma_1^{\overline{\kappa},\overline{\nu}}\text{-IR}] \vdash \forall x\, (\Box_T \varphi(\dot{x}) \to \varphi(x)).$$

Значит, мы можем найти $\Sigma_1^{\overline{\kappa},\overline{\nu}}$-формулы $I_1(x), \ldots, I_k(x)$ такие, что для каждого i,

$$T^+ \vdash I_i(0) \wedge \forall x\, (I_i(x) \to I_i(x+1)), \tag{31}$$

и

$$T^+ + \{\forall x I_i(x) | i = 1, \ldots, k\} \vdash \forall x\, (\Box_T \varphi(\dot{x}) \to \varphi(x)). \tag{32}$$

Поскольку $(\cdot)^-$ коммутирует с булевыми связками и кванторами, из (31) мы получаем Σ_2-формулы $I_1^-(x), \ldots, I_k^-(x)$ такие, что

$$T \vdash I_i^-(0) \wedge \forall x\, (I_i^-(x) \to I_i^-(x+1))$$

для всех i. Поскольку (32) влечет

$$T + \{\forall x I_i^-(x) | i = 1, \ldots, k\} \vdash \forall x\, (\Box_T \varphi(\dot{x}) \to \varphi(x)),$$

отсюда следует, что

$$[T, \Sigma_2\text{-}\mathsf{IR}] \vdash \forall x\, (\Box_T \varphi(\dot{x}) \to \varphi(x)).$$

Это завершает доказательство теоремы 4 для случая $n = 1$.

Теперь мы изложим доказательство теоремы 4 для случая $n > 1$. Мы ограничимся лишь четными n, поскольку случай нечетного n отличается от четного, по существу, лишь обозначениями. Доказательство прямолинейно обобщает случай $n = 1$.

Пусть T — расширение $I\Sigma_{2n}$, аксиоматизированное над EA единственной Π_{2n+2}-формулой

$$\tau := \forall u_0 \exists v_0 \forall u_1 \exists v_1 \ldots \forall u_n \exists v_n\, \tau_0(u_0, v_0, \ldots, u_n, v_n),$$

где τ_0 элементарна, и пусть

$$\varphi(x) := \exists v_0 \forall u_1 \exists v_1 \ldots \forall u_n \exists v_n \, \varphi_0(x, v_0, \ldots, u_n, v_n)$$

— произвольная Σ_{2n+1}-формула, где φ_0 ограничена. Как и ранее, мы должны показать, что

$$[T, \Sigma_{2n+1}\text{-}\mathsf{IR}] \vdash \forall x \, (\Box_T \varphi(\dot{x}) \to \varphi(x)).$$

Обозначим, для $0 \leq k < n$,

$$\begin{array}{rcl}
\tau_{2k+1}(u_0, v_0, \ldots, u_{n-k}) & := & \exists v_{n-k} \forall u_{n-k+1} \ldots \exists v_n \, \tau_0 \\
\tau_{2k+2}(u_0, v_0, \ldots, v_{n-k-1}) & := & \forall u_{n-k} \exists v_{n-k} \ldots \exists v_n \, \tau_0 \\
\varphi_{2k+1}(x, v_0, \ldots, u_{n-k}) & := & \exists v_{n-k} \forall u_{n-k+1} \ldots \exists v_n \, \varphi_0 \\
\varphi_{2k+2}(x, v_0, \ldots, v_{n-k-1}) & := & \forall u_{n-k} \exists v_{n-k} \ldots \exists v_n \, \varphi_0
\end{array}$$

Очевидно, τ_{2k+1}, $\varphi_{2k+1} \in \Sigma_{2k+1}$ и τ_{2k+2}, $\varphi_{2k+2} \in \Pi_{2k+2}$. Затем мы вводим новые функциональные символы $\nu_1, \ldots, \nu_{2n}$ и $\kappa_1, \ldots, \kappa_{2n}$ и определяем следующие формулы:

$$\begin{array}{rcl}
\psi_{2k+1} & := & \forall x \, \forall z \leq x \, [\exists v_{n-k} \, \tau_{2k}((z)_0, \ldots, (z)_{2(n-k)}, v_{n-k}) \to \\
 & & \exists v_{n-k} \leq \nu_{2k+1}(x) \, \tau_{2k}((z)_0, \ldots, (z)_{2(n-k)}, v_{n-k})] \\
\psi_{2k+2} & := & \forall x \, \forall z \leq x \, [\exists u_{n-k} \neg \tau_{2k+1}((z)_0, \ldots, (z)_{2(n-k)-1}, u_{n-k}) \to \\
 & & \exists u_{n-k} \leq \nu_{2k+2}(x) \, \neg \tau_{2k+1}((z)_0, \ldots, (z)_{2(n-k)-1}, u_{n-k})] \\
\theta_{2k+1} & := & \forall x \, \forall z \leq x \, [\exists v_{n-k} \, \varphi_{2k}((z)_0, \ldots, (z)_{2(n-k)}, v_{n-k}) \to \\
 & & \exists v_{n-k} \leq \kappa_{2k+1}(x) \, \varphi_{2k}((z)_0, \ldots, (z)_{2(n-k)}, v_{n-k})] \\
\theta_{2k+2} & := & \forall x \, \forall z \leq x \, [\exists u_{n-k} \neg \varphi_{2k+1}((z)_0, \ldots, (z)_{2(n-k)-1}, u_{n-k}) \to \\
 & & \exists u_{n-k} \leq \kappa_{2k+2}(x) \, \neg \varphi_{2k+1}((z)_0, \ldots, (z)_{2(n-k)-1}, u_{n-k})]
\end{array}$$

Наконец, пусть теории U_m для $m = 1, \ldots, 2n$ получаются из $\mathsf{EA}^{\nu_1, \kappa_1, \ldots, \nu_m, \kappa_m}$ добавлением аксиом $\psi_1, \theta_1, \ldots, \psi_m, \theta_m$ вместе с аксиомами монотонности всех сколемовских функций в языке U_m:

$$\begin{array}{lcl}
x \leq y & \to & \nu_i(x) \leq \nu_i(y), \quad 1 \leq i \leq m; \\
x \leq y & \to & \kappa_i(x) \leq \kappa_i(y), \quad 1 \leq i \leq m.
\end{array}$$

Лемма 5.19. *Существует интерпретация $(\cdot)^-$ теории U_{2n} в $I\Sigma_{2n}$ такая, что для любого $1 \leq m \leq 2n$*

(a) $(\cdot)^-$ интерпретирует U_m в $I\Sigma_m$;

(b) $(\cdot)^-$ тождественна на формулах в языке EA и коммутирует с булевыми связками и кванторами;

(c) если $A \in \Sigma_1^{\overline{\nu}_1, \overline{\kappa}_1, \ldots, \overline{\nu}_m, \overline{\kappa}_m}$ то $(A)^-$ эквивалентна Σ_{m+1}-формуле в $I\Sigma_m$.

Доказательство, по существу, не отличается от доказательства леммы 5.17. Например, $\nu_{2k+1}(x)$ интерпретируется как наименьшее y такое, что

$$\begin{array}{l}
\forall z \leq x \, [\exists v_{n-k} \, \tau_{2k}((z)_0, \ldots, (z)_{2(n-k)}, v_{n-k}) \to \\
\quad \to \exists v_{n-k} \leq y \, \tau_{2k}((z)_0, \ldots, (z)_{2(n-k)}, v_{n-k})],
\end{array}$$

и аналогично для остальных функций. Тотальность ν_i и κ_i, для $i \leq m$, вместе с аксиомами ψ_i и θ_i следует из схемы сильной Σ_i-подстановки, которая допустима в $I\Sigma_m$ для $i \leq m$. Верификация аксиом монотонности также не вызывает трудностей.

Графики ν_i и κ_i интерпретируются как $\Delta_0(\Sigma_i)$-формулы. По предложению 4.13, схема $\Delta_0(\nu_1, \kappa_1, \dots, \nu_m, \kappa_m)$-индукции сводится к схеме индукции для формул, элементарных относительно графиков всех функций ν_i и κ_i для $1 \le i \le m$, то есть к $\Delta_0(\Sigma_m)$-индукции. Последняя содержится в $I\Sigma_m$, поэтому $I\Sigma_m$ интерпретирует $\mathsf{EA}^{\nu_1, \kappa_1, \dots, \nu_m, \kappa_m}$ и U_m.

Графики $\overline{\nu}_1, \overline{\kappa}_1, \dots, \overline{\nu}_m, \overline{\kappa}_m$ суть $\Delta_0(\Sigma_m)$ и, значит, Δ_{m+1} в $I\Sigma_m$. Это означает, что любая $\Delta_0(\overline{\nu}_1, \dots, \overline{\kappa}_m)$-формула, будучи U_m-эквивалентной Δ_1-формуле относительно графиков $\overline{\nu}_1, \overline{\kappa}_1, \dots, \overline{\nu}_m, \overline{\kappa}_m$, является Δ_{m+1} в $I\Sigma_m$. Это влечет свойство (c) построенной интерпретации, а свойство (b) есть часть ее определения, q.e.d.

Лемма 5.20. *Для любого $1 \le m \le 2n$ формулы τ_m и φ_m U_m-эквивалентны бескванторным формулам при условии, что U_m формулируется в языке с функциональными символами для $\overline{\nu}_1, \overline{\kappa}_1, \dots, \overline{\nu}_m, \overline{\kappa}_m$.*

Доказательство: индукция по m. Пусть τ'_{2k} означает бескванторную формулу, эквивалентную τ_{2k} в U_{2k}.

Определяем функцию $\nu'_{2k+1}(u_0, v_0, \dots, u_{n-k})$ как

$$\mu v_{n-k} \le \nu_{2k+1}(\langle u_0, v_0, \dots, u_{n-k}\rangle).\ \tau'_{2k}(u_0, v_0, \dots, u_{n-k}, v_{n-k}).$$

ν'_{2k+1} элементарна в $\nu_1, \kappa_1, \dots, \nu_{2k+1}$ и может быть представлена термом в U_{2k+1}. Кроме того, так как U_{2k+1} содержит U_{2k}, мы имеем:

$$\begin{aligned} U_{2k+1} \vdash \tau_{2k+1} \quad &\leftrightarrow \quad \exists v_{n-k} \tau'_{2k} \\ &\leftrightarrow \quad \tau'_{2k}(u_0, \dots, u_{n-k}, \nu'_{2k+1}(u_0, \dots, u_{n-k})). \end{aligned}$$

Последняя формула бескванторна и обозначается τ'_{2k+1}. Аналогично, определяем $\nu'_{2k+2}(u_0, v_0, \dots, v_{n-k-1})$ как

$$\mu u_{n-k} \le \nu_{2k+2}(\langle u_0, v_0, \dots, v_{n-k-1}\rangle).\ \neg\tau'_{2k+1}(u_0, v_0, \dots, v_{n-k-1}, u_{n-k}).$$

Тогда

$$\begin{aligned} U_{2k+2} \vdash \tau_{2k+2} \quad &\leftrightarrow \quad \forall u_{n-k} \tau'_{2k+1} \\ &\leftrightarrow \quad \tau'_{2k+1}(u_0, \dots, v_{n-k-1}, \nu'_{2k+2}(u_0, \dots, v_{n-k-1})), \end{aligned}$$

что и требовалось. Рассуждение для φ_m аналогично, q.e.d.

Лемма 5.21. *Для любого $1 \le m \le 2n$ U_m имеет $\Pi_1^{\overline{\nu}_1, \overline{\kappa}_1, \dots, \overline{\nu}_m, \overline{\kappa}_m}$-аксиоматизацию.*

Доказательство: индукция по m. $\Pi_1^{\overline{\nu}_1, \overline{\kappa}_1, \dots, \overline{\nu}_{m+1}, \overline{\kappa}_{m+1}}$-аксиоматизация U_{m+1} получается из $\Pi_1^{\overline{\nu}_1, \overline{\kappa}_1, \dots, \overline{\nu}_m, \overline{\kappa}_m}$-аксиоматизации U_m заменой в аксиомах ψ_{m+1} и θ_{m+1} подформул τ_m и φ_m, соответственно, их бескванторными эквивалентами τ'_m и φ'_m, q.e.d.

Теперь мы положим $T^+ := U_{2n} + \tau$ (T^+ формулируется в языке U_{2n}). Поскольку T содержит $I\Sigma_n$, по лемме 5.19 T^+ есть доказуемо консервативное расширение T. T^+ имеет $\Pi_2^{\overline{\nu}_1, \overline{\kappa}_1, \dots, \overline{\nu}_{2n}, \overline{\kappa}_{2n}}$-аксиоматизацию, и φ доказуемо эквивалентна $\Sigma_1^{\overline{\nu}_1, \overline{\kappa}_1, \dots, \overline{\nu}_{2n}, \overline{\kappa}_{2n}}$-формуле в T^+ по лемме 5.20. Это позволяет нам применить теорему 5.11 к T^+ и завершить доказательство, как это было сделано для случая $n = 1$, q.e.d.

Следствие 5.22. *Для $\Sigma_{n+1} \cup \Pi_{n+1}$-аксиоматизированных теорий T, содержащих $I\Sigma_{n-1}$,*

$$[T, \Sigma_n\text{-}\mathsf{IR}] \equiv [T, \Pi_{n+1}\text{-}\mathsf{IR}].$$

Доказательство. Если T_0 — конечное расширение $I\Sigma_{n-1}$, аксиоматизированное Π_{n+1}-предложением π и Σ_{n+1}-предложением σ, то

$$T_0 + \mathsf{RFN}_{\Pi_{n+1}}(T_0) \equiv T_0 + \mathsf{RFN}_{\Pi_{n+1}}(I\Sigma_{n-1} + \pi),$$

по лемме 2.14. По теореме 4, схема $\mathsf{RFN}_{\Pi_{n+1}}(I\Sigma_{n-1} + \pi)$ доказуема в $[I\Sigma_{n-1} + \pi, \Sigma_n\text{-}\mathsf{IR}]$. Таким образом, $[T, \Sigma_n\text{-}\mathsf{IR}]$ содержит $\mathsf{RFN}_{\Pi_{n+1}}(T_0)$ для любой конечной подтеории T_0 теории T и, следовательно, содержит $[T, \Pi_{n+1}\text{-}\mathsf{IR}]$ по теореме 2, q.e.d.

Теорема и ее следствие применимы к теориям T, расширяющим $I\Sigma_{n-1}$, а не к произвольным расширениям EA. На первый взгляд это представляется довольно ограничительным требованием. Однако мы знаем, что $[\mathsf{EA}, \Sigma_n\text{-}\mathsf{IR}]$ содержит $I\Sigma_{n-1}$. Отсюда следует, что однократное применение Σ_n-IR выводит нас в класс теорий, содержащих $I\Sigma_{n-1}$, где применима теорема 4. Отсюда получаются следующие следствия.

Следствие 5.23. *Правила Σ_n-IR и Π_{n+1}-$\mathsf{RR}_{\Pi_{n+1}}(\mathsf{EA})$ взаимно выводимы. Фактически, для вывода k-кратно примененного правила Π_{n+1}-$\mathsf{RR}_{\Pi_{n+1}}(\mathsf{EA})$ достаточно $k+1$-кратное применение правила Σ_n-IR.*

Следствие 5.24. *Для любой конечной $\Pi_{n+1}\cup\Sigma_{n+1}$-аксиоматизированной теории T, содержащей EA, $T + \Sigma_n\text{-}\mathsf{IR} \equiv (T)^{n+1}_{\omega}$.*

Как и для рассмотренных ранее правил, это следствие фактически дает характеризацию замыканий произвольных теорий, содержащих EA, относительно правила Σ_n-IR.

Следствие 5.25. *Для любой $\Pi_{n+1} \cup \Sigma_{n+1}$-аксиоматизированной теории T, содержащей EA,*

(i) $T + \Sigma_n\text{-}\mathsf{IR} \equiv T + \Pi_{n+1}\text{-}\mathsf{IR}$.

(ii) $T + \Sigma_n\text{-}\mathsf{IR}$ *не является конечно аксиоматизируемой теорией при условии ее непротиворечивости.*

Отметим, что первая часть предыдущего следствия обобщает известный результат Парсонса [28] об эквивалентности теорий $I\Sigma_n^R$ и $I\Pi_{n+1}^R$.

Не известно, являются ли правила Σ_n-IR и Π_{n+1}-$\mathsf{RR}_{\Pi_{n+1}}(\mathsf{EA})$ конгруэнтными по модулю EA. Однако имеет место следующее утверждение.

Следствие 5.26. *Пусть T — Σ_{n+1}-аксиоматизированное расширение EA. Тогда для любого k*

$$\begin{array}{lcl} [T, \Sigma_n\text{-}\mathsf{IR}]_k & \equiv & [T, \Pi_{n+1}\text{-}\mathsf{RR}_{\Pi_{n+1}}(\mathsf{EA})]_k \\ [T, \Sigma_n\text{-}\mathsf{IR}]_k & \equiv & [T, \Pi_{n+1}\text{-}\mathsf{IR}]_k. \end{array}$$

Доказательство. Пусть T_0 — конечная (Σ_{n+1}-аксиоматизированная) подтеория T. Заметим, что по лемме 2.14

$$T_0 + \mathsf{RFN}_{\Pi_{n+1}}(T_0) \equiv T_0 + \mathsf{RFN}_{\Pi_{n+1}}(\mathsf{EA}).$$

По лемме 3.14, теория $[T, \Sigma_n\text{-}\mathsf{IR}]$ содержит $I\Sigma_{n-1}$, а по теореме 3.3 $I\Sigma_{n-1}$ содержит $\mathsf{RFN}_{\Pi_{n+1}}(\mathsf{EA})$. Таким образом, в $[T, \Sigma_n\text{-}\mathsf{IR}]$ выводима схема $\mathsf{RFN}_{\Pi_{n+1}}(T_0)$, и это доказывает следствие для $k = 1$.

После первого применения Σ_n-IR получается теория, являющаяся $\Sigma_{n+1} \cup \Pi_{n+1}$-аксиоматизированным расширением $I\Sigma_{n-1}$. Таким образом, для $k > 1$ применимо следствие 5.22, q.e.d.

Следствие 5.27. *Для любого $n \geq 1$*

(i) $I\Sigma_n \equiv [\mathsf{EA}, \Sigma_{n+1}\text{-}\mathsf{IR}]$;

(ii) $I\Sigma_n^R \equiv (\mathsf{EA})^{n+1}_{\omega} \equiv I\Pi_{n+1}^R$.

5.4 О правиле $\mathcal{B}(\Sigma_n)$-индукции

Сначала мы проанализируем правило индукции для булевых комбинаций Σ_1-формул.

Предложение 5.28. $\mathcal{B}(\Sigma_1)\text{-}\mathsf{IR} \cong \Sigma_1\text{-}\mathsf{IR}$.

Доказательство. Мы должны показать, что для любой теории T, содержащей EA,

$$[T, \mathcal{B}(\Sigma_1)\text{-}\mathsf{IR}] \subseteq [T, \Sigma_1\text{-}\mathsf{IR}].$$

Допустим $A(x)$ есть $\mathcal{B}(\Sigma_1)$-формула, для которой в T выводимо

$$A(0) \wedge \forall x\, (A(x) \to A(x+1)). \tag{33}$$

Мы должны установить, что $\forall x A(x)$ содержится в $[T, \Sigma_1\text{-}\mathsf{IR}]$. Нетрудно показать, индукцией по сложности булевых комбинаций, что любая $\mathcal{B}(\Sigma_n)$-формула логически эквивалентна как Σ_{n+1}, так и Π_{n+1}-формуле, то есть является Δ_{n+1} в EA. В частности, $A(x) \in \Delta_2$, и (33) эквивалентна Π_2-формуле. Пусть T_0 — конечная подтеория T, аксиоматизированная (33) над EA. По следствию 5.3 мы имеем $[T_0, \Sigma_1\text{-}\mathsf{IR}] \equiv [T_0, \Pi_2\text{-}\mathsf{IR}]$, а последняя теория содержит $\forall x A(x)$. Отсюда вытекает, что формула $\forall x A(x)$ доказуема в $[T, \Sigma_1\text{-}\mathsf{IR}]$, q.e.d.

То же самое рассуждение проходит и для правила $\mathcal{B}(\Sigma_n)\text{-}\mathsf{IR}$, при произвольном n, но на последнем шаге мы должны применить следствие 5.22 или 5.25. Отсюда получается следующее предложение.

Предложение 5.29. *Для* $n > 1$

(i) *правила* $\mathcal{B}(\Sigma_n)\text{-}\mathsf{IR}$ *и* $\Sigma_n\text{-}\mathsf{IR}$ *взаимно выводимы.*
Фактически, k*-кратно примененное правило* $\mathcal{B}(\Sigma_n)\text{-}\mathsf{IR}$ *сводится к* $k+1$*-кратно примененному правилу* $\Sigma_n\text{-}\mathsf{IR}$*;*

(ii) $\mathcal{B}(\Sigma_n)\text{-}\mathsf{IR}$ *и* $\Sigma_n\text{-}\mathsf{IR}$ *конгруэнтны по модулю* $I\Sigma_{n-1}$.

Вопрос, конгруэнтны ли правила $\mathcal{B}(\Sigma_n)\text{-}\mathsf{IR}$ и $\Sigma_n\text{-}\mathsf{IR}$ для $n > 1$ остается открытым.

6 Беспараметрическая индукция и рефлексия

В этом разделе мы устанавливаем взаимосвязь между схемами рефлексии и схемами беспараметрической индукции в арифметике. Имея в виду точное соответствие схем индукции и схем равномерной рефлексии над EA (предложение 3.3), на первый взгляд кажется естественным предположить, что беспараметрическая индукция должна соответствовать схемам локальной рефлексии. Однако, нетрудно заметить, что локальные схемы рефлексии являются для этого слишком слабыми принципами: $\mathsf{Rfn}(\mathsf{EA})$ содержится в расширении EA множеством всех истинных Π_1-предложений, в то время как по следствиям 3.9, 3.17 и предложению 2.7 ни одна из теорий $I\Pi_n^-$ для $n > 1$ таковой не является. Оказывается, что для получения точной характеризации необходимо видоизменить оператор доказуемости.

6.1 Характеризация схем беспараметрической индукции

Пусть T — элементарно аксиоматизированная теория. *Релятивизированный предикат доказуемости* для T, $\Box_T^{\Pi_n}(x)$, есть следующая Σ_{n+1}-формула:

$$\exists s\,(\mathsf{True}_{\Pi_n}(s) \wedge \Box_T(\ulcorner \mathsf{True}_{\Pi_n}(\dot{s})\urcorner \dot{\to} x)),$$

где $\dot{\to}$ означает стандартный элементарный терм для функции, которая вычисляет $\ulcorner\varphi \to \psi\urcorner$ по данным $\ulcorner\varphi\urcorner$ и $\ulcorner\psi\urcorner$. Очевидно, $\Box_T^{\Pi_n}(x)$ определяет оператор доказуемости в Σ_{n+1}-полной теории, аксиоматизированной над T множеством всех истинных Π_n-предложений. Вариант следующей леммы доказан в [39], леммы 3.7 и 3.8 на с. 56.

Лемма 6.1. *(i) Для каждой Σ_{n+1}-формулы $\varphi(x_1, \dots, x_n)$,*

$$\mathsf{EA} \vdash \varphi(x_1, \dots, x_n) \to \Box_T^{\Pi_n}\varphi(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n).$$

(ii) $\Box_T^{\Pi_n}(x)$ удовлетворяет условиям Лёба L1°–L4°.

(iii) Для любого предложения ψ

$$\mathsf{EA} \vdash \Box_T^{\Pi_n}(\Box_T^{\Pi_n}\psi \to \psi) \to \Box_T^{\Pi_n}\psi.$$

Доказательство. Утверждения (i) и (ii) вытекают из утверждения 2.4, условий Тарского и условий Лёба для нерелятивизированного оператора доказуемости в T. Утверждение (iii) вытекает из (ii) и леммы о неподвижной точке, как и для классической теоремы Лёба (см. доказательство теоремы 1.3 и утверждения 1.6), q.e.d.

Предыдущая лемма позволяет релятивизировать арифметическую интерпретацию логики доказуемости **GL**. Для любой модальной формулы φ и арифметической реализации $(\cdot)^*$ пусть $(\varphi)_T^{*,n}$ означает результат подстановки вместо пропозициональных переменных φ соответствующих арифметических предложений и расшифровки $\Box$ как релятивизированной формулы доказуемости $\Box_T^{\Pi_n}$:

$$\begin{array}{rcl} (\varphi \to \psi)_T^{*,n} & := & ((\varphi)_T^{*,n} \to (\psi)_T^{*,n}) \\ (\neg\varphi)_T^{*,n} & := & \neg(\varphi)_T^{*,n} \\ (\Box\varphi)_T^{*,n} & := & \Box_T^{\Pi_n}(\varphi)_T^{*,n} \end{array}$$

Из леммы 6.1, как обычно, индукцией по выводу в **GL** получается следующее следствие.

Лемма 6.2. *Для любой модальной формулы φ $\mathbf{GL} \vdash \varphi$ влечет $\mathsf{EA} \vdash (\varphi)^{*,n}_T$ для любой арифметической реализации $(\cdot)^*$ переменных φ.*

Противоположная импликация, то есть арифметическая полнота $\mathbf{GL}$ относительно релятивизированной арифметической интерпретации, для случая корректной теории T также хорошо известна (см. [39]).

Релятивизированные схемы рефлексии определяем по аналогии следующим образом:

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{Con}^{\Pi_n}(T) & := & \neg\Box^{\Pi_n}_T \bot, \\ \mathsf{Rfn}^{\Pi_n}(T) & := & \{\Box^{\Pi_n}_T \varphi \to \varphi \mid \varphi \in St\}, \\ \mathsf{Rfn}^{\Pi_n}_{\Sigma_m}(T) & := & \{\Box^{\Pi_n}_T \sigma \to \sigma \mid \sigma \in St \cap \Sigma_m\}. \end{array}$$

Для $n = 0$ все эти схемы совпадают, по определению, со своими нерелятивизированными аналогами.

Лемма 6.3. *Для всех $n \geq 0$, $m \geq 1$ следующие схемы дедуктивно эквивалентны над* EA*:*

(i) $\mathsf{Con}^{\Pi_n}(T) \equiv \mathsf{RFN}_{\Pi_{n+1}}(T)$;

(ii) $\mathsf{Rfn}^{\Pi_n}_{\Sigma_m}(T) \equiv \{\varphi \to \mathsf{RFN}_{\Pi_{n+1}}(T + \varphi) \mid \varphi \in St \cap \Pi_m\}$.

Доказательство. (i) Заметим, что

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{EA} \vdash \neg\Box^{\Pi_n}_T \bot & \leftrightarrow & \neg\exists s\, (\mathsf{True}_{\Pi_n}(s) \wedge \Box_T(\ulcorner \mathsf{True}_{\Pi_n}(\dot{s})\urcorner \dot{\to} \ulcorner \bot \urcorner)) \\ & \leftrightarrow & \forall s\, (\Box_T \neg \mathsf{True}_{\Pi_n}(\dot{s}) \to \neg \mathsf{True}_{\Pi_n}(s)). \end{array}$$

(ii) По формализованной теореме о дедукции

$$\mathsf{EA} \vdash \mathsf{Con}^{\Pi_n}(T + \varphi) \leftrightarrow \neg\Box^{\Pi_n}_T(\ulcorner \neg\varphi \urcorner). \tag{34}$$

Значит, над EA

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{Rfn}^{\Pi_n}_{\Sigma_m}(T) & \equiv & \{\Box^{\Pi_n}_T \sigma \to \sigma \mid \sigma \in St \cap \Sigma_m\} \\ & \equiv & \{\varphi \to \neg\Box^{\Pi_n}_T \neg\varphi \mid \varphi \in St \cap \Pi_m\} \\ & \equiv & \{\varphi \to \mathsf{RFN}_{\Pi_{n+1}}(T + \varphi) \mid \varphi \in St \cap \Pi_m\}, \quad \text{по (34) и (i),} \end{array}$$

q.e.d.

Следующая характеризация получена в [53].

Теорема 5. *Для $n \geq 1$ следующие теории эквивалентны:*

(i) $I\Sigma^-_n \equiv \mathsf{EA} + \mathsf{Rfn}^{\Pi_n}_{\Sigma_{n+1}}(\mathsf{EA})$;

(ii) $I\Pi^-_{n+1} \equiv \mathsf{EA} + \mathsf{Rfn}^{\Pi_n}_{\Sigma_{n+2}}(\mathsf{EA})$;

(iii) $\mathsf{EA}^+ + I\Pi^-_1 \equiv \mathsf{EA}^+ + \mathsf{Rfn}_{\Sigma_2}(\mathsf{EA}) \equiv \mathsf{EA}^+ + \mathsf{Rfn}_{\Sigma_2}(\mathsf{EA}^+)$.

Доказательство. Все утверждения доказываются аналогично, с использованием теорем 3 и 2, соответственно. Мы приведем лишь доказательство (ii).

Для включения $(\subseteq)$ нам необходимо вывести

$$\varphi(0) \wedge \forall x\, (\varphi(x) \to \varphi(x+1)) \to \forall x \varphi(x),$$

для каждой Π_{n+1}-формулы $\varphi(x)$ с единственной свободной переменной x. Пусть ψ означает Π_{n+2}-предложение логически эквивалентное $\varphi(0) \wedge \forall x\, (\varphi(x) \to \varphi(x+$

1)). Как обычно, внешней индукцией по m легко установить, что для любого m $\mathsf{EA}+\psi \vdash \varphi(\overline{m})$. Этот факт формализуем в EA, поэтому

$$\mathsf{EA} \vdash \forall x\, \Box_{\mathsf{EA}+\psi}\, \varphi(\dot{x}). \tag{35}$$

По лемме 6.3 мы заключаем, что

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{EA}+\mathsf{Rfn}^{\Pi_n}_{\Sigma_{n+2}}(\mathsf{EA})+\psi & \vdash & \mathsf{RFN}_{\Pi_{n+1}}(\mathsf{EA}+\psi) \\ & \vdash & \forall x\,(\Box_{\mathsf{EA}+\psi}\,\varphi(\dot{x}) \to \varphi(x)) \\ & \vdash & \forall x \varphi(x), \quad \text{по (35)}. \end{array}$$

Отсюда вытекает

$$\mathsf{EA}+\mathsf{Rfn}^{\Pi_n}_{\Sigma_{n+2}}(\mathsf{EA}) \vdash \psi \to \forall x \varphi(x),$$

что и требовалось.

Для доказательства включения $(\supseteq)$ заметим, что для любого Π_{n+2}-предложения φ теория $I\Pi^-_{n+1}+\varphi$ содержит $\mathsf{EA}+\varphi+\Pi_{n+1}\text{-}\mathsf{IR}$ по лемме 3.8, и, следовательно,

$$I\Pi^-_{n+1}+\varphi \vdash \mathsf{RFN}_{\Pi_{n+1}}(\mathsf{EA}+\varphi)$$

по теореме 2. Значит,

$$I\Pi^-_{n+1} \vdash \varphi \to \mathsf{RFN}_{\Pi_{n+1}}(\mathsf{EA}+\varphi),$$

и лемма 6.3 (ii) дает требуемое, q.e.d.

6.2 Результаты о консервативности и аксиоматизируемости

Вышеприведенная характеризация схем беспараметрической индукции в терминах схем рефлексии позволяет применить технику, развитую в §2.3, к исследованию беспараметрической индукции. Поскольку релятивизированный и обычный предикаты доказуемости удовлетворяют условиям Лёба и имеют одинаковую логику доказуемости, все результаты о локальных схемах рефлексии, доказанные нами ранее, обобщаются на релятивизированный предикат доказуемости. Этот идея предложена в [53].

Аналог теоремы 2.24 состоит в следующем.

Лемма 6.4. *Любые m примеров схемы $\mathsf{Rfn}^{\Pi_n}(T)$ Π_{n+1}-консервативны над $(T)^{n+1}_m$.*

Доказательство. В доказательстве предложения 2.24 следует читать $\Box^{\Pi_n}_T$ всюду вместо $\Box_T$. Возможность применения леммы 2.18 обеспечивается леммой 6.2. По лемме 6.3 итерированные релятивизированные формулы непротиворечивости соответствуют итерированным схемам равномерной Π_{n+1}-рефлексии над T, q.e.d.

Следующее следствие получено в [54].

Предложение 6.5. *Для любого $n \geq 1$*

(i) Любые m примеров схемы $I\Pi^-_{n+1}$ Π_{n+1}-консервативны над $(\mathsf{EA})^{n+1}_m$.

(ii) Теория $I\Pi^-_{n+1}$ Π_{n+1}-консервативна над $(\mathsf{EA})^{n+1}_\omega \equiv I\Sigma^R_n$.

Доказательство. Утверждение (ii) следует из (i). Доказательство утверждения (i) основывается на предыдущей лемме и замечании, что характеризация схем беспараметрической индукции в терминах схем рефлексии сохраняет число примеров соответствующих схем.

Лемма 6.6. *Для любого примера B схемы $I\Pi_{n+1}^-$ найдется Σ_{n+2}-предложение σ такое, что $\Box_{\mathsf{EA}}^{\Pi_n}\sigma \to \sigma$ влечет B над* EA. *Обратно, для каждого такого σ найдется пример B схемы $I\Pi_{n+1}^-$ такой, что в $\mathsf{EA}+B$ выводимо $\Box_{\mathsf{EA}}^{\Pi_n}\sigma \to \sigma$.*

Доказательство получается непосредственной верификацией нашего доказательства теоремы 5. Для доказательства второй части леммы мы используем теорему 2 (i), утверждающую, что

$$[\mathsf{EA}+\neg\sigma, \Pi_{n+1}\text{-}\mathsf{IR}] \vdash \mathsf{RFN}_{\mathsf{EA}+\neg\sigma}(\Pi_{n+1}).$$

Также заметим, что любое конечное число *неитерированных* применений правила Π_{n+1}-IR может быть сведено к единственному применению, которое, в свою очередь, сводится к единственному примеру $I\Pi_{n+1}^-$, q.e.d.

Замечание 6.7. Аналогичное утверждение верно для $I\Sigma_n^-$, но вторая часть имеет место, по-видимому, лишь над $I\Sigma_{n-1}$. Вообще говоря, необходимы $m+1$ примеров схемы $I\Sigma_n^-$, чтобы вывести m примеров схемы $\mathsf{Rfn}_{\Sigma_{n+1}}^{\Pi_n}(\mathsf{EA})$ (первый из них используется для вывода $I\Sigma_{n-1}$).

В силу леммы 6.6 любые m примеров схемы $I\Pi_{n+1}^-$ содержатся в некотором расширении EA m примерами схемы $\mathsf{Rfn}^{\Pi_n}(\mathsf{EA})$, которое является Π_{n+1}-консервативным над $(\mathsf{EA})_m^{n+1}$ по лемме 6.4. Это завершает доказательство предложения 6.5, q.e.d.

Замечание 6.8. Утверждение, аналогичное предложению 6.5, также имеет место для схемы $I\Pi_1^-$ над теорией EA^+. См. теорему 5 (iii).

Из предложения 6.5 получаем следующее важное следствие.

Следствие 6.9. *Классы доказуемо тотальных рекурсивных функций теорий $I\Pi_{n+1}^-$ и $I\Sigma_n^R$ совпадают. В частности, $\mathcal{F}(I\Pi_2^-)$ совпадает с множеством всех примитивно рекурсивных функций.*

Доказательство. В силу части (ii) предложения 6.5 и следствия 5.4, $I\Pi_{n+1}^-$ является Π_{n+1}-консервативным расширением теории $I\Sigma_n^R$. Класс доказуемо тотальных рекурсивных функций $I\Sigma_1^R$ совпадает с множеством примитивно рекурсивных функций, например, в силу следствия 4.7, q.e.d.

Релятивизация теоремы 1 (iii) состоит в следующем.

Лемма 6.10. *Для любого $n \geq 0$ теория $T + \mathsf{Rfn}^{\Pi_n}(T)$ консервативна над $T + \mathsf{Rfn}_{\Sigma_{n+1}}^{\Pi_n}(T)$ относительно $\mathcal{B}(\Sigma_{n+1})$-предложений.*

Доказательство дословно повторяет приведенное нами доказательство теоремы 1, q.e.d.

Следствие 6.11. *Для любого $n \geq 1$ теория $I\Pi_{n+1}^-$ консервативна над $I\Sigma_n^-$ относительно $\mathcal{B}(\Sigma_{n+1})$-предложений.*

Из 6.5 также вытекает невозможность конечной аксиоматизации теорий $I\Pi_n^-$, ранее установленная Кэйе, Парисом и Димитракопулосом [19], использовавшими методы теории моделей. Ниже мы получим обобщение этого результата. Для этого установим следующий, формально более сильный вариант предложения 6.5.

Предложение 6.12. *Пусть T — расширение* EA *конечным числом Π_{n+2}-предложений, $n \geq 1$. Тогда*

(i) *расширение* T *любыми* m *примерами схемы* $I\Pi^-_{n+1}$ *является* Π_{n+1}-*консервативным над* $(T)^{n+1}_m$;

(ii) $T + I\Pi^-_{n+1}$ *есть* Π_{n+1}-*консервативное расширение* $(T)^{n+1}_\omega$.

Доказательство. По теореме 5 для данной теории T имеем

$$\begin{aligned} T + I\Pi^-_{n+1} &\equiv T + \mathsf{Rfn}^{\Pi_n}_{\Sigma_{n+2}}(\mathsf{EA}) \\ &\equiv T + \mathsf{Rfn}^{\Pi_n}_{\Sigma_{n+2}}(T), \end{aligned}$$

в силу лемм 6.3 (ii) и 2.14. По лемме 6.4 отсюда следует второе утверждение. (Тот факт, что $T + I\Pi^-_{n+1}$ содержит $(T)^{n+1}_\omega$, вытекает из следствий 3.16 и 3.9.) Первое утверждение получается аналогично из утверждения 6.5 (i), q.e.d.

Следствие 6.13. *Никакая непротиворечивая теория, расширяющая* $I\Pi^-_{n+1}$ *множеством* Π_{n+2}-*предложений, не является конечно аксиоматизируемой.*

Доказательство. Допустим, от противного, что такое конечное расширение существует. Без ограничения общности мы можем считать, что оно имеет вид $T + U$ для некоторых m примеров U схемы $I\Pi^-_{n+1}$, где T — конечное Π_{n+2}-аксиоматизированное расширение EA. Тогда по 6.12 (i) Π_{n+1}-следствия теории $T + U$ совпадают с Π_{n+1}-следствиями $(T)^{n+1}_m$. Однако, по 6.12 (ii)

$$T + I\Pi^-_{n+1} \vdash \mathsf{RFN}_{\Pi_{n+1}}((T)^{n+1}_m).$$

Последняя формула является Π_{n+1}-формулой и невыводима в $(T)^{n+1}_m$, q.e.d.

Отметим также следующее следствие теоремы о неограниченности для локальных схем рефлексии.

Предложение 6.14. $I\Pi^-_{n+1}$ *не содержится ни в каком непротиворечивом перечислимом расширении* EA *множеством* Π_{n+2}-*предложений.*

Доказательство. По теореме 5 $I\Pi^-_{n+1}$ содержит схему $\mathsf{Rfn}^{\Pi_n}_{\Sigma_{n+2}}(\mathsf{EA})$ и, тем самым, более слабую схему $\mathsf{Rfn}_{\Sigma_{n+2}}(\mathsf{EA})$. Результат получается применением предложения 2.13, q.e.d.

Следствие 6.15. $I\Pi^-_{n+1} \nsubseteq I\Sigma^R_{n+1}$.

Заметим, что сложность естественной аксиоматизации $I\Pi^-_{n+1}$ есть Σ_{n+2}, а сложность $I\Sigma^-_n$ есть $\mathcal{B}(\Sigma_{n+1})$. Мы имеем следующий вариант теоремы о неограниченности для $\mathsf{Rfn}^{\Pi_n}_{\Sigma_{n+1}}(T)$.

Лемма 6.16. $\mathsf{Rfn}^{\Pi_n}_{\Sigma_{n+1}}(T)$ *не содержится ни в каком непротиворечивом конечном расширении теории* T *с помощью* $\mathcal{B}(\Sigma_{n+1})$-*предложений.*

Доказательство. Очевидная релятивизация леммы 2.17 показывает, что схемы $\mathsf{Rfn}^{\Pi_n}_{\Sigma_{n+1}}(T)$ и $\mathsf{Rfn}^{\Pi_n}_{\mathcal{B}(\Sigma_{n+1})}(T)$ дедуктивно эквивалентны над EA. Если последняя содержится в теории $T + \varphi$, где $\varphi \in \mathcal{B}(\Sigma_{n+1})$, то $T + \varphi \vdash \Box^{\Pi_n}_T \neg\varphi \to \neg\varphi$, и тем более $T \vdash \Box_T \neg\varphi \to \neg\varphi$. Отсюда по теореме Лёба $T \vdash \neg\varphi$, q.e.d.

Как следствие получаем следующее предложение.

Предложение 6.17. $I\Sigma^-_n$ *не содержится ни в каком непротиворечивом конечном расширении* EA *с помощью* $\mathcal{B}(\Sigma_{n+1})$-*предложений.*

Следствие 6.18. *Любая непротиворечивая теория, расширяющая* $I\Sigma^-_n$ *с помощью* $\mathcal{B}(\Sigma_{n+1})$-*предложений, не является конечно аксиоматизируемой.*

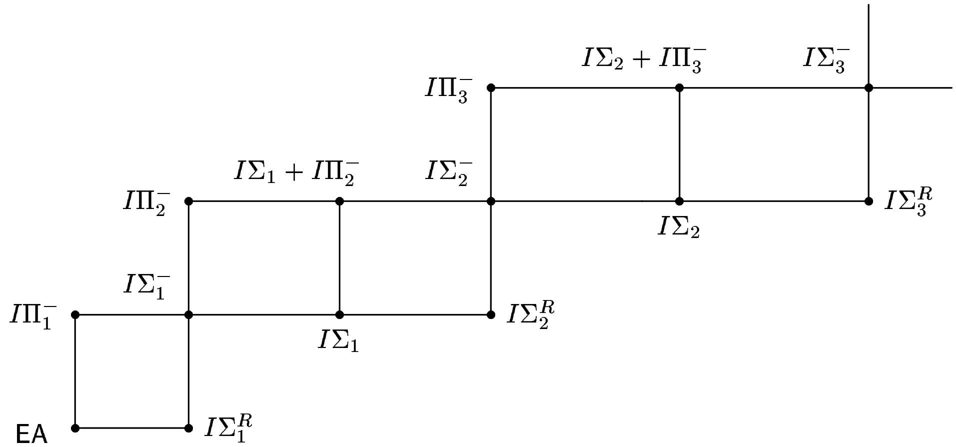

Рис. 3: Иерархии схем параметрической и беспараметрической индукции.

Доказательство. Это вытекает из предложенеия 6.17 и того, что сама теория $I\Sigma_n^-$ имеет $\mathcal{B}(\Sigma_{n+1})$-аксиоматизацию, q.e.d.

Следующее следствие ранее получено в [19] другим методом.

Следствие 6.19. *Для любого $n \geq 1$ теории $I\Sigma_n^-$ и $I\Pi_n^-$ не являются конечно аксиоматизируемыми.*

Доказательство. Утверждение вытекает из следствий 6.18 и 6.13. Для случая $I\Pi_1^-$ достаточно заметить, что если эта теория конечно аксиоматизируема, то таковой является и теория $\mathsf{EA}^+ + I\Pi_1^-$, что невозможно в силу замечания 6.8, q.e.d.

В заключение приведем диаграмму иерархии схем параметрической и беспараметрической индукции (рис. 3).

Отметим, что $I\Pi_{n+1}^- \not\subseteq I\Sigma_{n+1}^R$ вытекает из следствия 6.15. $I\Sigma_n \not\subseteq I\Pi_{n+1}^-$ следует из того, что $I\Pi_{n+1}^-$ имеет Σ_{n+2}-аксиоматизацию, а $I\Sigma_n$ содержит $\mathsf{RFN}_{\Pi_{n+2}}(\mathsf{EA})$ по теореме 3.3. $I\Sigma_{n+1}^R \not\subseteq I\Sigma_n + I\Pi_{n+1}^-$ следует из того, что $I\Sigma_n + I\Pi_{n+1}^-$ есть расширение $I\Sigma_n$ множеством Σ_{n+2}-предложений, в то время как $I\Sigma_{n+1}^R$ содержит $\mathsf{RFN}_{\Pi_{n+2}}(I\Sigma_n)$. Таким образом, все включения, соответствующие ребрам диаграммы, являются строгими.

6.3 Схемы и правила рефлексии

В этом параграфе мы устанавливаем взаимосвязь между схемами и правилами рефлексии в арифметике. Как следствие получается результат о Σ_2-консервативности $\mathsf{EA} + \mathsf{RFN}_{\Sigma_1}(T)$ над $\mathsf{EA} + \mathsf{Rfn}_{\Sigma_1}(T)$ для любой элементарно аксиоматизированной теории T, содержащей EA. Неожиданным аспектом этого результата является то, что арифметическая сложность схемы $\mathsf{Rfn}_{\Sigma_1}(T)$ есть $\mathcal{B}(\Sigma_1)$, то есть меньше Σ_2. Таким образом, Σ_2-следствия $\mathsf{RFN}_{\Sigma_1}(T)$ аксиоматизируемы множеством предложений меньшей арифметической сложности.

Релятивизация этой теоремы позволяет получить альтернативное доказательство результатов Кэйе, Париса и Димитракопулоса о частичной консервативности параметрических схем индукции над беспараметрическими, а также известную теорему Парсонса о частичной консервативности схем над правилами индукции.

Предложение 6.20. *Пусть T — элементарно аксиоматизированная теория, содержащая* EA, *а U — любое Π_2-аксиоматизированное расширение* EA. *Тогда теория $U+\mathsf{RFN}_{\Sigma_1}(T)$ Π_1-консервативна над $U+\Pi_1\text{-}\mathsf{RR}_{\Pi_1}(T)$.*

Доказательство. Для доказательства этой теоремы дадим секвенциальную формулировку правила $\Pi_n\text{-}\mathsf{RR}_{\Pi_n}(T)$. Обозначим через $\Pi_n\text{-}\mathsf{RR}^G_{\Pi_n}(T)$ следующее правило в формализме исчисления Тейта:

$$\frac{\Gamma, \varphi(s)}{\Gamma, \neg\mathsf{Prf}_T(t, \ulcorner\neg\varphi(\dot{s})\urcorner)},$$

для любых термов t, s, и формулы $\varphi(a)\in\Pi_n$, где $\ulcorner\psi(\dot{s})\urcorner$ означает результат подстановки терма s в терм $\ulcorner\psi(\dot{a})\urcorner$. $\Pi_n\text{-}\mathsf{RR}^g_{\Pi_n}(T)$ будет означать то же правило, но с ограничением, что Γ состоит из Π_n-формул.

Лемма 6.21. *Для любого терма $s(\vec{x})$, где список $\vec{x}$ исчерпывает все переменные терма s, и любой формулы $\varphi(a)$ (где s подстановочен в φ вместо a)*

$$\mathsf{EA}\vdash\forall\vec{x}\,\big(\Box_T\varphi(s(\dot{\vec{x}}))\leftrightarrow\Box_T\varphi(\dot{s})\big).$$

Доказательство. Очевидно,

$$\mathsf{EA}\vdash s(\vec{x})=y\to(\varphi(s(\vec{x}))\leftrightarrow\varphi(y)).$$

Отсюда, в силу доказуемой Σ_1-полноты и условий Лёба,

$$\begin{aligned}\mathsf{EA}\vdash s(\vec{x})=y\quad&\to\quad\Box_T(s(\dot{\vec{x}})=\dot{y})\\&\to\quad\Box_T\big(\varphi(s(\dot{\vec{x}}))\leftrightarrow\varphi(\dot{y})\big)\\&\to\quad\big(\Box_T\varphi(s(\dot{\vec{x}}))\leftrightarrow\Box_T\varphi(\dot{y})\big)\end{aligned}\tag{36}$$

С другой стороны, по определению $\ulcorner\varphi(\dot{s})\urcorner$,

$$\mathsf{EA}\vdash s(\vec{x})=y\to\big(\Box_T\varphi(\dot{s})\leftrightarrow\Box_T\varphi(\dot{y})\big),$$

что вместе с (36) дает требуемое, q.e.d.

Лемма 6.22. *При стандартном понимании секвенции как дизъюнкции входящих в нее формул*

(i) правило $\Pi_1\text{-}\mathsf{RR}^G_{\Pi_1}(T)$ конгруэнтно схеме $\mathsf{RFN}_{\Sigma_1}(T)$;

(ii) правило $\Pi_1\text{-}\mathsf{RR}^g_{\Pi_1}(T)$ конгруэнтно правилу $\Pi_1\text{-}\mathsf{RR}_{\Pi_1}(T)$.

Доказательство. Для вывода $\mathsf{RFN}_{\Sigma_1}(T)$ рассмотрим произвольную Σ_1-формулу $\sigma(a)$ и построим следующий вывод:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\sigma(a),\neg\sigma(a)}{\sigma(a),\neg\mathsf{Prf}_T(b,\ulcorner\sigma(\dot{a})\urcorner)}}{\sigma(a),\forall y\neg\mathsf{Prf}_T(y,\ulcorner\sigma(\dot{a})\urcorner)}}{\forall x\,(\Box_T\sigma(\dot{x})\to\sigma(x)).}$$

Для редукции Π_1-$\mathsf{RR}^G_{\Pi_1}(T)$ к $\mathsf{RFN}_{\Sigma_1}(T)$ заметим, что для любых термов s,t и Π_1-формулы φ имеем:

$$\begin{aligned}\mathsf{EA}+\mathsf{RFN}_{\Sigma_1}(T)\vdash\varphi(s) &\;\to\; \neg\Box_T\neg\varphi(\dot{s})\\ &\;\to\; \forall y\neg\mathsf{Prf}_T(y,\ulcorner\neg\varphi(\dot{s})\urcorner)\\ &\;\to\; \neg\mathsf{Prf}_T(t,\ulcorner\neg\varphi(\dot{s})\urcorner).\end{aligned}$$

Тем самым утверждение (i) доказано.

Для доказательства (ii) достаточно свести правило Π_1-$\mathsf{RR}^g_{\Pi_1}(T)$ к Π_1-$\mathsf{RR}_{\Pi_1}(T)$, поскольку противоположная редукция очевидна. Обозначим через $\vec{x}$ список всех свободных переменных, от которых зависят формулы из Γ и терм s. Заметим, что если $\Gamma\subseteq\Pi_1$, то универсальное замыкание формулы $\bigvee\Gamma\vee\varphi(s)\in\Pi_1$, и мы можем построить вывод следующим образом (где $\Diamond_T$ расшифровывается как $\neg\Box_T\neg$):

1. $\bigvee\Gamma(\vec{x})\vee\varphi(s(\vec{x}))$
2. $\forall\vec{x}\left(\bigvee\Gamma(\vec{x})\vee\varphi(s(\vec{x}))\right)$
3. $\Diamond_T\forall\vec{x}\left(\bigvee\Gamma(\vec{x})\vee\varphi(s(\vec{x}))\right)$ (по правилу Π_1-$\mathsf{RR}_{\Pi_1}(T)$)
4. $\forall\vec{x}\,\Diamond_T\left(\bigvee\Gamma(\dot{\vec{x}})\vee\varphi(s(\dot{\vec{x}}))\right)$ (по условиям Лёба из 3)
5. $\Diamond_T(\bigvee\Gamma(\dot{\vec{x}}))\to\bigvee\Gamma(\vec{x})$ (по доказуемой Σ_1-полноте)
6. $\bigvee\Gamma(\vec{x})\vee\Diamond_T\varphi(s(\dot{\vec{x}}))$ (из 4, 5 и условий Лёба)
7. $\bigvee\Gamma(\vec{x})\vee\Diamond_T\varphi(\dot{s})$ (по лемме 6.21)
8. $\bigvee\Gamma\vee\neg\mathsf{Prf}_T(t,\ulcorner\neg\varphi(\dot{s})\urcorner)$,

q.e.d.

Теперь мы покажем, что стандартная процедура устранения сечения может рассматриваться как редукция $\mathsf{RFN}_{\Sigma_1}(T)$ к Π_1-$\mathsf{RR}^g_{\Pi_1}(T)$. Рассмотрим вывод без сечений секвенции вида

$$\neg U,\neg\mathsf{RFN}_{\Sigma_1}(T),\Pi,\tag{37}$$

где Π есть множество Π_1-формул, $\neg U$ есть конечное множество отрицаний аксиом теории U, а $\neg\mathsf{RFN}_{\Sigma_1}(T)$ — конечное множество отрицаний примеров схемы $\mathsf{RFN}_{\Sigma_1}(T)$ вида

$$\exists y\exists x\,[\mathsf{Prf}_T(y,\ulcorner\neg\varphi(\dot{x})\urcorner)\wedge\varphi(x)]$$

для некоторых формул $\varphi(x)\in\Pi_1$. Обозначим формулу в квадратных скобках через $R_\varphi(x,y)$. Мы также можем считать, что аксиомы U имеют вид $\forall x_1\ldots\forall x_n\neg A(x_1,\ldots,x_n)$ для некоторых Π_1-формул $A(\vec{x})$.

По свойству подформульности, любая формула, входящая в вывод секвенции Γ вида (37), либо (a) является Π_1-формулой, либо (b) имеет вид $\neg\mathsf{RFN}_{\Sigma_1}(T)$, $\exists xR_\varphi(t,x)$ или $R_\varphi(t,s)$, для некоторых термов s,t, либо (c) имеет вид

$$\exists x_{i+1}\ldots\exists x_nA(t_1,\ldots,t_i,x_{i+1},\ldots,x_n)$$

для некоторого $i<n$ и термов $t_1,\ldots,t_i$. Обозначим через Γ^- результат вычеркивания всех формул типов (b) и (c) из секвенции Γ.

Лемма 6.23. *Если секвенция* Γ *вида (37) доказуема без сечения, то* Γ^- *доказуема по правилу* Π_1-$\mathsf{RR}^g_{\Pi_1}(T)$ *и логическим правилам, включая сечение, из аксиом* U *(рассматриваемых как начальные секвенции).*

Доказательство проходит с помощью индукции по высоте вывода d секвенции Γ. Достаточно рассмотреть случай, когда формула вида (b) или (c) вводится последним применением правила в d, и к тому же достаточно рассмотреть лишь формулы вида $R_\varphi(t,s)$ и $\exists x_n A(t_1,\dots,t_{n-1},x_n)$, поскольку в остальных случаях после применения операции $(\cdot)^-$ посылка и заключение правила совпадают.

Таким образом, допустим, что вывод d имеет вид

$$\frac{\mathsf{Prf}_T(t,\ulcorner\neg\varphi(\dot{s})\urcorner),\Delta \quad \varphi(s),\Delta}{R_\varphi(t,s),\Delta}\ (\wedge)$$

где $\varphi \in \Pi_1$. Тогда по предположению индукции мы получаем Π_1-$\mathsf{RR}^g_{\Pi_1}(T)$-выводы секвенций

$$\mathsf{Prf}_T(t,\ulcorner\neg\varphi(\dot{s})\urcorner),\Delta^- \tag{38}$$

и

$$\varphi(s),\Delta^-. \tag{39}$$

Поскольку Δ^- состоит из Π_1-формул, правило Π_1-$\mathsf{RR}^g_{\Pi_1}(T)$ применимо к (39), и мы получаем вывод

$$\neg\mathsf{Prf}_T(t,\ulcorner\neg\varphi(\dot{s})\urcorner),\Delta^-.$$

Отсюда по правилу сечения с секвенцией (38) получаем требуемый вывод Δ^-. Если последнее применение правила в выводе d имеет вид

$$\frac{A(t_1,\dots,t_{n-1},t_n),\Delta}{\exists x_n A(t_1,\dots,t_{n-1},x_n),\Delta}\ (\exists)$$

то по предположению индукции имеем Π_1-$\mathsf{RR}^g_{\Pi_1}(T)$-вывод секвенции

$$A(t_1,\dots,t_{n-1},t_n),\Delta^-,$$

откуда получаем вывод

$$\exists x_1\dots\exists x_n A(x_1,\dots,x_n),\Delta^-$$

несколькими применениями правила $(\exists)$. Отсюда следует Δ^- по правилу сечения с аксиомной секвенцией $\forall x_1\dots\forall x_n\neg A(x_1,\dots,x_n)$, q.e.d.

Утверждение 6.20 теперь непосредственно вытекает из лемм 6.23 и 6.22, q.e.d.

Предложение 6.24. *Если* T — Π_2*-аксиоматизированное расширение* EA*, то теория* $T+\mathsf{RFN}_{\Sigma_1}(T)$ *есть* Π_1*-консервативное расширение* T_ω*.*

Доказательство. Достаточно заметить, что теория T_ω замкнута относительно Π_1-$\mathsf{RR}_{\Pi_1}(T)$, q.e.d.

Предложение 6.25. *Если* U — Π_2*-аксиоматизированное расширение* EA*, то теория* $U+\mathsf{RFN}_{\Sigma_1}(T)$ *есть* Σ_2*-консервативное расширение* $U+\mathsf{Rfn}_{\Sigma_1}(T)$*.*

Доказательство. Допустим $U + \mathsf{RFN}_{\Sigma_1}(T) \vdash \sigma$ для некоторого предложения $\sigma \in \Sigma_2$, тогда
$$U + \neg\sigma + \mathsf{RFN}_{\Sigma_1}(T) \vdash \bot,$$
и по теореме 6.20
$$U + \neg\sigma + \Pi_1\text{-}\mathsf{RR}_{\Pi_1}(T) \vdash \bot.$$
Заметим, что правило $\Pi_1\text{-}\mathsf{RR}_{\Pi_1}(T)$ очевидным образом сводится к схеме $\mathsf{Rfn}_{\Sigma_1}(T)$. Отсюда мы получаем
$$U + \neg\sigma + \mathsf{Rfn}_{\Sigma_1}(T) \vdash \bot,$$
и по теореме о дедукции
$$U + \mathsf{Rfn}_{\Sigma_1}(T) \vdash \sigma,$$
q.e.d.

Теперь мы получим обобщение этих результатов для произвольного $n \geq 1$.

Теорема 6. *Пусть T — элементарно аксиоматизированная теория, содержащая* EA*, а U — любое Π_{n+1}-аксиоматизированное расширение* EA*. Тогда теория $U + \mathsf{RFN}_{\Sigma_n}(T)$ Π_n-консервативна над $U + \Pi_n\text{-}\mathsf{RR}_{\Pi_n}(T)$.*

Доказательство получается адаптацией леммы 6.22.

Лемма 6.26. *Для $n \geq 1$ следующие правила конгруэнтны:*

(i) $\Pi_n\text{-}\mathsf{RR}_{\Pi_n}(T)$,

(ii) $\Pi_n\text{-}\mathsf{RR}^g_{\Pi_n}(T)$,

(iii) $\dfrac{\Gamma, \varphi(s)}{\Gamma, \Diamond_T^{\Pi_{n-1}}\varphi(\dot{s})}$, *для $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \Pi_n$.*

Доказательство. Сведение (ii) к (iii) очевидно, поскольку
$$\begin{aligned}\mathsf{EA} \vdash \Diamond_T^{\Pi_{n-1}}\varphi(\dot{s}) &\rightarrow \Diamond_T\varphi(\dot{s})\\ &\rightarrow \neg\mathsf{Prf}_T(t, \ulcorner\neg\varphi(\dot{s})\urcorner).\end{aligned}$$

Сведение (iii) к (i) получается аналогично редукции $\Pi_1\text{-}\mathsf{RR}^g_{\Pi_1}(T)$ к $\Pi_1\text{-}\mathsf{RR}_{\Pi_1}(T)$ с использованием лемм 6.1 и 6.3. Чтобы свести правило (i) к (ii), для любой Π_n-формулы φ и Σ_{n-1}-формулы $\sigma(x)$ рассуждаем следующим образом:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\sigma(x), \sigma(x) \quad \varphi}{\varphi \wedge \neg\sigma(x), \sigma(x)}}{\Diamond_T(\varphi \wedge \neg\sigma(\dot{x})), \sigma(x)}\ (\text{по } \Pi_n\text{-}\mathsf{RR}^g_{\Pi_n}(T))}{\neg\Box_{T+\varphi}\sigma(\dot{x}), \sigma(x)}}{\forall x\,(\Box_{T+\varphi}\sigma(\dot{x}) \rightarrow \sigma(x))}$$

Это дает искомый вывод произвольного примера схемы $\mathsf{RFN}_{\Sigma_{n-1}}(T + \varphi)$ из вывода φ, q.e.d.

По модулю леммы 6.26 доказательство релятивизации леммы 6.23, а вместе с ней и теоремы 6, проходит без существенных изменений. Рассматриваем выводы без сечения секвенций вида
$$\neg U, \neg\mathsf{RFN}_{\Sigma_n}(T), \Pi,$$

где Π есть множество Π_n-формул, $\neg U$ есть множество отрицаний аксиом теории U, а $\neg\mathsf{RFN}_{\Sigma_n}(T)$ — множество отрицаний примеров схемы $\mathsf{RFN}_{\Sigma_n}(T)$ вида

$$\exists y \exists x\,[\mathsf{Prf}_T(y, \ulcorner\neg\varphi(\dot{x})\urcorner) \wedge \varphi(x)]$$

для некоторых формул $\varphi(x) \in \Pi_n$. Так же как и в доказательстве предложения 6.20 этот вывод преобразуется в логический вывод Π по правилу Π_n-$\mathsf{RR}^g_{\Pi_n}(T)$ из аксиом U, рассматриваемых как начальные секвенции (в доказательстве леммы 6.23 заменить всюду Π_1 на Π_n). В свою очередь, по лемме 6.26 такой вывод можно преобразовать в вывод $\bigvee\Pi$ в теории $U+\Pi_n$-$\mathsf{RR}_{\Pi_n}(T)$, поскольку U содержит EA, а правила Π_n-$\mathsf{RR}^g_{\Pi_n}(T)$ и Π_n-$\mathsf{RR}_{\Pi_n}(T)$ конгруэнтны, q.e.d.

Следующие следствия получаются из теоремы 6 аналогично предыдущему (для $n \geq 1$).

Предложение 6.27. *Если T — Π_{n+1}-аксиоматизированное расширение EA, то теория $T + \mathsf{RFN}_{\Sigma_n}(T)$ есть Π_n-консервативное расширение $(T)^n_\omega$.*

Отметим, что это утверждение для $T = \mathsf{PRA}$ другим методом получено в работе [35], а для $n = 1$ и $T = \mathsf{EA}$ в [51].

Предложение 6.28. *Если U — Π_{n+1}-аксиоматизированное расширение EA, то теория $U + \mathsf{RFN}_{\Sigma_n}(T)$ есть Σ_{n+1}-консервативное расширение $U + \mathsf{Rfn}^{\Pi_{n-1}}_{\Sigma_n}(T)$.*

Из нашей характеризации беспараметрических схем индукции (теорема 5), таким образом, непосредственно получается следующее следствие, доказанное ранее Кэйе, Парисом и Димитракополусом [19] методами теории моделей.

Следствие 6.29. *Для $n \geq 1$ теория $I\Sigma_n$ является Σ_{n+2}-консервативным расширением $I\Sigma_n^-$.*

Из следствий 6.27 и 5.27 непосредственно получаем известную теорему Парсонса [27, 28] (вторая часть этой теоремы также независимо доказана в [5]):

Следствие 6.30. *Для $n \geq 1$ теория $I\Sigma_n$ Π_{n+1}-консервативна над $I\Sigma_n^R$. В частности, $\mathcal{F}(I\Sigma_1)$ совпадает с классом примитивно рекурсивных функций.*

7 Итерированные схемы рефлексии

После фундаментальных работ Тьюринга [43] и Фефермана [15] трансфинитные иерархии аксиоматических теорий стали играть важную роль в теории доказательств, прежде всего как средство анализа неполноты формальных теорий. Исторически первым и, вероятно, наиболее важным примером такой иерархии является так назваемая *трансфинитная рекурсивная прогрессия, основанная на итерации формулы непротиворечивости,* которая определяется следующим образом:

T1. $T_0 := T$, где T — данная "начальная" теория;

T2. $T_{\alpha+1} := T_\alpha + \mathsf{Con}(T_\alpha)$;

T3. $T_\alpha := \bigcup_{\beta<\alpha} T_\beta$, где α — предельный ординал.

По теореме Гёделя, если начальная теория T Σ_1-корректна, теории T_α образуют строго возрастающую трансфинитную последовательность Σ_1-корректных расширений T. Эта последовательность может быть использована для того, чтобы сопоставить ординал $\mathrm{ord}_T(U)$ любому расширению U теории T следующим образом:

$$\mathrm{ord}_T(U) := \text{ наименьший } \alpha \text{ такой что } U \nvdash \mathsf{Con}(T_\alpha).$$

Для наиболее естественных расширений теории T обычно можно установить, что $T_{\mathrm{ord}_T(U)}$ исчерпывает все арифметические Π_1-следствия U, и, таким образом, $\mathrm{ord}_T(U)$ может рассматриваться как ординал, измеряющий "силу"теории U относительно T в смысле доказуемости Π_1-предложений.

Преимущество этого подхода перед другими известными способами сопоставления ординалов теориям состоит в том, что при этом получается наиболее тонкая классификация, позволяющая различать теории уже на уровне их Π_1-следствий. Например, теории PA и $\mathsf{PA}+\mathsf{Con}(\mathsf{PA})$ имеют одни и те же классы д.т.р.ф. и одинаковые ординальные границы доказуемости трансфинитной индукции (равные ε_0). Однако (см. ниже следствие 7.25 (i)), $\mathrm{ord}_{\mathsf{EA}}(\mathsf{PA}) = \varepsilon_0$, в то время как $\mathrm{ord}_{\mathsf{EA}}(\mathsf{PA}+\mathsf{Con}(\mathsf{PA})) = \varepsilon_0 \cdot 2$.

Хорошо известная трудность на пути этой программы классификации теорий состоит в том, что условия T1–T3 не определяют последовательность T_α однозначно, то есть теория T_α зависит от формального представления ординала α в арифметике, а не только от самого порядкового типа, а также зависит от конкретного способа арифметизации условий T1–T3.

Для анализа этой проблемы Феферман [15] рассмотрел семейство теорий вида $(T_c)_{c\in\mathcal{O}}$, удовлетворяющее условиям T1–T3 вдоль каждого пути в $\mathcal{O}$, где $\mathcal{O}$ — универсальная система ординальных обозначений Клини. Используя идею Тьюринга, он показал, что каждое истинное Π_1-предложение доказуемо в T_c для подходящего ординального обозначения $c \in \mathcal{O}$, где $|c| = \omega + 1$.[3] Отсюда следует, что найдутся два обозначения $a, b \in \mathcal{O}$, $|a| = |b| = \omega + 1$ такие, что в T_a доказуемо $\mathsf{Con}(T_b)$. Это обстоятельство, по всей видимости, препятствует реализации программы сопоставления ординалов теориям, описанной выше, по крайней мере в общем случае.

Тем не менее, остается возможность, что для *естественных,* математически осмысленных теорий U можно исчерпать все Π_1-следствия U используя лишь специфические, *естественные* ординальные обозначения, и тщательный выбор таких обозначений должен дать правильные ординальные оценки. Первые примеры успешной реализации этой идеи были получены в работе У. Шмерля [35], который показал среди прочего, что для естественных ординальных

[3] Здесь и ниже $|c|$ означает ординал, кодируемый числом c.

обозначений до ε_0 и некоторого конкретного способа арифметизации T1–T3 в теориях PA и $\mathsf{PRA}_{\varepsilon_0}$ доказуемы одни и те же Π_1-предложения. Таким образом, $\mathrm{ord}_{\mathsf{PRA}}(\mathsf{PA}) = \varepsilon_0$, что совпадает с ординалом, сопоставляемым PA посредством других теоретико-доказательственных методов.

Для небольших ординалов понятие “естественных систем"конструктивных ординальных обозначений было уже выработано в теории доказательств. Однако, удовлетворительного ответа на вопрос о наиболее естественной арифметизации условий T1–T3, по-видимому, не было. Здесь мы предлагаем простой и общий подход к определению таких “естественных"иерархий схем рефлексии с помощью вводимого нами понятия *гладкой* прогрессии, основанной на итерации формулы непротиворечивости (или любой другой из рассмотренных выше схем рефлексии) вдоль заданного элементарного линейного порядка. Доказанные в §7.1 и §7.2 теоремы о существовании и единственности гладких прогрессий говорят о том, что для любой фиксированной начальной теории и фиксированного элементарного линейного порядка существует, и притом единственная с точностью до доказуемой в EA эквивалентности, гладкая прогрессия, основанная на итерации формулы непротиворечивости. Тем самым понятие гладкости дает удовлетворительный ответ на вопрос об арифметизации условий T1–T3 и их аналогов для других схем рефлексии. С другой стороны, по сравнению с [15, 35] упрощается техническое построение итерированных схем рефлексии, поскольку при этом удается избежать использования и арифметизации ряда теорем из теории рекурсии и, что особенно существенно для рассматриваемых вопросов, использования фундаментальных последовательностей для систем ординальных обозначений.[4]

На гладкие прогрессии итерированных схем рефлексии мы распостраняем результаты о консервативности из предыдущих разделов диссертации. В частности, мы показываем, что для таких иерархий α раз итерированная схема локальной рефлексии, где α — конструктивный ординал, доказывает те же Π_1-предложения, что и ω^α раз итерированное утверждение о непротиворечивости. Получено обобщение на более широкий класс теорий теоремы Шмерля [35] о тонкой структуре иерархии итерированных схем равномерной рефлексии над примитивно рекурсивной арифметикой, и на этой основе даётся анализ основных иерархий фрагментов PA в духе описанной выше программы. В заключительном параграфе эта техника применяется к исследованию вопроса о доказуемо тотальных рекурсивных функциях основных фрагментов арифметики. В частности, мы показываем, что класс д.т.р.ф. теории $I\Sigma_n + I\Pi^-_{n+1}$ совпадает с классом $\mathcal{E}^{\omega_n(2)}$ расширенной иерархии Гжегорчика. При $n = 1$ таким образом получается класс так называемых дважды рекурсивных функций в смысле Р. Петер.

7.1 Построение итерированных схем рефлексии

Наш подход основывается на понятии *элементарного вполне упорядочения*. *Элементарным линейным порядком* $(D, \prec)$ мы называем пару элементарных формул $x \in D$ и $x \prec y$, таких что в EA доказуемо, что отношение $\prec$ линейно упорядочивает множество $D \subseteq \mathbf{N}$. Элементарное *вполне упорядочение* — это элементарный линейный порядок, являющийся фундированным порядком в стандартной модели арифметики. (Заметим, что понятие фундированности невыразимо в языке арифметики первого порядка.)

Допустим, что нам даны некоторая “начальная” элементарно аксиоматизированная теория T и элементарный линейный порядок $(D, \prec)$. Элементарная

[4]Такие последовательности появляются лишь в §7.8 в связи со стандартным определением иерархий быстрорастущих функций.

формула $\mathsf{Ax}_T(z;x)$ называется *гладкой нумерацией прогрессии, основанной на итерации формулы непротиворечивости вдоль* $(D,\prec)$, если[5]

$$\mathsf{EA} \vdash \mathsf{Ax}_T(z;x) \leftrightarrow \mathsf{Ax}_T(x) \lor \big(z \in D \land \exists u \in D\ (u \prec z \land x = \ulcorner \mathsf{Con}(T_{\dot{u}})\urcorner)\big). \qquad (40)$$

Здесь T_u означает семейство теорий, множество нелогических аксиом которых параметрически определяется формулой $\mathsf{Ax}_T(u;x)$, а $\mathsf{Con}(T_u)$ — соответствующая формула непротиворечивости. Заметим, что u входит в эту формулу как свободная переменная, поскольку $\mathsf{Ax}_T(u;x)$ есть подформула $\mathsf{Con}(T_u)$ (см. определение Prf в разделе 1.2). Для удобочитаемости мы пишем $\Box_T(z;x)$ вместо $\Box_{T_z}(x)$.

Гладкой прогрессией, основанной на итерации формулы непротиворечивости называется любое семейство теорий $(T_\alpha)_{\alpha\in D}$, определенное гладкой нумерацией. Заметим, что (40) есть формализованное выражение условия $T_\alpha \equiv T + \{\mathsf{Con}(T_\beta) \mid \beta \prec \alpha\}$ для всех элементов $\alpha \in D$.

Предложение 7.1 (существование). *Для любого элементарного линейного порядка $(D,\prec)$ и любой элементарно аксиоматизированной начальной теории T найдется гладкая прогрессия, основанная на итерации формулы непротиворечивости вдоль $(D,\prec)$.*

Доказательство. Определение (40) имеет вид уравнения на неподвижную точку. В самом деле, формула $\mathsf{Con}(T_u)$ эффективно строится по $\mathsf{Ax}_T(u;x)$ путем приписывания к последней некоторых фиксированных кусков текста. Фактически, существует элементарно определимый терм $\mathsf{con}(z)$, вычисляющий $\ulcorner\mathsf{Con}(T_{\overline{u}})\urcorner$ исходя из $z = \ulcorner\mathsf{Ax}_T(\overline{u};x)\urcorner$. Тогда уравнение (40) может быть переписано следующим образом:

$$\mathsf{EA} \vdash \mathsf{Ax}_T(z;x) \leftrightarrow \mathsf{Ax}_T(x) \lor \Big(z \in D \land \exists u \in D\ \big(u \prec z \land x = \mathsf{con}(\ulcorner\mathsf{Ax}_T(\dot{u};x)\urcorner)\big)\Big). \qquad (41)$$

Лемма о неподвижной точке гарантирует, что формула $\mathsf{Ax}_T(z;x)$, удовлетворяющая (41) и (40), существует. Чтобы убедиться в том, что $\mathsf{Ax}_T(z;x)$ эквивалентна элементарной формуле, достаточно заметить, что квантор существования в (41) может быть ограничен переменной x в предположении стандартности гёделевой нумерации. В самом деле, для любого u доказуемо в EA имеем

$$u \le \ulcorner\overline{u}\urcorner \le \ulcorner\mathsf{Ax}_T(\overline{u};x)\urcorner \le \ulcorner\mathsf{Con}(T_{\overline{u}})\urcorner,$$

q.e.d.

Лемма 7.2. *Если $(D,\prec)$ — элементарное вполне упорядочение, и начальная теория T Σ_1-корректна, то любая гладкая прогрессия $(T_\alpha)_{\alpha\in D}$, основанная на итерации формулы непротиворечивости, является строго возрастающей последовательностью Σ_1-корректных теорий, удовлетворяющей T1–T3.*

Доказательство. Σ_1-корректность доказывается внешней трансфинитной индукцией по α. Строгость включения следует отсюда по теореме Гёделя. Выполнение условий T1–T3 очевидно, q.e.d.

Тот факт, что отношение $\prec$ линейно упорядочивает множество D *доказуемо в* EA гарантирует, что в EA доказуемы формальные аналоги T1–T3:

V1. "$u = 0$" $\lor\ u \notin D \to \forall x\,(\mathsf{Ax}_T(u;x) \leftrightarrow \mathsf{Ax}_T(x))$

[5]Мы пишем ";" вместо "," лишь чтобы подчеркнуть различную роль переменных z и x в формуле $\mathsf{Ax}(z;x)$.

V2. $\text{“}u = v+1\text{”} \to \forall x\, (\mathsf{Ax}_T(u;x) \leftrightarrow (\mathsf{Ax}_T(v;x) \vee x = \ulcorner \mathsf{Con}(T_{\dot v})\urcorner))$

V3. $\mathsf{Lim}(u) \to \forall x\, (\mathsf{Ax}_T(u;x) \leftrightarrow \exists z \in D\ (z \prec u \wedge \mathsf{Ax}_T(z;x)))$.

Здесь мы использовали следующие сокращения:

$$\begin{array}{rcl} \text{“}u=0\text{”} & := & u \in D \wedge \forall z \in D\ (u \prec z \vee u = z), \\ \text{“}u = v+1\text{”} & := & u, v \in D \wedge v \prec u \wedge \forall z \in D\ (z \prec u \to z \prec v \vee z = v), \\ \mathsf{Lim}(u) & := & u \in D \wedge \neg\text{“}u = 0\text{”} \wedge \\ & & \forall z \in D\ (z \prec u \to \exists v \in D\ (v \prec u \wedge z \prec v)). \end{array}$$

В этом разделе нам будет удобно принять следующее соглашение: греческие буквы α, β, $\gamma, \ldots$ будут означать переменные по ординалам, то есть пробегать область D. Символы математических операций 0, 1, +, и др. будут означать операции на множестве ординалов. В редких случаях, когда мы будем использовать обычные математические операции на множестве натуральных чисел, они будут выделены жирным шрифтом.

Формулы $\mathsf{Ax}_T(z;x)$, удовлетворяющие аналогам условий V1–V3, называются в [15] ***верифицируемыми нумерациями*** прогрессий, основанных на итерации формулы непротиворечивости. Так, гладкие нумерации верифицируемы, но обратное, вообще говоря, неверно. Можно лишь утверждать, что верифицируемые нумерации гладки в присутствии трансфинитной индукции для $(D, \prec)$, что обычно имеет место лишь для небольших ординалов.

Условия типа верифицируемости или гладкости могут рассматриваться как условия согласованности на одновременный выбор предикатов доказуемости теорий $(T_\alpha)_{\alpha \in D}$. В то время как верифицируемость представляется наиболее слабым из разумных ограничений этого рода, утверждающим лишь непрерывность прогрессии при предельных переходах, гладкость влечет некоторые дополнительные естественные свойства прогрессий. Например, гладкие прогрессии удовлетворяют следующему свойству монотонности.

Лемма 7.3. *Для любой гладкой прогрессии, основанной на итерации формулы непротиворечивости, в* EA *доказуемо*

(i) $\forall \alpha, \beta\ \big(\alpha \prec \beta \to (\Box_T(\alpha; x) \to \Box_T(\beta; x))\big)$;

(ii) $\forall \alpha, \beta\ \big(\alpha \prec \beta \to (\Box_T(\beta; x) \leftrightarrow \exists \gamma \prec \beta\ \Box_T(\alpha; \ulcorner \mathsf{Con}(T_{\dot\gamma})\urcorner \dot\to x))\big)$.

Доказательство. (i) непосредственно следует из доказуемой линейности $\prec$ и определения гладкости. Для доказательства (ii) приведем содержательное рассуждение, которое легко формализуется в EA.

Если $\alpha \prec \beta$, то по доказуемой монотонности $T_\alpha \subseteq T_\beta$, а по определению гладкости теория T_β аксиоматизирована над T_α всеми предложениями вида $\mathsf{Con}(T_\gamma)$ для $\gamma \prec \beta$. Отсюда непосредственно следует импликация $(\leftarrow)$.

Для доказательства $(\to)$ рассмотрим произвольный вывод y формулы x в T_β. Из y можно элементарно реконструировать конечное множество всех аксиом вида $\mathsf{Con}(T_\gamma)$, использованных в этом выводе. В силу доказуемой линейности $\prec$ мы можем выбрать аксиому, соответствующую наибольшему ординалу из этого множества. По (i) эта аксиома будет сильнейшей, таким образом остальные аксиомы могут быть заменены в y их соответствующими выводами из этой аксиомы. Поскольку доказательство (i) равномерно по α и β, общая длина этих выводов оценивается элементарной функцией от y. Это показывает, что описанная выше трансформация выводов может быть формализована в EA. Остается применить формализованную теорему о дедукции, q.e.d.

Замечание 7.4. Свойства нумераций рекурсивных прогрессий теорий, основанных на итерации формулы непротиворечивости, изучались в работах [46, 48] средствами полимодальных логик доказуемости. При этом была найдена как минимальная полимодальная логика доказуемости, соответствующая произвольным верифицируемым нумерациям [46], так и её собственное расширение, соответствующее гладким нумерациям [48]. Показано, что не всякая доказуемо монотонная нумерация является гладкой, и не всякая верифицируемая нумерация доказуемо монотонна.

7.2 Единственность

В связи с определением гладких прогрессий встает естественный вопрос о том, являются ли такие прогрессии однозначно определенными порядком $(D, \prec)$ и начальными условиями, то есть формулой, задающей аксиомы теории T. Этот вопрос нетривиален, поскольку решения уравнений на неподвижную точку в арифметике чаще являются неединственными, чем единственными, и, вообще говоря, мы не имеем трансфинитной индукции внутри T. Однако, в данном случае имеется довольно неожиданный положительный ответ на сформулированный выше вопрос.

Предложение 7.5. *Пусть U и V — элементарно аксиоматизированные расширения EA, а $\mathsf{Ax}_U(z;x)$ и $\mathsf{Ax}_V(z;x)$ — любые две гладкие нумерации вдоль одного и того же элементарного линейного порядка $(D, \prec)$ с начальными теориями U и V, соответственно, основанные на итерации формулы непротиворечивости. Тогда*

$$\mathsf{EA} \vdash \forall x\, (\Box_U(x) \to \Box_V(x)) \quad \Longrightarrow \quad \mathsf{EA} \vdash \forall \alpha \forall x\, (\Box_U(\alpha; x) \to \Box_V(\alpha; x)).$$

В условиях этого предложения имеет место следующее важное следствие.

Следствие 7.6 (единственность). *Вдоль одного и того же элементарного линейного порядка доказуемо эквивалентные начальные теории порождают доказуемо эквивалентные гладкие прогрессии.*

Свойство единственности ставит на твердую почву наше дальнейшее изучение рекурсивных прогрессий теорий и, в частности, показывает, что гладкие прогрессии не зависят от выбора фундаментальных последовательностей для системы ординальных обозначений.

Доказательство предложения 7.5 использует прием из работы Шмерля [35], являющийся красивым применением теоремы Лёба.

Лемма 7.7 (рефлексивная индукция). *Для любого элементарного линейного порядка $(D, \prec)$, любая теория T замкнута относительно следующего правила* рефлексивной индукции*:*

$$\frac{\forall \alpha\, (\Box_T \forall \beta \prec \dot{\alpha}\, A(\beta) \to A(\alpha))}{\forall \alpha\, A(\alpha)}.$$

Доказательство. В предположении $T \vdash \forall \alpha\, (\Box_T \forall \beta \prec \dot{\alpha}\, A(\beta) \to A(\alpha))$ выводим:

$$\begin{aligned} T \vdash \Box_T \forall \alpha\, A(\alpha) \quad &\to \quad \forall \alpha\, \Box_T \forall \beta \prec \dot{\alpha}\, A(\beta) \\ &\to \quad \forall \alpha\, A(\alpha). \end{aligned}$$

Теорема Лёба для T дает $T \vdash \forall \alpha\, A(\alpha)$, q.e.d.

Мы также будем использовать рефлексивную индукцию по двум переменным в форме *двойной* индукции:

$$\frac{\forall\alpha\,\forall\beta\,(\Box_T\forall\gamma\,\forall\delta\,((\gamma\prec\dot\alpha\vee(\gamma=\dot\alpha\wedge\delta\prec\dot\beta))\to A(\gamma,\delta))\to A(\alpha,\beta))}{\forall\alpha\,\forall\beta\,A(\alpha,\beta)}.$$

Это правило, очевидно, сводится к предыдущему правилу для порядка $(D_1,\prec_1)$, определяемого по формулам

$$\begin{aligned} D_1 &:= \{\langle x,y\rangle \mid x,y\in D\},\\ \langle x,y\rangle\prec_1\langle u,v\rangle &:= x\prec u\vee(x=u\wedge y\prec v).\end{aligned}$$

Нам также потребуется обойти некоторую трудность, связанную со слабостью теории EA. Пусть даны элементарно аксиоматизированные теории T и T'. Известно, что, вообще говоря, EA недостаточно сильна для того, чтобы вывести утверждение

$$\forall x\,(\mathsf{Ax}_T(x)\to\Box_{T'}(x))\to\forall x\,(\Box_T(x)\to\Box_{T'}(x)). \tag{42}$$

Естественное доказательство этой формулы опирается на так называемую *схему Σ_1-подстановки* $B\Sigma_1$:

$$\forall x\le a\exists y\varphi(x,y)\to\exists z\forall x\le a\exists y\le z\varphi(x,y),$$

для формул $\varphi\in\Sigma_1$. Известно, что схема $B\Sigma_1$ не выводима в EA (Парсонс), но является Π_2-консервативной над EA (Парис–Фридман). Аналогичные факты имеют место и над теорией EA^+ (см. [18, 54]).

Лемма 7.8. *(i) В $\mathsf{EA}+B\Sigma_1$ доказуемо утверждение (42).*

(ii) Если $\mathsf{EA}\vdash\forall x\,(\mathsf{Ax}_T(x)\to\Box_{T'}(x))$, то $\mathsf{EA}\vdash\forall x\,(\Box_T(x)\to\Box_{T'}(x))$.

Доказательство. Утверждение (ii) следует из (i) и Π_2-консервативности $B\Sigma_1$ над EA. Приведем содержательное доказательство (42), формализуемое в $\mathsf{EA}+B\Sigma_1$.

Рассматривая произвольный вывод a формулы x в T, мы можем восстановить конечное множество аксиом T, использованных в этом выводе. Гёделевы номера этих аксиом ограничены a, а условие $\forall x\,(\mathsf{Ax}_T(x)\to\Box_{T'}(x))$ говорит, что каждая из них имеет некоторый вывод в T'. Применяя к последнему утверждению схему $B\Sigma_1$, мы получаем некоторую равномерную границу z на размер каждого из этих выводов. Результат подстановки всех этих выводов в исходный T-вывод формулы x вместо соответствующих аксиом дает вывод формулы x в T', который, таким образом, оценивается элементарной функцией от a и z. Это показывает, что утверждение $\forall x\,(\Box_T(x)\to\Box_{T'}(x))$ теперь можно доказать с помощью ограниченной индукции по построению вывода x, что допустимо в EA, q.e.d.

Доказательство предложения 7.5. Мы докажем

$$\forall\alpha\forall x\,(\Box_U(\alpha;x)\to\Box_V(\alpha;x)) \tag{43}$$

с помощью рефлексивной индукции по α в EA. Рефлексивное *предположение индукции* $\mathrm{IH}(\alpha)$ — это формула

$$\Box_{\mathsf{EA}}\forall\beta\prec\dot\alpha\forall x\,(\Box_U(\beta;x)\to\Box_V(\beta;x)).$$

Чтобы воспользоваться леммой 7.7 нам надо доказать в EA утверждение

$$\mathrm{IH}(\alpha) \to \forall x\, (\Box_U(\alpha; x) \to \Box_V(\alpha; x)). \tag{44}$$

Заметим, однако, что последняя формула является Π_2-формулой, поскольку $\mathrm{IH}(\alpha) \in \Sigma_1$. Таким образом, в силу Π_2-консервативности для вывода (43) достаточно доказать формулу (44) в теории $\mathsf{EA} + B\Sigma_1$. В свою очередь, по лемме 7.8 (i) для этого достаточно вывести $\Box_V(\alpha; x)$ из гипотезы $\mathsf{Ax}_T(\alpha; x)$ и формулы $\mathrm{IH}(\alpha)$. Мы рассуждаем следующим образом:

1. $\mathsf{Ax}_U(\alpha; x)$ (гипотеза)
2. $\mathsf{Ax}_U(x) \lor \exists \beta \prec \alpha\ x = \ulcorner \mathsf{Con}(U_{\dot\beta}) \urcorner$ (гладкость $\mathsf{Ax}_U(\alpha; x)$)
3. $\forall \beta \prec \alpha\, \Box_{\mathsf{EA}}(\mathsf{Con}(V_{\dot\beta}) \to \mathsf{Con}(U_{\dot\beta}))$ (по $\mathrm{IH}(\alpha)$)
4. $\forall \beta \prec \alpha\, \Box_V(\alpha; \ulcorner \mathsf{Con}(V_{\dot\beta}) \urcorner)$ (гладкость $\mathsf{Ax}_V(\alpha; x)$)
5. $\forall \beta \prec \alpha\, \Box_V(\alpha; \ulcorner \mathsf{Con}(U_{\dot\beta}) \urcorner)$ (по 3, 4)
6. $\Box_V(\alpha; x)$ (по 2, 5)

q.e.d.

По аналогии с определением прогрессий, основанных на итерации формулы непротиворечивости (40), могут быть определены и прогрессии, основанные на итерации других схем рефлексии. Например, гладкая нумерация прогрессии $\mathsf{Rfn}(T)_\alpha$, основанной на итерации локальной схемы рефлексии над T вдоль элементарного линейного порядка $(D, \prec)$, определена естественной формализацией условия

$$\mathsf{Rfn}(T)_\alpha \equiv T + \{\mathsf{Rfn}(\mathsf{Rfn}(T)_{\overline{\beta}}) \mid \beta \prec \alpha\},$$

то есть как неподвижная точка $\mathsf{Ax}_T(z; x)$ следующего вида:

$$\mathsf{Ax}_T(z; x) \leftrightarrow \mathsf{Ax}_T(x) \lor (z \in D \land \exists u \in D\ (u \prec z \land \exists v \in St\ x = (\ulcorner \Box_T(\dot u; \dot v) \urcorner \dot\to v))).$$

Если $\Phi(T)$ — некоторая из рассмотренных ранее в диссертации схем рефлексии для теории T, и фиксировано некоторое элементарное вполне упорядочение $(D, \prec)$, то через $(\Phi(T)_\alpha)_{\alpha \in D}$ будем обозначать гладкую прогрессию, основанную на итерации схемы Φ вдоль $(D, \prec)$. Таким образом $T_\alpha \equiv \mathsf{Con}(T)_\alpha$; мы также сохраняем обозначение $(T)^n_\alpha$ для прогрессии, основанной на итерации схемы равномерной Π_n-рефлексии над T, то есть $(T)^n_\alpha \equiv \mathsf{RFN}_{\Pi_n}(T)_\alpha$. Аналоги условий верифицируемости, доказуемой монотонности и теорем существования и единственности имеют место для всех таких прогрессий с аналогичными доказательствами, которые мы не будем повторять.

В дальнейшем мы будем проводить довольно сложные рассуждения в формализованном контексте. Поэтому нам будет удобно, чтобы не перегружать запись формул, ввести некоторые соглашения, которым мы будем следовать до конца этого раздела. Вхождения переменных $n, m, k, \ldots$ и $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ в формулы под знаком "$\vdash$" в случае, если они не связаны квантором явно, считаются нумералами (т.е. сокращениями для $\overline{n}, \overline{m}, \overline{k}, \ldots$ и $\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\gamma}, \ldots$, соответственно). Выражение $U \equiv V$ при использовании в формализованном контексте считается сокращением для формулы $\forall x\, (\Box_U(x) \leftrightarrow \Box_V(x))$. Аналогично,

$$\begin{aligned} U \subseteq V &\ := \ \forall x\, (\Box_U(x) \to \Box_V(x)), \\ U \subseteq_{\Pi_n} V &\ := \ \forall x \in St \cap \Pi_n\, (\Box_U(x) \to \Box_V(x)), \\ U \equiv_{\Pi_n} V &\ := \ \forall x \in St \cap \Pi_n\, (\Box_U(x) \leftrightarrow \Box_V(x)). \end{aligned}$$

Аналогичные сокращения будем употреблять и для других классов арифметической иерархии.

7.3 Прогрессии близкой силы

Рефлексивная индукция позволяет легко сравнивать между собой прогрессии, основанные на принципах, в некотором смысле, близкой силы. Это дает возможность распостранить на итерированные схемы рефлексии некоторые результаты о консервативности для схем локальной и равномерной рефлексии, полученные нами в §2.3 и §6.3. В этом параграфе мы считаем фиксированным некоторое элементарное вполне упорядочение $(D, \prec)$.

Следующее утверждение обобщает теорему 1 (iii).

Предложение 7.9. *Для любой элементарно аксиоматизированной теории T следующие утверждения доказуемы в* EA*:*

(i) $\forall\alpha\ \mathsf{Rfn}_{\Sigma_1}(T)_\alpha \subseteq \mathsf{Rfn}(T)_\alpha$;

(ii) $\forall\alpha\ \mathsf{Rfn}(T)_\alpha \subseteq_{\mathcal{B}(\Sigma_1)} \mathsf{Rfn}_{\Sigma_1}(T)_\alpha$.

Доказательство. Мы приведем неформальное рассуждение с помощью рефлексивной индукции по α, опирающееся на схему $B\Sigma_1$ как в доказательстве предложения 7.5. Обозначим прогрессии $V^\alpha := \mathsf{Rfn}_{\Sigma_1}(T)_\alpha$ и $U^\alpha := \mathsf{Rfn}(T)_\alpha$.

(i) В силу гладкости, любая аксиома теории V^α либо является аксиомой T, и в этом случае доказывать нечего, либо является примером схемы $\mathsf{Rfn}_{\Sigma_1}(V^\beta)$ для некоторого $\beta \prec \alpha$, то есть имеет вид $\Box_{V^\beta}\sigma \to \sigma$ для некоторого $\sigma \in St \cap \Sigma_1$. По рефлексивному предположению индукции имеем

$$\mathsf{EA} \vdash \Box_{V^\beta}\sigma \to \Box_{U^\beta}\sigma.$$

Отсюда следует, что

$$\mathsf{EA} \vdash (\Box_{U^\beta}\sigma \to \sigma) \to (\Box_{V^\beta}\sigma \to \sigma).$$

Таким образом $U^\alpha \vdash \Box_{V^\beta}\sigma \to \sigma$, в силу гладкости U^α, то есть мы показали, что любая аксиома теории V^α является теоремой U^α, что и требовалось.

(ii) Допустим $U^\alpha \vdash \delta$, где $\delta \in St \cap \mathcal{B}(\Sigma_1)$. В силу гладкости и формализованной теоремы о дедукции найдутся такие $\beta_1, \dots, \beta_m \prec \alpha$ и предложения $\varphi_1, \dots, \varphi_m$, что

$$T \vdash \bigwedge_{i=1}^m (\Box_{U^{\beta_i}}\varphi_i \to \varphi_i) \to \delta.$$

В силу доказуемой монотонности, полагая $\beta := \max\{\beta_1, \dots, \beta_m\}$, имеем

$$T \vdash \bigwedge_{i=1}^m (\Box_{U^\beta}\varphi_i \to \varphi_i) \to \delta. \tag{45}$$

Отсюда, так же как и в доказательстве теоремы 1, получаем некоторые $\mathcal{B}(\Sigma_1)$-предложения $\psi_1, \dots, \psi_m$, для которых

$$T \vdash \bigwedge_{i=1}^m (\Box_{U^\beta}\psi_i \to \psi_i) \to \delta. \tag{46}$$

(Заметим, что эти предложения вместе с выводом (46) строятся элементарно по выводу (45).) Но по рефлексивному предположению индукции

$$\mathsf{EA} \vdash \Box_{U^\beta}\psi_i \to \Box_{V^\beta}\psi_i,$$

откуда вытекает (с использовнием $B\Sigma_1$), что

$$T \vdash \bigwedge_{i=1}^m (\Box_{V^\beta}\psi_i \to \psi_i) \to \delta$$

и $V^\alpha \vdash \delta$, в силу гладкости V^α, q.e.d.

Аналогично доказываются следующие обобщения теоремы 1 (i) и (ii).

Предложение 7.10. *Для любой элементарно аксиоматизированной теории T, для любого $n > 1$ следующие утверждения доказуемы в* EA*:*

(i) $\forall\alpha\ \mathsf{Rfn}_{\Sigma_n}(T)_\alpha \subseteq \mathsf{Rfn}(T)_\alpha, \quad \forall\alpha\ \mathsf{Rfn}_{\Pi_n}(T)_\alpha \subseteq \mathsf{Rfn}(T)_\alpha$;

(ii) $\forall\alpha\ \mathsf{Rfn}(T)_\alpha \subseteq_{\Sigma_n} \mathsf{Rfn}_{\Sigma_n}(T)_\alpha, \quad \forall\alpha\ \mathsf{Rfn}(T)_\alpha \subseteq_{\Pi_n} \mathsf{Rfn}_{\Pi_n}(T)_\alpha$.

Полезно также отметить очевидную релятивизацию 7.9.

Предложение 7.11. *Для любой элементарно аксиоматизированной теории T следующие утверждения доказуемы в* EA*:*

(i) $\forall\alpha\ \mathsf{Rfn}^{\Pi_n}_{\Sigma_{n+1}}(T)_\alpha \subseteq \mathsf{Rfn}^{\Pi_n}(T)_\alpha$;

(ii) $\forall\alpha\ \mathsf{Rfn}^{\Pi_n}(T)_\alpha \subseteq_{\mathcal{B}(\Sigma_{n+1})} \mathsf{Rfn}^{\Pi_n}_{\Sigma_{n+1}}(T)_\alpha$.

Мы также имеем следующее обобщение 6.25. Его доказательство опирается на формализацию 6.20, которая возможна в EA^+, но не в самой теории EA. (Неэлементарность связана исключительно с применяемой в этом доказательстве теоремой об устранении сечения.)

Предложение 7.12. *Для любого элементарно аксиоматизированного* Π_2-*-расширения T теории* EA *следующие утверждения доказуемы в* EA^+*:*

(i) $\forall\alpha\ \mathsf{Rfn}_{\Sigma_1}(T)_\alpha \subseteq \mathsf{RFN}_{\Sigma_1}(T)_\alpha$*;*

(ii) $\forall\alpha\ \mathsf{RFN}_{\Sigma_1}(T)_\alpha \subseteq_{\Sigma_2} \mathsf{Rfn}_{\Sigma_1}(T)_\alpha$.

Доказательство. Утверждение (i) очевидно. Мы докажем лишь вторую часть теоремы. Обозначим $U^\alpha := \mathsf{RFN}_{\Sigma_1}(T)_\alpha$; $V^\alpha := \mathsf{Rfn}_{\Sigma_1}(T)_\alpha$. Приведем неформальное рассуждение с помощью рефлексивной индукции по α в EA^+.

Допустим $U^\alpha \vdash \sigma$, где $\sigma \in St \cap \Sigma_2$. Тогда в силу гладкости и доказуемой монотонности U^α для некоторого $\beta \prec \alpha$ имеем

$$T + \mathsf{RFN}_{\Sigma_1}(U^\beta) \vdash \sigma.$$

Заметим, что в силу монотонности

$$T + \mathsf{RFN}_{\Sigma_1}(V^\beta) \vdash \mathsf{RFN}_{\Sigma_1}(\mathsf{EA}),$$

то есть $T + \mathsf{RFN}_{\Sigma_1}(V^\beta)$ содержит EA^+. С другой стороны, по рефлексивному предположению индукции

$$\mathsf{EA}^+ \vdash \forall x \in St \cap \Sigma_1\ (\Box_{U^\beta}(x) \leftrightarrow \Box_{V^\beta}(x)),$$

откуда

$$\mathsf{EA}^+ \vdash \mathsf{RFN}_{\Sigma_1}(U^\beta) \leftrightarrow \mathsf{RFN}_{\Sigma_1}(V^\beta).$$

Таким образом, мы получаем, что $\mathsf{RFN}_{\Sigma_1}(U^\beta)$ содержится в $T + \mathsf{RFN}_{\Sigma_1}(V^\beta)$, а значит

$$T + \mathsf{RFN}_{\Sigma_1}(V^\beta) \vdash \sigma.$$

Отсюда

$$T + \neg\sigma + \mathsf{RFN}_{\Sigma_1}(V^\beta) \vdash \bot,$$

и по (формализованному) предложению 6.20

$$T + \neg\sigma + \Pi_1\text{-}\mathsf{RR}_{\Pi_1}(V^\beta) \vdash \bot,$$

а следовательно

$$T + \neg\sigma + \mathsf{Rfn}_{\Sigma_1}(V^\beta) \vdash \bot.$$

Таким образом,
$$T + \mathsf{Rfn}_{\Sigma_1}(V^{\beta}) \vdash \sigma,$$
то есть $V_\alpha \vdash \sigma$, q.e.d.

Непосредственная релятивизация предыдущей теоремы дает следующее утверждение.

Предложение 7.13. *Для любого $n \geq 1$, для любого элементарно аксиоматизированного Π_{n+1}-расширения T теории EA следующие утверждения доказуемы в EA^+:*

(i) $\forall\alpha\ \mathsf{RFN}_{\Sigma_n}(T)_\alpha \subseteq_{\Sigma_{n+1}} \mathsf{Rfn}^{\Pi_{n-1}}_{\Sigma_n}(T)_\alpha$;

(ii) $\forall\alpha\ \mathsf{Rfn}^{\Pi_{n-1}}_{\Sigma_n}(T)_\alpha \subseteq \mathsf{RFN}_{\Sigma_n}(T)_\alpha$.

7.4 Хорошие вполне упорядочения

Для сравнения прогрессий, построенных на принципах существенно различной силы, рассматриваемые элементарные вполне упорядочения должны удовлетворять некоторым дополнительным условиям "естественности". Во-первых, естественно потребовать, чтобы ординальные операции $+$, $\cdot$ и ω^x были также представлены элементарными функциями, и чтобы их базисные свойства можно было установить в EA. Это условие более аккуратно формулируется следующим образом.

Зафиксируем произвольный ε-ординал λ и рассмотрим λ как структуру первого порядка с индивидными константами $0, 1, \omega$; унарными предикатами $\mathsf{Suc}, \mathsf{Lim}$, определяющими множество ординалов-последователей и предельных ординалов $< \lambda$, соответственно; бинарными отношениями $<, =$ и стандартными ординальными функциями $+, \cdot$ и ω^x.

В Приложении мы даем довольно длинный список аксиом теории первого порядка NWO в описанном языке, суммирующих нужные нам базисные свойства этой структуры. Теория NWO позволяет заменить некоторые простые неформальные рассуждения об ординалах формальными. Для удобства читателя мы вынесли все такие рассуждения в Приложение, а в тексте доказательств в последующих параграфах проставили ссылки на фактически используемые аксиомы и теоремы NWO. Так, например, ссылка A9b указывает на теорему NWO номер 9b из Приложения.

С учетом этого мы даем следующее определение хорошего вполне упорядочения.

Определение 7.1. *Хорошим вполне упорядочением* называется интерпретация теории NWO в EA такая, что

- Ее область D и все атомарные предикаты $<, \mathsf{Suc}, \mathsf{Lim}$, функции $+, \cdot, \omega^x$ и константы $0, 1, \omega$ определены элементарными арифметическими формулами (термами)[6].

- Интерпретация $\prec$ отошения $<$ вполне упорядочивает множество D в стандартной модели арифметики.

- Натуральные числа могут быть отождествлены с ординалами $< \omega$, то есть найдется элементарная функция $(\cdot)^\circ$, удовлетворяющая в EA соотношениям
$$(\mathbf{0})^\circ = 0; \qquad (n{+}\mathbf{1})^\circ = (n)^\circ + 1$$

[6]Константы считаются 0-местными функциональными символами и интерпретируются как нумералы.

такая, что

$$\mathsf{EA} \vdash \forall\alpha\ (\alpha \prec \omega \to \exists n\ \alpha = (n)^\circ). \tag{47}$$

Последнее свойство хороших вполне упорядочений является довольно сильным и полезным требованием, так как оно влечет следующую лемму.

Лемма 7.14. *Для хороших вполне упорядочений схема индукции по элементарным предикатам для ординалов $< \omega$ допустима в EA, то есть*

$$\mathsf{EA} \vdash \forall\alpha \prec \omega\ (\forall\beta \prec \alpha\ A(\beta) \to A(\alpha)) \to \forall\alpha \prec \omega\ A(\alpha)$$

для любой элементарной формулы $A(\alpha)$.

Доказательство. Расмотрим элементарную формулу $A'(n) := A((n)^\circ)$ и докажем $\forall n\, A'(n)$ с помощью индукции по n. Затем воспользуемся условием (47). В качестве промежуточного шага в EA можно установить

$$\forall m, n\ (m < n \leftrightarrow (m)^\circ \prec (n)^\circ)$$

по индукции на основе A10 и определения $(\cdot)^\circ$, q.e.d.

7.5 Композиция прогрессий

Теорема о единственности для гладких прогрессий позволяет нам корректно использовать обозначения $(T_\alpha)_\beta$ для композиции прогрессий, определенных вдоль одного и того же элементарного линейного порядка. Для хороших вполне упорядочений можно установить следующее “очевидное"соотношение, которое в дальнейшем будет использоваться без явного упоминания.

Лемма 7.15. *Для гладкой прогрессии вдоль хорошего вполне упорядочения следующая эквивалентность доказуема в EA:*

$$\forall\alpha\forall\beta\ (T_\alpha)_\beta \equiv T_{\alpha+\beta}.$$

Доказательство. Доказательство использует рефлексивную индукцию по β в EA с опорой на $B\Sigma_1$ как в доказательстве теоремы 7.5. Мы приведем неформальное рассуждение.

Для включения ($\subseteq$) имеем: любая аксиома $(T_\alpha)_\beta$ либо является аксиомой T_α, и в этом случае доказывать нечего, поскольку по A4a $\alpha \preceq \alpha + \beta$. Либо аксиома имеет вид $\mathsf{Con}((T_\alpha)_\delta)$, для некоторого $\delta \prec \beta$, и тогда по предположению рефлексивной индукции

$$\mathsf{EA} \vdash \mathsf{Con}(T_{\alpha+\delta}) \to \mathsf{Con}((T_\alpha)_\delta).$$

Таким образом, мы заключаем

$$\begin{array}{rcll} T_{\alpha+\beta} & \vdash & \mathsf{Con}(T_{\alpha+\delta}), & \text{по A4c и определению гладкости} \\ & \vdash & \mathsf{Con}((T_\alpha)_\delta). & \end{array}$$

Для доказательства противоположного включения мы рассуждаем следующим образом. Любая аксиома $T_{\alpha+\beta}$ либо является аксиомой T, и тогда доказывать нечего, поскольку $T \subseteq T_\alpha \subseteq (T_\alpha)_\beta$. Либо она имеет вид $\mathsf{Con}(T_\gamma)$ для некоторого $\gamma \prec \alpha + \beta$. По A9a имеет место $\gamma \prec \alpha$ или $\exists\delta \prec \beta\ (\gamma = \alpha + \delta)$. В первом случае результат следует по монотонности, то есть лемме 7.3 (i), а во втором случае предположение индукции дает

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{EA} \vdash \mathsf{Con}((T_\alpha)_\delta) & \to & \mathsf{Con}(T_{\alpha+\delta}) \\ & \to & \mathsf{Con}(T_\gamma). \end{array}$$

Таким образом, в силу гладкости мы получаем

$$(T_\alpha)_\beta \vdash \mathsf{Con}(T_\gamma),$$

q.e.d.

Отметим, что утверждение, аналогичное 7.15, имеет место и для других типов прогрессий.

7.6 Итерированная непротиворечивость и локальная рефлексия

В этом разделе мы устанавливаем базисные соотношения для сравнения прогрессий, основанных на итерации формулы непротиворечивости и схемы локальной рефлексии, обобщающие предложение 2.25. Эти соотношения также оказываются полезными для сравнения других типов прогрессий существенно различной силы.

Пусть T — элементарно аксиоматизированная начальная теория, содержащая EA, а $(D, \prec)$ — хорошее вполне упорядочение.

Предложение 7.16. *В* EA *доказуемо:*

(i) $\forall \alpha \succeq 1\ \forall \beta\ \ T_{\omega^\alpha \cdot (1+\beta)} \subseteq (\mathsf{Rfn}_{\Sigma_1}(T)_\alpha)_\beta$;

(ii) $\forall \alpha \succeq 1\ \forall \beta\ \ (\mathsf{Rfn}(T)_\alpha)_\beta \subseteq_{\Pi_1} T_{\omega^\alpha \cdot (1+\beta)}$.

Доказательство. Для доказательства части (i) нам понадобится следующая вспомогательная лемма. Для краткости временно обозначим, для любой элементарно аксиоматизированной теории U, теорию $\mathsf{Rfn}_{\Sigma_1}(U)_\alpha$ через U^α.

Лемма 7.17. *В* EA *доказуемо*

(i) $\forall \alpha \prec \omega\ U^1 \vdash \mathsf{Con}(U_\alpha)$;

(ii) $\forall \gamma\ \forall \alpha \prec \omega\ U^1 \vdash \mathsf{Con}(U_\gamma) \to \mathsf{Con}(U_{\gamma+\alpha})$.

Доказательство. Часть (i) очевидно следует из (ii). Заметим также, что на неформальном уровне оба утверждения доказываются простой индукцией по конечному ординалу α. Доказательство части (ii) опирается на тот факт, что для хороших вполне упорядочений натуральные числа отождествляются с ординалами $\prec \omega$ с помощью функции $(\cdot)^\circ$. Так, для фиксированного γ мы определяем арифметическую формулу

$$I(x) := (\mathsf{Con}(U_\gamma) \to \mathsf{Con}(U_{\gamma+x^\circ}))$$

и доказываем в EA, что

$$\forall n\ U^1 \vdash I(n). \tag{48}$$

Рассуждаем индукцией по n. Очевидно, $U^1 \vdash I(\mathbf{0})$ и, если $U^1 \vdash I(n)$ то $U^1 \vdash I(n+\mathbf{1})$, поскольку

$$\begin{array}{rcll} U^1 \vdash \mathsf{Con}(U_\gamma) & \to & \mathsf{Con}(U_{\gamma+n^\circ}), & \text{по предп. инд.} \\ & \to & \mathsf{Con}(U + \mathsf{Con}(U_{\gamma+n^\circ})), & \text{по } \mathsf{Rfn}_{\Sigma_1}(U) \\ & \to & \mathsf{Con}(U_{\gamma+n^\circ+1}), & \text{по лемме 7.3} \\ & \to & \mathsf{Con}(U_{\gamma+(n+\mathbf{1})^\circ}), & \text{по определению } (\cdot)^\circ. \end{array}$$

Остается заметить, что длина вывода формулы $I(n)$ в U^1 оценивается элементарной функцией от n, поэтому вышеописанная индукция по n допустима в EA. Теперь мы вспоминаем, что для хороших вполне упорядочений в EA доказуемо $\forall\alpha \prec \omega\ \exists n\ \alpha = n^\circ$, и, таким образом, $\forall\alpha \prec \omega\ \exists n\ U^1 \vdash \alpha = n^\circ$ по Σ_1-полноте. Вместе с (48) это доказывает лемму, q.e.d.

Лемма 7.18. *В* EA *доказуемо* $\forall\alpha \succeq 1\, \forall\beta\ \forall\gamma\ (T^\gamma)_{\omega^\alpha\cdot(1+\beta)} \subseteq (T^{\gamma+\alpha})_\beta$.

Доказательство. Мы докажем утверждение $\forall\gamma\ (T^\gamma)_{\omega^\alpha\cdot(1+\beta)} \subseteq (T^{\gamma+\alpha})_\beta$, рассуждая в EA с помощью двойной рефлексивной индукции по $\langle\alpha,\beta\rangle$. Как в доказательстве теоремы 7.5 мы пользуемся схемой Σ_1-подстановки, то есть устанавливаем, что каждая аксиома теории $(T^\gamma)_{\omega^\alpha\cdot(1+\beta)}$ доказуема в $(T^{\gamma+\alpha})_\beta$.

В силу гладкости, любая аксиома $(T^\gamma)_{\omega^\alpha\cdot(1+\beta)}$ либо есть аксиома T^γ (в этом случае наше утверждение тривиально), либо имеет вид $\mathsf{Con}((T^\gamma)_\delta)$ для некоторого $\delta \prec \omega^\alpha\cdot(1+\beta)$. Мы рассматриваем несколько случаев.

Случай 1: $\alpha = 1$.

Случай 1.1: $\beta = 0$. Тогда $\omega^\alpha\cdot(1+\beta) = \omega^1\cdot(1+0) = \omega\cdot 1 = \omega$ по A3b, A5d и A7b. Таким образом $\delta \prec \omega$ и лемма 7.17 (i) дает: $(T^{\gamma+1})_0 \equiv (T^\gamma)^1 \vdash \mathsf{Con}((T^\gamma)_\delta)$.

Случай 1.2: $\mathsf{Suc}(\beta)$, то есть β есть ординал-последователь.

По A11 найдется β' такой, что $\beta = \beta' + 1$. Тогда $\omega\cdot(1+\beta) = \omega\cdot(1+\beta') + \omega$ и, следовательно, по A9b, $\delta \preceq \omega\cdot(1+\beta') + \nu$ для некоторого $\nu \prec \omega$. В силу доказуемой монотонности имеем:

$$T \vdash \mathsf{Con}((T^\gamma)_{\omega\cdot(1+\beta')+\nu}) \to \mathsf{Con}((T^\gamma)_\delta). \tag{49}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}(T^{\gamma+1})_\beta &\vdash \mathsf{Con}((T^{\gamma+1})_{\beta'})\\ &\vdash \mathsf{Con}((T^\gamma)_{\omega\cdot(1+\beta')}), \quad \text{по предп. инд.}\\ &\vdash \mathsf{Con}((T^\gamma)_{\omega\cdot(1+\beta')+\nu}), \quad \text{по лемме 7.17 (ii)}\\ &\vdash \mathsf{Con}((T^\gamma)_\delta), \quad \text{по (49).}\end{aligned}$$

Случай 1.3: $\mathsf{Lim}(\beta)$, то есть β есть предельный ординал. По A15a найдется $\beta' \prec \beta$ такой, что $\delta \preceq \omega\cdot(1+\beta')$. Предположение индукции вместе с доказуемой монотонностью влечет

$$\begin{aligned}T \vdash \mathsf{Con}((T^{\gamma+1})_{\beta'}) &\to \mathsf{Con}((T^\gamma)_{\omega\cdot(1+\beta')})\\ &\to \mathsf{Con}((T^\gamma)_\delta).\end{aligned}$$

Однако, для любого $\beta' \prec \beta$ по определению гладкости мы имеем

$$(T^{\gamma+1})_\beta \vdash \mathsf{Con}((T^{\gamma+1})_{\beta'}),$$

откуда

$$(T^{\gamma+1})_\beta \vdash \mathsf{Con}((T^\gamma)_\delta).$$

Случай 2: $\alpha = \alpha' + 1$ есть ординал-последователь, $\alpha' \succeq 1$.

Случай 2.1: $\beta = 0$.

По лемме 7.17 (i) мы имеем $T^{\gamma+\alpha'+1} \vdash \mathsf{Con}((T^{\gamma+\alpha'})_\nu)$, для всех $\nu \prec \omega$. Отсюда следует, что $T^{\gamma+\alpha} \vdash \mathsf{Con}((T^\gamma)_{\omega^{\alpha'}\cdot(1+\nu)})$, по предположению индукции. Поскольку $\delta \prec \omega^\alpha = \omega^{\alpha'+1} = \omega^{\alpha'} \cdot \omega$, мы заключаем, что для некоторого $\nu \prec \omega$, $\delta \preceq \omega^{\alpha'} \cdot \nu \preceq \omega^{\alpha'} \cdot (1+\nu)$ (по A6a, A6b, A13), а значит $T^{\gamma+\alpha} \vdash \mathsf{Con}((T^\gamma)_\delta)$ по доказуемой монотонности.

Случай 2.2: $\beta = \beta' + 1$ есть ординал-последователь. Тогда $\omega^\alpha \cdot (1+\beta) = \omega^\alpha \cdot (1+\beta') + \omega^\alpha$. Поскольку $\delta \prec \omega^\alpha \cdot (1+\beta)$, найдется $\nu \prec \omega$ такой, что $\delta \preceq \omega^\alpha \cdot (1+\beta') + \omega^{\alpha'} \cdot \nu$ (по A9b и A6a). По лемме 7.17 (ii) имеем:

$$T^{\gamma+\alpha'+1} \vdash \mathsf{Con}((T^{\gamma+\alpha'})_{\omega\cdot(1+\beta')}) \to \mathsf{Con}((T^{\gamma+\alpha'})_{\omega\cdot(1+\beta')+\nu}) \tag{50}$$

С другой стороны,

$$\begin{array}{rll} (T^{\gamma+\alpha})_\beta & \vdash & \mathsf{Con}((T^{\gamma+\alpha})_{\beta'}) \\ & \vdash & \mathsf{Con}((T^{(\gamma+\alpha')+1})_{\beta'}) \\ & \vdash & \mathsf{Con}((T^{\gamma+\alpha'})_{\omega\cdot(1+\beta')}), \quad \text{по пр. инд. для } \tilde{\alpha}=1,\ \tilde{\beta}=\beta',\ \tilde{\gamma}=\gamma+\alpha' \\ & \vdash & \mathsf{Con}((T^{\gamma+\alpha'})_{\omega\cdot(1+\beta')+\nu}), \quad \text{по (50)} \\ & \vdash & \mathsf{Con}((T^{\gamma})_{\omega^{\alpha'}\cdot\omega\cdot(1+\beta')+\omega^{\alpha'}\cdot\nu}), \quad \text{по пр. инд. с } \tilde{\alpha}=\alpha' \\ & \vdash & \mathsf{Con}((T^{\gamma})_{\omega^{\alpha}\cdot(1+\beta')+\omega^{\alpha'}\cdot\nu}) \\ & \vdash & \mathsf{Con}((T^{\gamma})_{\delta}), \quad \text{по монотонности.} \end{array}$$

Случай 2.3: β есть предельный ординал. Тогда найдется $\beta' \prec \beta$ такой, что $\delta \preceq \omega^\alpha \cdot (1+\beta')$, по A15a. Таким образом, мы получаем:

$$\begin{array}{rll} (T^{\gamma+\alpha})_\beta & \vdash & \mathsf{Con}((T^{\gamma+\alpha})_{\beta'}) \\ & \vdash & \mathsf{Con}((T^{\gamma})_{\omega^{\alpha}\cdot(1+\beta')}), \quad \text{по пр. инд.} \\ & \vdash & \mathsf{Con}((T^{\gamma})_{\delta}), \quad \text{по монотонности.} \end{array}$$

Случай 3: α есть предельный ординал.

Случай 3.1: $\beta = 0$. Мы имеем $\delta \prec \omega^{\alpha'}$ для подходящего $\alpha' \prec \alpha$, по A8b. Тогда, очевидно,

$$\begin{array}{rll} (T^{\gamma+\alpha})_0 \equiv T^{\gamma+\alpha} & \vdash & \mathsf{Con}(T^{\gamma+\alpha'}) \\ & \vdash & \mathsf{Con}((T^{\gamma})_{\omega^{\alpha'}}), \quad \text{по пр. инд.} \\ & \vdash & \mathsf{Con}((T^{\gamma})_{\delta}). \end{array}$$

Случай 3.2: $\beta = \beta' + 1$ есть ординал-последователь. Тогда $\delta \preceq \omega^\alpha \cdot (1 + \beta') + \omega^{\alpha'}$, для некоторого $\alpha' \prec \alpha$ (по A9b и A8b). Пусть λ таков, что $\alpha' + \lambda = \alpha$ (A4b); ясно, что $1 \preceq \lambda \preceq \alpha$ (A3b, A4c, A4d). По лемме 7.17 мы имеем:

$$T^{\gamma+\alpha} \supseteq T^{\gamma+\alpha'+1} \vdash \mathsf{Con}((T^{\gamma+\alpha'})_{\omega^\lambda\cdot(1+\beta')}) \to \mathsf{Con}((T^{\gamma+\alpha'})_{\omega^\lambda\cdot(1+\beta')+1}) \tag{51}$$

С другой стороны,

$$
\begin{array}{lll}
(T^{\gamma+\alpha})_\beta & \vdash & \mathsf{Con}((T^{\gamma+\alpha})_{\beta'}) \\
& \vdash & \mathsf{Con}((T^{(\gamma+\alpha')+\lambda})_{\beta'}) \\
& \vdash & \mathsf{Con}((T^{\gamma+\alpha'})_{\omega^\lambda\cdot(1+\beta')}), \quad \text{по IH для } \tilde\alpha=\lambda,\ \tilde\beta=\beta',\ \tilde\gamma=\gamma+\alpha' \\
& \vdash & \mathsf{Con}((T^{\gamma+\alpha'})_{\omega^\lambda\cdot(1+\beta')+1}), \quad \text{по (51)} \\
& \vdash & \mathsf{Con}((T^{\gamma})_{\omega^{\alpha'}\cdot\omega^\lambda\cdot(1+\beta')+\omega^{\alpha'}}), \quad \text{по пр. инд. для } \tilde\alpha=\alpha' \\
& \vdash & \mathsf{Con}((T^{\gamma})_{\omega^{\alpha}\cdot(1+\beta')+\omega^{\alpha'}}) \\
& \vdash & \mathsf{Con}((T^{\gamma})_{\delta}), \quad \text{по монотонности.}
\end{array}
$$

Случай 3.3: β есть предельный ординал. Этот случай полностью аналогичен случаю 2.3.

Рассмотренные 9 случаев исчерпывают все возможные в силу аксиом A2c, A2d, определяющих предикаты Suc и Lim. Это наблюдение завершает доказательство леммы 7.18 и вместе с ней части (i) предложения 7.16.

Обозначим через $U\restriction n$ теорию, аксиоматизированную над PC всеми аксиомами U с гёделевыми номерами $\leq n$, то есть $\mathsf{Ax}_{U\restriction n}(x) := \mathsf{Ax}_U(x)\wedge x\leq n$. Мы будем писать $V\rhd U$ для сокращения формулы $\forall n\,\Box_V\mathsf{Con}(\mathsf{EA}+U\restriction\dot n)$.

Лемма 7.19. *Для любых элементарно аксиоматизированных теорий U и V, содержащих* EA, *в* EA *доказуемо:*

(i) $V\subseteq U\to V\subseteq_{\Pi_1}U$

(ii) $U\rhd V\to V\subseteq_{\Pi_1}U$

(iii) $V\subseteq_{\Pi_1}U\to(\mathsf{Con}(U)\to\mathsf{Con}(V))$

Доказательство. Утверждения (i) и (iii) тривиальны. Утверждение (ii) следует из доказуемой Σ_1-полноты, q.e.d.

Если теория V рефлексивна, то есть если $V\rhd V$, мы также имеем $V\subseteq_{\Pi_1}U\to U\rhd V$, и тем самым отношения $V\subseteq_{\Pi_1}U$ и $U\rhd V$ становятся эквивалентными. Хорошо известно, что для рефлексивных теорий отношения $\subseteq_{\Pi_1}$ и $\rhd$ совпадают с отношением относительной интерпретируемости (см., например, [14, 44].)

Для доказательства части (ii) предложения 7.16 нам понадобится следующая лемма. Временно обозначим через U^α теорию $\mathsf{Rfn}(U)_\alpha$.

Лемма 7.20. *Для любой элементарно аксиоматизированной теории U в* EA *доказуемо*

(i) $\forall n\ U_\omega\vdash\mathsf{Con}(U+U^1\restriction n)$.

(ii) $\forall\alpha\,\forall n\ U_{\alpha+\omega}\vdash\mathsf{Con}(U+\mathsf{Con}(U_\alpha)+U^1\restriction n)$.

Доказательство. Часть (i) есть арифметический перевод следствия 2.19. Для доказательства формализуемости этого утверждения в EA заметим, во-первых, что $\mathbf{GL}$-вывод модальной формулы

$$\neg\Box^{n+1}\bot\to\Diamond\bigwedge_{i=1}^{n}(\Box p_i\to p_i).$$

может быть найден как элементарная функция от n. Это вытекает из того известного факта, что разрешающая процедура для логики **GL** элементарна (верифицируемо в EA). Во-вторых, заметим, что EA-доказательство арифметического перевода этой модальной формулы, по существу, получается из соответствующего **GL**-вывода подстановкой всюду арифметических предложений (или их гёделевых номеров) вместо пропозициональных переменных. Таким образом, результат подстановки является элементарным относительно гёделевых номеров этих предложений, и тот факт, что он есть EA-вывод, может быть верифицирован в EA с помощью ограниченной индукции по длине **GL**-вывода. Наконец, для данного n мы можем элементарно вычислить арифметические предложения $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, для которых

$$\mathsf{EA} \vdash \Diamond_U \bigwedge\nolimits_{i=1}^{n} (\Box_U \varphi_i \to \varphi_i) \to \mathsf{Con}(U + U^1 \restriction n).$$

Это следует из того, что при стандартной гёделевой нумерации не более чем n частных случаев схемы локальной рефлексии могут иметь номера меньшие n.

Комбинируя вместе эти три факта мы заключаем, что для любого n доказательство в EA формулы

$$\neg \Box_U^{n+1} \bot \to \mathsf{Con}(U + U^1 \restriction n)$$

восстанавливается элементарно по n (и верифицируемо в EA). Осталось заметить, что элементарная индукция по n также показывает, что

$$\forall n \ \mathsf{EA} \vdash \neg \Box_U^{n+1} \bot \leftrightarrow \mathsf{Con}(U_{n^\circ}),$$

откуда можно вывести $\forall n \ U_\omega \vdash \neg \Box_U^{n+1} \bot$, воспользовавшись следующим свойством хороших вполне упорядочений:

$$\mathsf{EA} \vdash \forall n \, (n^\circ \prec \omega).$$

Последнее легко устанавливается элементарной индукцией по n на основе A14d. Это завершает наше доказательство леммы 7.20 (i).

Для доказательства части (ii) мы приведем неформальное рассуждение в EA.

В силу (i) мы имеем

$$\forall n \ U_{\alpha+\omega} \vdash \mathsf{Con}(U_\alpha + (U_\alpha)^1 \restriction n). \tag{52}$$

С другой стороны, по доказуемой монотонности

$$(U^1 + \mathsf{Con}(U_\alpha)) \subseteq (U_\alpha)^1,$$

и, таким образом, для любого n найдется m (фактически $m = \max(n, \ulcorner \Box_U(\alpha; \ulcorner \bot \urcorner) \to \bot \urcorner))$ такое, что

$$(U + U^1 \restriction n + \mathsf{Con}(U_\alpha)) \subseteq U + (U_\alpha)^1 \restriction m. \tag{53}$$

При этом также имеется элементарная граница на размер вывода формулы в теории $U + (U_\alpha)^1 \restriction m$ в зависимости от её вывода в $U + U^1 \restriction n + \mathsf{Con}(U_\alpha)$, что дает возможность формализации очевидного включения (53) в EA. Отсюда мы можем заключить, что

$$\mathsf{EA} \vdash \mathsf{Con}(U + (U_\alpha)^1 \restriction m) \to \mathsf{Con}(U + U^1 \restriction n + \mathsf{Con}(U_\alpha)).$$

Следовательно, в силу (52) получаем

$$\forall n \ \ U_{\alpha+\omega} \vdash \mathsf{Con}(U + U^1 \restriction n + \mathsf{Con}(U_\alpha)),$$

q.e.d.

Лемма 7.21. *В* EA *доказуемо*

$$\forall\alpha \succeq 1\,\forall\beta\ \forall\gamma\ \forall n\ (T^\gamma)_{\omega^\alpha\cdot(1+\beta)} \vdash \mathsf{Con}(T + (T^{\gamma+\alpha})_\beta \restriction n).$$

Доказательство. Мы рассуждаем двойной рефлексивной индукцией по $\langle\alpha,\beta\rangle$ в EA и рассматриваем следующие случаи.

Случай 1: $\alpha = 1$.

Случай 1.1: $\beta = 0$.

Нам надо показать, что для всех n $(T^\gamma)_{\omega^1\cdot(1+0)} \equiv (T^\gamma)_\omega \vdash \mathsf{Con}(T + T^{\gamma+1}\restriction n)$. Но это вытекает из леммы 7.20.

Случай 1.2: $\beta = \beta' + 1$ есть ординал-последователь.

Прежде всего заметим, что для всех n,

$$\begin{array}{rcl} (T^{\gamma+1})_\beta \restriction n & \equiv & ((T^{\gamma+1})_{\beta'} + \mathsf{Con}((T^{\gamma+1})_{\beta'})) \restriction n \\ & \subseteq & (T^{\gamma+1})_{\beta'} \restriction n + \mathsf{Con}((T^{\gamma+1})_{\beta'}) \\ & \subseteq & T + (T^{\gamma+1}) \restriction n + \mathsf{Con}((T^{\gamma+1})_{\beta'}), \end{array}$$

поскольку по монотонности $T \vdash \mathsf{Con}((T^{\gamma+1})_{\beta'}) \to \mathsf{Con}((T^{\gamma+1})_\delta)$ для всех $\delta \prec \beta'$.

Как и в доказательстве леммы 7.20 (ii) для данного включения теорий имеется (доказуемая) элементарная верхняя оценка удлиннения выводов, и само включение является формализуемым в EA. Отсюда мы получаем

$$T \vdash \mathsf{Con}(T^\gamma + (T^{\gamma+1}) \restriction n + \mathsf{Con}((T^{\gamma+1})_{\beta'})) \to \mathsf{Con}(T + (T^{\gamma+1})_\beta \restriction n). \tag{54}$$

С другой стороны, предположение индукции влечет

$$T \vdash (T^\gamma)_{\omega\cdot(1+\beta')} \rhd (T^{\gamma+1})_{\beta'},$$

откуда

$$T \vdash \mathsf{Con}((T^\gamma)_{\omega\cdot(1+\beta')}) \to \mathsf{Con}((T^{\gamma+1})_{\beta'})$$

по лемме 7.19, и из (54) мы можем заключить

$$T \vdash \mathsf{Con}(T^\gamma + (T^{\gamma+1}) \restriction n + \mathsf{Con}((T^\gamma)_{\omega\cdot(1+\beta')})) \to \mathsf{Con}(T + (T^{\gamma+1})_\beta \restriction n). \tag{55}$$

Применяя лемму 7.20 (ii) к теории T^γ получаем

$$\forall n\ \ (T^\gamma)_{\omega\cdot(1+\beta')+\omega} \vdash \mathsf{Con}(T^\gamma + (T^{\gamma+1}) \restriction n + \mathsf{Con}((T^\gamma)_{\omega\cdot(1+\beta')})),$$

и вместе с (55) это дает требуемое.

Случай 1.3: β есть предельный ординал.

Для каждого n найдется $\beta' \prec \beta$ такой, что $(T^{\gamma+1})_\beta \restriction n \subseteq (T^{\gamma+1})_{\beta'}$. (Возьмем β' больше, чем любой $\delta \prec \beta$ для которого $\ulcorner\mathsf{Con}((T^{\gamma+1})_\delta)\urcorner \leq n$.) Формализуя этот простой факт в EA, как и в предыдущем случае получаем

$$T \vdash \mathsf{Con}((T^{\gamma+1})_{\beta'}) \to \mathsf{Con}(T + (T^{\gamma+1})_\beta \restriction n). \tag{56}$$

С другой стороны, мы имеем

$$\begin{array}{rll} (T^\gamma)_{\omega\cdot(1+\beta)} & \vdash & \mathsf{Con}((T^\gamma)_{\omega\cdot(1+\beta')}),\ \ \text{по A15b} \\ & \vdash & \mathsf{Con}((T^{\gamma+1})_{\beta'}),\ \ \text{по пр. инд. и лемме 7.19} \\ & \vdash & \mathsf{Con}(T + (T^{\gamma+1})_\beta \restriction n)\ \ \text{по (56).} \end{array}$$

Случай 2: $\alpha = \alpha' + 1$ есть ординал-последователь, $\alpha' \succeq 1$.

Случай 2.1: $\beta = 0$. Нам надо показать:

$$\forall n \;\; (T^{\gamma})_{\omega^{\alpha'+1}} \vdash \mathsf{Con}(T + T^{\gamma+\alpha'+1} \restriction n).$$

Заметим, что по лемме 7.20 для каждого n найдется $\delta \prec \omega$ такой, что

$$(T^{\gamma+\alpha'})_{\delta} \vdash \mathsf{Con}(T + T^{\gamma+\alpha'+1} \restriction n).$$

По Σ_1-полноте мы получаем

$$\begin{array}{rcl} T \vdash \mathsf{Con}((T^{\gamma+\alpha'})_{\delta}) & \to & \mathsf{Con}(T + \mathsf{Con}(T + T^{\gamma+\alpha'+1} \restriction n)) \\ & \to & \mathsf{Con}(T + T^{\gamma+\alpha} \restriction n). \end{array} \tag{57}$$

По A15b, A14a и алгебраическим свойствам ω^x для любого $\delta \prec \omega$,

$$\omega^{\alpha'} \cdot (1+\delta) \prec \omega^{\alpha'} \cdot \omega = \omega^{\alpha'+1} = \omega^{\alpha}.$$

Отсюда вытекает, что

$$\begin{array}{rcl} (T^{\gamma})_{\omega^{\alpha}} & \vdash & \mathsf{Con}((T^{\gamma})_{\omega^{\alpha'}\cdot(1+\delta)}) \\ & \vdash & \mathsf{Con}((T^{\gamma+\alpha'})_{\delta}), \;\; \text{по пр. инд. и лемме 7.19} \\ & \vdash & \mathsf{Con}(T + T^{\gamma+\alpha} \restriction n), \;\; \text{по (57).} \end{array}$$

Случай 2.2: $\beta = \beta' + 1$ есть ординал-последователь. Во-первых, аналогично случаю 1.2 мы имеем, что для всех n,

$$(T^{\gamma+\alpha})_{\beta} \restriction n \subseteq T + (T^{\gamma+\alpha}) \restriction n + \mathsf{Con}((T^{\gamma+\alpha})_{\beta'}),$$

и формализация этого утверждения в EA дает

$$T \vdash \mathsf{Con}(T + (T^{\gamma+\alpha}) \restriction n + \mathsf{Con}((T^{\gamma+\alpha})_{\beta'})) \to \mathsf{Con}(T + (T^{\gamma+\alpha})_{\beta} \restriction n) \tag{58}$$

С другой стороны, по лемме 7.20 (ii)

$$\forall n \;\; (T^{\gamma+\alpha'})_{\omega\cdot(1+\beta')+\omega} \vdash \mathsf{Con}(T^{\gamma+\alpha'} + (T^{\gamma+\alpha}) \restriction n + \mathsf{Con}((T^{\gamma+\alpha'})_{\omega\cdot(1+\beta')})),$$

и предположение индукции для $\tilde{\alpha} = 1$, $\tilde{\beta} = \beta'$, $\tilde{\gamma} = \gamma + \alpha'$ вместе с леммой 7.19 дает:

$$T \vdash \mathsf{Con}((T^{\gamma+\alpha'})_{\omega\cdot(1+\beta')}) \to \mathsf{Con}((T^{\gamma+\alpha})_{\beta'}).$$

Таким образом, по (58), A9b и гладкости, для любого n найдется $\delta \prec \omega$ такой, что

$$(T^{\gamma+\alpha'})_{\omega\cdot(1+\beta')+\delta} \vdash \mathsf{Con}(T + (T^{\gamma+\alpha})_{\beta} \restriction n).$$

По Σ_1-полноте отсюда вытекает, что

$$T \vdash \mathsf{Con}((T^{\gamma+\alpha'})_{\omega\cdot(1+\beta')+\delta}) \to \mathsf{Con}(T + (T^{\gamma+\alpha})_{\beta} \restriction n). \tag{59}$$

Таким образом, мы получаем

$$\begin{array}{rcl} (T^{\gamma})_{\omega^{\alpha}\cdot(1+\beta)} \equiv (T^{\gamma})_{\omega^{\alpha}\cdot(1+\beta')+\omega^{\alpha'}\cdot\omega} & \vdash & \mathsf{Con}((T^{\gamma})_{\omega^{\alpha'}\cdot(\omega\cdot(1+\beta'))+\omega^{\alpha'}\cdot\delta}), \;\; \text{по A6b, A4c} \\ & \vdash & \mathsf{Con}((T^{\gamma+\alpha'})_{\omega\cdot(1+\beta')+\delta}), \;\; \text{по пр. инд.} \\ & \vdash & \mathsf{Con}(T + (T^{\gamma+\alpha})_{\beta} \restriction n), \;\; \text{по (59).} \end{array}$$

Случай 2.3: β есть предельный ординал.

Как в случае 1.3, для каждого n мы находим $\beta' \prec \beta$ такой, что $(T^{\gamma+\alpha})_\beta \restriction n \subseteq (T^{\gamma+\alpha})_{\beta'}$ и

$$T \vdash \mathsf{Con}((T^{\gamma+\alpha})_{\beta'}) \to \mathsf{Con}(T + (T^{\gamma+\alpha})_\beta \restriction n). \tag{60}$$

С другой стороны, мы имеем

$$\begin{array}{rcl} (T^\gamma)_{\omega^\alpha\cdot(1+\beta)} & \vdash & \mathsf{Con}((T^\gamma)_{\omega^\alpha\cdot(1+\beta')}), \quad \text{по A15b} \\ & \vdash & \mathsf{Con}((T^{\gamma+\alpha})_{\beta'}), \quad \text{по пр. инд. и 7.19} \\ & \vdash & \mathsf{Con}(T + (T^{\gamma+\alpha})_\beta \restriction n) \quad \text{по (60).} \end{array}$$

Случай 3: α есть предельный ординал.

Случай 3.1: $\beta = 0$.

Как и в случае 1.3, для любого n найдется ординал $\alpha' \prec \alpha$ такой, что $(T^{\gamma+\alpha}) \restriction n \subseteq T^{\gamma+\alpha'}$ и

$$T \vdash \mathsf{Con}(T^{\gamma+\alpha'}) \to \mathsf{Con}(T + T^{\gamma+\alpha} \restriction n). \tag{61}$$

Таким образом, мы получаем

$$\begin{array}{rcl} (T^\gamma)_{\omega^\alpha} & \vdash & \mathsf{Con}((T^\gamma)_{\omega^{\alpha'}}), \quad \text{по A8a} \\ & \vdash & \mathsf{Con}(T^{\gamma+\alpha'}), \quad \text{по пр. инд. и лемме 7.19} \\ & \vdash & \mathsf{Con}(T + T^{\gamma+\alpha} \restriction n), \quad \text{по (61).} \end{array}$$

Случай 3.2: $\beta = \beta' + 1$ есть ординал-последователь.

Как и в случае 2.2, для каждого n мы находим $\alpha' \prec \alpha$ такой, что $(T^{\gamma+\alpha}) \restriction n \subseteq T^{\gamma+\alpha'} + \mathsf{Con}((T^{\gamma+\alpha})_{\beta'})$ и

$$T \vdash \mathsf{Con}(T^{\gamma+\alpha'} + \mathsf{Con}((T^{\gamma+\alpha})_{\beta'})) \to \mathsf{Con}(T + (T^{\gamma+\alpha})_\beta \restriction n). \tag{62}$$

Пусть λ таков, что $\alpha'+\lambda = \alpha$, тогда, очевидно, $1 \preceq \lambda \preceq \alpha$. По предположению индукции для $\tilde\alpha = \lambda$, $\tilde\beta = \beta'$, $\tilde\gamma = \gamma + \alpha'$ и лемме 7.19 мы имеем

$$T \vdash \mathsf{Con}((T^{\gamma+\alpha'})_{\omega^\lambda\cdot(1+\beta')}) \to \mathsf{Con}((T^{\gamma+\alpha})_{\beta'}),$$

и таким образом, по (62)

$$\begin{array}{rcl} (T^{\gamma+\alpha'})_{\omega^\lambda\cdot(1+\beta')+1} & \vdash & \mathsf{Con}(T^{\gamma+\alpha'} + \mathsf{Con}((T^{\gamma+\alpha'})_{\omega^\lambda\cdot(1+\beta')})) \\ & \vdash & \mathsf{Con}(T + (T^{\gamma+\alpha})_\beta \restriction n). \end{array}$$

По Σ_1-полноте отсюда следует, что

$$T \vdash \mathsf{Con}((T^{\gamma+\alpha'})_{\omega^\lambda\cdot(1+\beta')+1}) \to \mathsf{Con}(T + (T^{\gamma+\alpha})_\beta \restriction n). \tag{63}$$

Теперь мы последовательно выводим

$$\begin{array}{rcl} (T^\gamma)_{\omega^\alpha\cdot(1+\beta'+1)} & \vdash & \mathsf{Con}((T^\gamma)_{\omega^\alpha\cdot(1+\beta')+\omega^{\alpha'}}), \quad \text{по A8a, A4c} \\ & \vdash & \mathsf{Con}((T^\gamma)_{\omega^{\alpha'}\cdot(\omega^\lambda\cdot(1+\beta')+1)}) \\ & \vdash & \mathsf{Con}((T^{\gamma+\alpha'})_{\omega^\lambda\cdot(1+\beta')+1}), \quad \text{по пр. инд. для } \tilde\alpha = \alpha' \\ & \vdash & \mathsf{Con}(T + (T^{\gamma+\alpha})_\beta \restriction n), \quad \text{по (63).} \end{array}$$

Случай 3.3: β есть предельный ординал.

Этот случай полностью аналогичен случаю 2.3. Это завершает наше доказательство леммы 7.21 и вместе с ней части (ii) предложения 7.16, q.e.d.

В качестве непосредственного следствия в условиях предложения 7.16 получаем следующую теорему.

Теорема 7. *Для любых α, β, где $\alpha \succeq 1$, доказуемо в EA имеют место следующие соотношения:*

(i) $(\mathsf{Rfn}(T)_\alpha)_\beta \equiv_{\Pi_1} T_{\omega^\alpha\cdot(1+\beta)}$; $\quad \mathsf{Rfn}(T_\beta)_\alpha \equiv_{\Pi_1} T_{\beta+\omega^\alpha}$;

(ii) $\mathsf{Rfn}(T)_\alpha \equiv_{\Pi_1} T_{\omega^\alpha}$.

7.7 Итерированная равномерная рефлексия

Теорема 7 в комбинации с результатами §7.3 позволяет получить ряд интересных результатов о сравнении прогрессий, основанных на итерации равномерных схем рефлексии. Прежде всего, предложение 7.16 допускает следующую очевидную релятивизацию.

Предложение 7.22. *Для любого $n \geq 1$ следующие утверждения доказуемы в EA,*

(i) $\forall\alpha \succeq 1\ \forall\beta\ \ (T)^n_{\omega^\alpha\cdot(1+\beta)} \subseteq (\mathsf{Rfn}^{\Pi_{n-1}}_{\Sigma_n}(T)_\alpha)^n_\beta$;

(ii) $\forall\alpha \succeq 1\ \forall\beta\ \ (\mathsf{Rfn}^{\Pi_{n-1}}(T)_\alpha)_\beta \subseteq_{\Pi_n} (T)^n_{\omega^\alpha\cdot(1+\beta)}$.

Доказательство получается из формальной релятивизации предложения 7.16 и того очевидного наблюдения (верифицируемого рефлексивной индукцией), что доказуемо в EA для всех α

$$\mathsf{Con}^{\Pi_{n-1}}(T)_\alpha \equiv \mathsf{RFN}_{\Pi_n}(T)_\alpha,$$

q.e.d.

Комбинируя эту теорему с 7.13 получаем следующее утверждение, обобщающее теорему Шмерля [35], доказанную им лишь для специальных иерархий вида $(\mathsf{PRA})^n_\alpha$.

Предложение 7.23. *Для любого $n \geq 1$, для любого элементарно аксиоматизированного Π_{n+1}-расширения T теории EA следующие утверждения доказуемы в EA^+:*

(i) $\forall\alpha \succeq 1\ (T)^{n+1}_\alpha \subseteq_{\Pi_n} (T)^n_{\omega^\alpha}$;

(ii) $\forall\alpha \succeq 1\ (T)^n_{\omega^\alpha} \subseteq (T)^{n+1}_\alpha$.

Доказательство. Достаточно заметить, что в условиях теоремы для любого α

$$(T)^{n+1}_\alpha \subseteq_{\Sigma_{n+1}} \mathsf{Rfn}^{\Pi_{n-1}}_{\Sigma_n}(T)_\alpha \subseteq_{\Pi_n} (T)^n_{\omega^\alpha},$$

в силу предложений 7.13 и 7.22, соответственно, q.e.d.

Следующая полезная лемма доказывается аналогично теореме о единственности.

Лемма 7.24. *Пусть U, V — элементарно аксиоматизированные теории, содержащие EA, а Γ — один из классов Σ_{k+1}, Π_{k+1} или $\mathcal{B}(\Sigma_k)$, для $k \geq n$. Тогда*

$$\mathsf{EA} \vdash U \subseteq_\Gamma V \quad \Longrightarrow \quad \mathsf{EA} \vdash \forall\alpha\ (U)^n_\alpha \subseteq_\Gamma (V)^n_\alpha.$$

Доказательство. Рассуждая с помощью рефлексивной индукции по α допустим $U_\alpha \vdash \varphi$ для некоторого предложения $\varphi \in \Gamma$. Тогда для некоторого $\beta \prec \alpha$

$$U + \mathsf{RFN}_{\Pi_n}((U)^n_\beta) \vdash \varphi.$$

По рефлексивному предположению индукции

$$U + \mathsf{RFN}_{\Pi_n}((V)^n_\beta) \vdash \varphi,$$

а значит

$$U \vdash \neg\mathsf{RFN}_{\Pi_n}((V)^n_\beta) \vee \varphi.$$

Последняя формула лежит в Γ, поэтому

$$V \vdash \neg\mathsf{RFN}_{\Pi_n}((V)^n_\beta) \vee \varphi$$

и тем самым $V_\alpha \vdash \varphi$, q.e.d.

Введем ординальные функции $\omega_n(\alpha)$ следующим образом:

$$\begin{cases} \omega_0(\alpha) & := & \alpha \\ \omega_{k+1}(\alpha) & := & \omega^{\omega_k(\alpha)} \end{cases}$$

Обозначим $\omega_n := \omega_n(1)$, $\quad \varepsilon_0 := \sup\{\omega_n \mid n < \omega\}$.

Следующая теорема обобщает предложение 7.23.

Теорема 8. *Для любых $n, m \geq 1$, для любого элементарно аксиоматизированного Π_{n+1}-расширения T теории* EA *следующие утверждения доказуемы в* EA^+

(i) $\forall \alpha \succeq 1\ (T)^{n+m}_\alpha \equiv_{\Pi_n} (T)^n_{\omega_m(\alpha)}$;

(ii) $\forall \alpha \succeq 1\ ((T)^{n+m}_\alpha)^n_\beta \equiv_{\Pi_n} (T)^n_{\omega_m(\alpha)\cdot(1+\beta)}$.

Доказательство. Часть (i) получается m-кратным применением 7.23. Для доказательства утверждения (ii) заметим, что по (i) и 7.13

$$(T)^{n+m}_\alpha \equiv_{\Pi_{n+1}} (T)^{n+1}_{\omega_{m-1}(\alpha)} \equiv_{\Sigma_{n+1}} \mathsf{Rfn}^{\Pi_{n-1}}_{\Sigma_n}(T)_{\omega_{m-1}(\alpha)}.$$

В силу леммы 7.24 и предложения 7.22 отсюда вытекает, что

$$((T)^{n+m}_\alpha)^n_\beta \equiv_{\Pi_{n+1}} ((T)^{n+1}_{\omega_{m-1}(\alpha)})^n_\beta \equiv_{\Sigma_{n+1}} (\mathsf{Rfn}^{\Pi_{n-1}}_{\Sigma_n}(T)_{\omega_{m-1}(\alpha)})^n_\beta \equiv_{\Pi_n} (T)^n_{\omega^{\omega_{m-1}(\alpha)}\cdot(1+\beta)},$$

откуда получаем требуемое

$$((T)^{n+m}_\alpha)^n_\beta \equiv_{\Pi_n} (T)^n_{\omega_m(\alpha)\cdot(1+\beta)},$$

q.e.d.

Следующее следствие характеризует ординалы основной иерархии фрагментов арифметики в духе подхода Тьюринга. При этом мы предполагаем, что рассматриваемое хорошее вполне упорядочение имеет тип больший ε_0.

Следствие 7.25. *Для любого $n \geq 1$*

(i) $I\Sigma_n \equiv_{\Pi_2} (\mathsf{EA})^2_{\omega_n} \equiv_{\Pi_1} \mathsf{EA}_{\omega_{n+1}}$, *таким образом* $\mathrm{ord}_{\mathsf{EA}}(I\Sigma_n) = \omega_{n+1}$;

(ii) $\mathsf{PA} \equiv_{\Pi_n} (\mathsf{EA})^n_{\varepsilon_0}$, *таким образом* $\mathrm{ord}_{\mathsf{EA}}(\mathsf{PA}) = \varepsilon_0$.

Доказательство. Утверждение (i) следует из теоремы 8. Утверждение (ii) получается из соотношения

$$\mathsf{PA} \equiv \bigcup_{m\geq 0} (\mathsf{EA})_1^{n+m} \equiv_{\Pi_n} \bigcup_{m\geq 0} (\mathsf{EA})^n_{\omega_m(1)},$$

справедливого для любого $n \geq 1$, q.e.d.

Отметим, что в силу полученных ранее результатов о консервативности $\mathrm{ord}_{\mathsf{EA}}(I\Sigma_n)$ совпадает с ординалом каждой из теорий $I\Sigma_n^R$, $I\Pi_{n+1}^-$, $I\Sigma_n^-$ для $n \geq 1$.

Из теоремы 8 мы также легко выводим соотношения для итерированных равномерных схем рефлексии над PA (их аналоги также получены другим методом У. Шмерлем [35]).

Следствие 7.26. *Для любого $n \geq 1$*

(i) $(\mathsf{PA})^n_\alpha \equiv_{\Pi_n} (\mathsf{EA})^n_{\varepsilon_0\cdot(1+\alpha)}$;

(ii) $(\mathsf{PA})^{n+1}_\alpha \equiv_{\Pi_n} (\mathsf{PA})^n_{\varepsilon_0^\alpha}$, *если* $\alpha \succeq 1$.

Доказательство. Соотношение (i) следует из теоремы 8 (ii) переходом к пределу по m, который допустим в силу леммы 7.24. Соотношение (ii) получается из (i) и 7.23, поскольку для $\alpha \succeq 1$

$$(\mathsf{EA})^{n+1}_{\varepsilon_0\cdot(1+\alpha)} \equiv_{\Pi_n} (\mathsf{EA})^n_{\omega^{\varepsilon_0\cdot(1+\alpha)}} \equiv (\mathsf{EA})^n_{\varepsilon_0\cdot(1+\varepsilon_0^\alpha)} \equiv_{\Pi_n} (\mathsf{PA})^n_{\varepsilon_0^\alpha},$$

q.e.d.

7.8 Беспараметрическая индукция и быстрорастущие функции

Классы доказуемо тотальных рекурсивных функций теорий, содержащих EA, часто характеризуются в терминах *расширенной иерархии Гжегорчика*, иногда называемой "быстрорастущей"иерархией.

Фиксируем каноническое семейство фундаментальных последовательностей для предельных ординалов $< \varepsilon_0$, основанное на канторовской нормальной форме (см. [32]). $\alpha[n]$ означает n-й член фундаментальной последовательности для ординала α. Если α имеет вид $\alpha' + \omega^\beta$ в канторовской нормальной форме, то есть $\alpha = \omega^{\alpha_1} + \cdots + \omega^{\alpha_k} + \omega^\beta$, где $\alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_k \geq \beta$, то

$$\alpha[n] := \begin{cases} \alpha' + \omega^\gamma\cdot(n+1), & \text{если } \beta = \gamma+1, \\ \alpha' + \omega^{\beta[n]}, & \text{если } \beta \text{ — предельный ординал.} \end{cases}$$

Для этого семейства фундаментальных последовательностей иерархия функций F_α для $\alpha < \varepsilon_0$ определяется следующим образом.

$$\begin{cases} F_0(x) & := & x+1 \\ F_{\alpha+1}(x) & := & F_\alpha^{(x+1)}(x) \\ F_\alpha(x) & := & F_{\alpha[x]}(x), \quad \text{если } \alpha \text{ — предельный ординал.} \end{cases}$$

Как обычно, $F^{(n)}(x)$ означает n-кратную итерацию функции $F(x)$, то есть выражение $F(F(\ldots F(x)\ldots))$ (n раз).

Классы функций $\mathcal{E}^\alpha$ для $\alpha < \varepsilon_0$ *расширенной иерархии Гжегорчика* определяются как

$$\mathcal{E}^\alpha := \mathbf{E}(\{F_\beta \mid \beta < \alpha\}).$$

Для $3 \leq \alpha < \omega$ определенные таким образом классы $\mathcal{E}^\alpha$ совпадают с классами $\mathcal{E}^\alpha$ обычной иерархии Гжегорчика. В частности, $\mathcal{E}^3$ есть класс элементарных функций, а $\mathcal{E}^\omega$ есть класс примитивно рекурсивных функций. $\mathcal{E}^{\omega^k}$ совпадает с классом так называемых *k-рекурсивных функций* в смысле Р. Петер (см. [8, 31, 24]).

Известно, что $\mathcal{E}^{\varepsilon_0}$ совпадает с классом д.т.р.ф. арифметики Пеано (Крайзель, Швихтенберг, Вэйнер), современное доказательство см. в [13]. Результаты Парсонса в комбинации с результатами Тейта (см. [32, 28]) уточняют этот результат до соотношения $\mathcal{F}(I\Sigma_n) = \mathcal{E}^{\omega_n}$ для каждого $n \geq 1$.

Из следствий 6.9 и 6.30 мы, тем самым, получаем следующее утверждение.

Предложение 7.27. *Для* $n \geq 1$ $\;\mathcal{F}(I\Pi^-_{n+1}) = \mathcal{F}(I\Sigma_n) = \mathcal{E}^{\omega_n}$.

Интересно отметить, что, хотя теории $I\Pi^-_{n+1}$ и $I\Sigma_n$ несравнимы (ни одна из них не включена в другую), их классы д.т.р.ф. совпадают. Более того, нетрудно видеть, что объединение этих теорий имеет строго больший класс д.т.р.ф., чем каждая из них по отдельности.

Пример 7.28. Известная *функция Аккермана* $Ack(x)$ определяется рекурсией по двум переменным следующим образом. $Ack(x) := g(x, x)$, где

$$\left\{ \begin{array}{rcl} g(x,0) & = & x+1 \\ g(0,n+1) & = & g(1,n) \\ g(x+1,n+1) & = & g(g(x,n+1),n) \end{array} \right.$$

Известно, что Ack растет быстрее, чем любая примитивно рекурсивная функция (см. [32]). Графики g и Ack естественным образом определимы Σ_1-формулами, для которых нетрудно вывести в EA аналоги определяющих равенств, приведенных выше. Для доказательства тотальности Ack достаточно установить тотальность двухаргументной функции $g(x, n)$. Естественное доказательство утвердения $\forall n \forall x \exists y\ g(x, n) = y$ использует индукцию по n. При этом соответствующая индукционная формула имеет сложность Π_2 и не содержит параметров. Однако, для верификации шага индукции необходимо показать, что

$$\forall x \exists y\ g(x,n) = y \to \forall x \exists y\ g(x, n+1) = y.$$

Это утверждение доказуемо с помощью вложенной Σ_1-индукции по x с параметром n. Другими словами, обычное доказательство тотальности функции Аккермана формализуемо в теории $I\Sigma_1 + I\Pi^-_2$. Следствие 6.9 показывает, что *любое* доказательство тотальности Ack, формализуемое в арифметике Пеано, должно использовать индкцию с параметрами (или индукционные формулы вне класса Π_2).

Ниже мы покажем, что $\mathcal{F}(I\Sigma_1 + I\Pi^-_2)$ совпадает с классом *дважды рекурсивных функций* в смысле Петер (см. [32]). Этот класс совпадает с классом $\mathcal{E}^{\omega^2}$ расширенной иерархии Гжегорчика и тем самым содержит функции, растущие много быстрее функции Аккермана. Отметим также, что $\mathcal{F}(I\Pi_2)$ есть класс *кратно-рекурсивных функций*, то есть соответствует в том же смысле ещё большему ординалу ω^ω.

Предложение 7.29. *Для любого* $n \geq 1$ $\;\mathcal{F}(I\Sigma_n + I\Pi^-_{n+1}) = \mathcal{E}^{\omega_n(2)}$. *В частности,* $\mathcal{F}(I\Sigma_1 + I\Pi^-_2) = \mathcal{E}^{\omega^2}$.

Доказательство. Для доказательства этой теоремы мы комбинируем результаты разделов 6 и 7. Кроме того, существенные ингредиенты нашего доказательства содержатся в работе Соммера [41].

Для начала, следуя [41], мы представляем каноническую систему ординальных обозначений до ε_0 элементарными формулами таким образом, чтобы ряд свойств ординальных функций, канторовских нормальных форм и фундаментальных последовательностей был доказуем в EA. Соответствующее элементарное вполне упорядочение по типу ε_0 будет хорошим и, кроме того, обладать рядом дополнительных естественных свойств, перечисленных в [41]. Затем мы определяем элементарную формулу $F_\alpha(x) \simeq y$ от переменных α, x, y, которая равномерно представляет в EA графики функций F_α, определенных выше. Для этой формулы можно установить базисные свойства функциональности и монотонности в EA. Как и в [41], с. 285, затем мы определяем теории S_α для $\alpha < \varepsilon_0$ следующим образом:

$$S_\alpha := \mathsf{EA} + \{\forall x \exists y\, F_{3+\beta}(x) \simeq y \mid \beta < \alpha\}.$$

Аксиомы S_α задаются элементарной формулой

$$\mathsf{Ax}_S(\alpha; x) :\leftrightarrow \mathsf{Ax}_{\mathsf{EA}}(x) \vee \exists \beta < x\, (\beta \prec \alpha \wedge x = \ulcorner \forall u \exists v\, F_{3+\dot\beta}(u) \simeq v \urcorner).$$

Как следствие предложения 4.2 (или по предложению 6.4 из [41]) мы получаем следующее утверждение.

Утверждение 7.30. *Для любого* $\alpha < \varepsilon_0$ $\mathcal{F}(S_\alpha) = \mathcal{E}^{3+\alpha}$.

Предложение 6.10 из [41] может быть переформулировано следующим образом.

Утверждение 7.31. *Доказуемо в* EA *имеет место*

$$\forall \alpha \quad S_\alpha \equiv \mathsf{EA} + \{\mathsf{RFN}_{S_\beta}(\Pi_2) \mid \beta < \alpha\}.$$

Другими словами, с точностью до доказуемой в EA эквивалентности теории S_α представляют собой гладкую прогрессию, основанную на итерации схемы равномерной Π_2-рефлексии вдоль канонического элементарного вполне упорядочения типа ε_0. По теореме о единственности гладких прогрессий 7.5 мы получаем следующее следствие.

Следствие 7.32. *В* EA *доказуемо:*

$$\forall \alpha \quad S_\alpha \equiv (\mathsf{EA})^2_\alpha.$$

Теперь мы готовы завершить доказательство предложения 7.29. Поскольку $I\Sigma_n$ — конечная Π_{n+2}-аксиоматизируемая теория, предложение 6.12 влечет, что теория $I\Sigma_n + I\Pi^-_{n+1}$ Π_{n+1}-консервативна над $(I\Sigma_n)^{n+1}_\omega$. Но $I\Sigma_n$ эквивалентна $(\mathsf{EA})^{n+2}_1$, поэтому по теореме 8

$$(I\Sigma_n)^{n+1}_\omega \equiv ((\mathsf{EA})^{n+2}_1)^{n+1}_\omega \equiv_{\Pi_{n+1}} (\mathsf{EA})^{n+1}_{\omega^2} \equiv_{\Pi_2} (\mathsf{EA})^2_{\omega_{n-1}(\omega^2)} \equiv (\mathsf{EA})^2_{\omega_n(2)}.$$

Поэтому теории $I\Sigma_n + I\Pi^-_{n+1}$ и $(\mathsf{EA})^2_{\omega_n(2)}$ взаимно Π_2-консервативны и имеют один и тот же класс д.т.р.ф.. Требуемое утверждение следует отсюда в силу 7.30 и 7.32, q.e.d.

7.9 Приложение

Теория NWO формулируется в языке первого порядка с равенством, содержащем индивидные константы $0, 1, \omega$; унарные предикаты $\mathsf{Suc}, \mathsf{Lim}$; бинарный предикат $<$ и функции $+, \cdot$ и ω^x. NWO имеет следующие математические аксиомы:

1. $(\lambda, <)$ есть линейный порядок.
   (a) $x < y \wedge y < z \to x < z$
   (b) $\neg x < x$
   (c) $x < y \vee y < x \vee x = y$
2. Аксиомы, определяющие $0, 1, \omega, \mathsf{Suc}, \mathsf{Lim}$ в терминах $<$.
   (a) $0 \leq x \quad (x \leq y$ сокращает $x < y \vee x = y)$
   (b) $0 < 1 \wedge \forall y\,(y < 1 \to y = 0)$
   (c) $\mathsf{Suc}(x) \leftrightarrow \exists z < x\,\forall y\,(y < x \to y \leq z)$
   (d) $\mathsf{Lim}(x) \leftrightarrow x \neq 0 \wedge \neg\mathsf{Suc}(x)$
   (e) $\mathsf{Lim}(\omega) \wedge \forall x < \omega\,\neg\mathsf{Lim}(x)$
3. $(\lambda, +, 0)$ есть моноид.
   (a) $x + (y + z) = (x + y) + z$
   (b) $x + 0 = 0 + x = x$
4. Порядковые свойства $+$.
   (a) $x \leq x + y$
   (b) $x \leq y \to \exists u\,(y = x + u)$
   (c) $x < y \to u + x < u + y$
   (d) $x \leq y \to x + u \leq y + u$
5. Алгебраические свойства $\cdot$.
   (a) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
   (b) $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$
   (c) $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$
   (d) $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$
6. Порядковые свойства $\cdot$.
   (a) $\mathsf{Lim}(y) \wedge z < x \cdot y \to \exists u < y\,(z < x \cdot u)$
   (b) $u < v \wedge x \neq 0 \to x \cdot u < x \cdot v$
7. Алгебраические свойства ω^x.
   (a) $\omega^0 = 1$
   (b) $\omega^1 = \omega$
   (c) $\omega^{x+y} = \omega^x \cdot \omega^y$
8. Порядковые свойства ω^x.
   (a) $x < y \to \omega^x < \omega^y$
   (b) $\mathsf{Lim}(y) \wedge z < \omega^y \to \exists u < y\,(z < \omega^u)$

Теперь мы перечислим некоторые использованные нами теоремы NWO. Для облегчения ссылок мы перечисляем их в едином списке наряду с аксиомами NWO.

9. (a) $z < x + y \to z < x \vee \exists u\,(u < y \wedge z = x + u)$
   Доказательство. По A1 и A4b $\neg z < x$ влечет $x \leq z$ и $\exists u\,(z = x + u)$. По A4c мы имеем $z = x + u \wedge z < x + y \to u < y$, следовательно $z < x + y \wedge \neg z < x \to \exists u\,(u < y \wedge z = x + u)$, q.e.d.

   (b) $z < x + y \wedge y \neq 0 \to \exists u < y\,(z \leq x + u)$ (по A9a)

10. $x + 1$ есть последователь x

   (a) $x < x + 1$ (поскольку $0 < 1 \to x = x + 0 < x + 1$ по A2b, A3b, A4c)

   (b) $u < x + 1 \to u \leq x$ (по A9a, A2b и A3b)

11. $\mathsf{Suc}(x) \leftrightarrow \exists z\,(x = z + 1)$ (по A10 и A2c)

12. (a) $\mathsf{Suc}(y) \to \mathsf{Suc}(x + y)$ (по A11 и A3a)

   (b) $\mathsf{Lim}(y) \to \mathsf{Lim}(x + y)$ (по A9a, A2d и A4c)

13. $x \leq 1 + x$ (по A4d, A3b)

14. (a) $1 + \omega = \omega$
   Доказательство. По A13 мы имеем $\omega \leq 1 + \omega$. Если $\omega < 1 + \omega$ то $\exists u < \omega\,(\omega = 1 + u)$ (по A9a и A2b). Тогда A2e и A12a влекут $\mathsf{Suc}(u)$ (так как $u < \omega$) и $\mathsf{Suc}(1 + u)$, отсюда $\mathsf{Suc}(\omega)$, противоречие.

   (b) $\omega \leq x \to 1 + x = x$ (по A4b,A14a и A3a)

   (c) $x < \omega \to 1 + x < \omega$ (по A4c и A14a)

   (d) $x < \omega \to x + 1 < \omega$ (по A2e и A10)

15. (a) $z < x \cdot (1 + y) \wedge \mathsf{Lim}(y) \to \exists u < y\,(z \leq x \cdot (1 + u))$
   Доказательство. $z < x \cdot (1 + y) = x + x \cdot y$ влечет $\exists v < x \cdot y\,(z \leq x + v)$ по A9b. Результат следует отсюда в силу A6a, A4c и алгебраических свойств $\cdot$.

   (b) $x < y \to \omega^u \cdot (1 + x) < \omega^u \cdot (1 + y)$
   Доказательство. Допустим $x < y$, тогда A8a влечет $\forall u\,\omega^u \neq 0$, откуда $1 + x < 1 + y$ по A4c и $\omega^u \cdot (1 + x) < \omega^u \cdot (1 + y)$ по A6b.

Отметим следующую теорему.

Предложение 7.33. *Для любого рекурсивного ε-ординала λ найдется хорошее вполне упорядочение, имеющее тип λ в стандартной модели арифметики.*

Доказательство этого предложения достаточно стандартно, поэтому мы приведем лишь его основные идеи. Наиболее близкие документированные результаты содержатся, по-видимому, в работах Соммера [40], который установил, что фрагмент NWO, не включающий ординальных функций $\cdot$ и ω^x, имеет элементарную интерпретацию в EA. Более того, Соммер имел дело с более узким классом интерпретаций, а именно, с интерпретациями в слабой арифметической теории $I\Delta_0$.

Конструкция требуемого хорошего вполне упорядочения идет в два шага.

Пусть $\lambda = \varepsilon_\delta$. Прежде всего, мы определяем элементарный линейный порядок $(E, <_E)$ типа δ, то есть строим элементарную интерпретацию в EA лишь аксиом группы A1. Это может быть сделано либо ссылкой на цитированный выше результат Соммера [40], либо можно использовать стандартный результат (см. [33]) утверждающий, что всякий рекурсивный линейный порядок вложим как элементарное подмножество во множество рациональных чисел $\mathbf{Q}$. После этого остается заметить, что обычное отношение порядка на $\mathbf{Q}$ элементарно и доказуемо в EA линейно.

На втором шаге мы полагаем, что $(E, <_E)$ кодирует ε-ординалы $< \lambda$, и используем канторовскую нормальную форму термов, построенных из E и 0 с помощью функций $+$ и ω^x, для кодирования ординалов, находящихся между ε-ординалами. Теорема Кантора о нормальной форме гарантирует, что такая конструкция сопоставляет единственный код $\ulcorner\alpha\urcorner$ каждому ординалу $\alpha < \lambda$. Например, можно положить

$$
\begin{array}{rcl}
\ulcorner 0 \urcorner & := & 0, \\
\ulcorner \varepsilon_\alpha \urcorner & := & \langle 1, e_\alpha \rangle, \quad \text{где } e_\alpha \in E \text{ есть код ординала } \alpha \\
 & & \text{в смысле упорядочения } (E, <_E), \\
\ulcorner \alpha \urcorner & := & \langle 2, \ulcorner \alpha_1 \urcorner, \ldots, \ulcorner \alpha_n \urcorner \rangle, \quad \text{где } \alpha = \omega^{\alpha_1} + \cdots + \omega^{\alpha_n}, \\
 & & \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_n \text{ и } \alpha \text{ не есть } \varepsilon\text{-ординал.}
\end{array}
$$

(Заметим, что если $\alpha = \omega^{\alpha_1} + \cdots + \omega^{\alpha_n}$ не есть ε-ординал, то каждый из ординалов α_i, $1 \leq i \leq n$, строго меньше α. Поэтому определение $\ulcorner\alpha\urcorner$ корректно и однозначно.)

Множество нормальных форм $NF := \{\ulcorner\alpha\urcorner \mid \alpha \in \lambda\}$ и отношение порядка $x \prec y := \exists \alpha, \beta < \lambda\, (x = \ulcorner\alpha\urcorner \wedge y = \ulcorner\beta\urcorner \wedge \alpha < \beta)$ на нём нетрудно определить с помощью одновременной ограниченной рекурсии по аналогии с определением на с. 47 книги [29]. Это доказывает, что построенные отношения являются элементарными. Доказуемая линейность порядка $(E, <_E)$ гарантирует, что порядок $<$, распостраненный таким образом на NF, также будет доказуемо линейным.

Отношения Suc, Lim и функции $+$ и ω^x элементарно определимы в терминах канторовских нормальных форм. Элементарное определение $\cdot$ также даётся на основе формулы

$$
(\omega^{\alpha_1} + \omega^{\alpha_2} + \cdots + \omega^{\alpha_k}) \cdot \omega^\gamma = \begin{cases} \omega^{\alpha_1} + \omega^{\alpha_2} + \cdots + \omega^{\alpha_k} & \text{если } \gamma = 0 \\ \omega^{\alpha_1 + \gamma} & \text{если } \gamma > 0 \end{cases}
$$

и закона дистрибутивности. (Здесь мы предполагаем, что ординал $\omega^{\alpha_1} + \omega^{\alpha_2} + \cdots + \omega^{\alpha_k}$ представлен в канторовской нормальной форме, то есть $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \ldots \geq \alpha_k$.)

После этого все аксиомы A1–A8 нетрудно верифицировать в EA. Требование отождествимости конечных ординалов с натуральными числами в нашей конструкции очевидно выполняется, поскольку такие ординалы кодируются как конечные последовательности вида $\langle 2, 0, \ldots, 0 \rangle$. Это завершает доказательство теоремы 7.33, q.e.d.

Список литературы

[1] С.Н. Артёмов. *Расширения арифметики и модальные логики.* Канд. дисс., Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, 1979.

[2] С.Н. Артёмов. Приложения модальной логики в теории доказательств. В сб. *Вопросы кибернетики. Неклассические логики и их применения*, стр. 3–20. Наука, Москва, 1982.

[3] С.В. Горячев. Об интерпретируемости некоторых расширений арифметики. *Математические заметки*, 40:561–572, 1986.

[4] Н. Катленд. *Вычислимость. Введение в теорию рекурсивных функций.* Мир, Москва, 1983. Пер. с англ. под ред. С.Ю. Маслова.

[5] Г.Е. Минц. Бескванторные и однокванторные системы. *Зап. науч. семинаров ЛОМИ*, 20:115–133, 1971.

[6] А.А. Мучник. О двух подходах к классификации рекурсивных функций. В сб. *Проблемы математической логики: сложность алгоритмов и классы вычислимых функций*, под ред. А.А. Мучника и В.А. Козмидиади, стр. 123–138. МИР, Москва, 1970.

[7] В.П. Оревков. Нижние оценки увеличения сложности выводов после устранения сечений. *Записки науч. сем. ЛОМИ*, 88:137–162, 1979.

[8] Р. Петер. *Рекурсивные функции.* ИЛ, Москва, 1954.

[9] К. Сморинский. Теоремы о неполноте. В сб. *Справочная книга по математической логике*, под ред. Дж. Барвайса, т. 4 “Теория доказательств", стр. 9–53. Москва, Наука, 1983.

[10] Х. Швихтенберг. Теория доказательств: некоторые приложения устранения сечения. В сб. *Справочная книга по математической логике*, под ред. Дж. Барвайса, т. 4 “Теория доказательств", стр. 54–83. Москва, Наука, 1983.

[11] G. Boolos. Reflection principles and iterated consistency assertions. *Journal of Symbolic Logic*, 44:33–35, 1979.

[12] G. Boolos. *The Logic of Provability.* Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[13] W. Buchholz and S. Wainer. Provably computable functions and the fast growing hierarchy. In *Contemporary Math. 65*, pages 179–198, 1987.

[14] S. Feferman. Arithmetization of metamathematics in a general setting. *Fundamenta Mathematicae*, 49:35–92, 1960.

[15] S. Feferman. Transfinite recursive progressions of axiomatic theories. *Journal of Symbolic Logic*, 27:259–316, 1962.

[16] H. Gaifman and C. Dimitracopoulos. Fragments of Peano's arithmetic and the MDRP theorem. In *Logic and algorithmic (Zurich, 1980), (Monograph. Enseign. Math., 30)*, pages 187–206. Genève, University of Genève, 1982.

[17] K. Gödel. Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I. *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 38:173–198, 1931.

[18] P. Hájek and P. Pudlák. *Metamathematics of First Order Arithmetic.* Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[19] R. Kaye, J. Paris, and C. Dimitracopoulos. On parameter free induction schemas. *Journal of Symbolic Logic*, 53(4):1082–1097, 1988.

[20] G. Kreisel and A. Lévy. Reflection principles and their use for establishing the complexity of axiomatic systems. *Zeitschrift f. math. Logik und Grundlagen d. Math.*, 14:97–142, 1968.

[21] D. Leivant. The optimality of induction as an axiomatization of arithmetic. *Journal of Symbolic Logic*, 48:182–184, 1983.

[22] P. Lindström. On partially conservative sentences and interpretability. *Proceedings of the AMS*, 91(3):436–443, 1984.

[23] M.H. Löb. Solution of a problem of Leon Henkin. *Journal of Symbolic Logic*, 20:115–118, 1955.

[24] M.H. Löb and S.S. Wainer. Hierarchies of number-theoretic functions. *Archive for Mathematical Logic*, 13:39–51, 97–113, 1970.

[25] H. Ono. Reflection principles for fragments of arithmetic. *Zeitschrift f. math. Logik und Grundl. d. Math.*, 33(4):317–333, 1987.

[26] C. Parsons. Hierarchies of primitive recursive functions. *Zeitschrift f. math. Logik und Grundlagen d. Math.*, 14(4):357–376, 1968.

[27] C. Parsons. On a number-theoretic choice schema and its relation to induction. In A. Kino, J. Myhill, and R.E. Vessley, editors, *Intuitionism and Proof Theory*, pages 459–473. North Holland, Amsterdam, 1970.

[28] C. Parsons. On n-quantifier induction. *Journal of Symbolic Logic*, 37(3):466–482, 1972.

[29] W. Pohlers. *Proof Theory. An Introduction.* Lecture Notes in Mathematics 1407. Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[30] L.J. Pozsgay. Gödel's Second Theorem for Elementary Arithmetic. *Zeitschrift f. math. Logik und Grundlagen d. Math.*, 14:67–80, 1968.

[31] J.W. Robbin. *Subrecursive hierarchies.* PhD thesis, Princeton University, Princeton, 1965.

[32] H.E. Rose. *Subrecursion: Functions and Hierarchies.* Clarendon Press, Oxford, 1984.

[33] J. Rosenstein. *Linear Orderings.* Academic Press, New York, 1982.

[34] J.B. Rosser. Gödel Theorems for non-constructive logics. *Journal of Symbolic Logic*, 2:129–137, 1937.

[35] U.R. Schmerl. A fine structure generated by reflection formulas over Primitive Recursive Arithmetic. In M. Boffa, D. van Dalen, and K. McAloon, editors, *Logic Colloquium'78*, pages 335–350. North Holland, Amsterdam, 1979.

[36] H. Schwichtenberg. Rekursionszahlen und die Grzegorczyk-Hierarchie. *Archive for Mathematical Logic*, 12:85–97, 1969.

[37] W. Sieg. Fragments of arithmetic. *Annals of Pure and Applied Logic*, 28:33–71, 1985.

[38] W. Sieg. Herbrand analyses. *Archive for Mathematical Logic*, 30:409–441, 1991.

[39] C. Smoryński. *Self-Reference and Modal Logic*. Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[40] R. Sommer. Ordinal arithmetic in $I\Delta_0$. In P. Clote and J. Krajíček, editors, *Arithmetic, Proof theory, and Computational complexity*, pages 320–363. Oxford University Press, 1992.

[41] R. Sommer. Transfinite induction within Peano arithmetic. *Annals of Pure and Applied Logic*, 76(3):231–289, 1995.

[42] R. Statman. Bounds for proof-search and speed-up in the predicate calculus. *Annals of Mathematical Logic*, 15:225–287, 1978.

[43] A.M. Turing. System of logics based on ordinals. *Proc. London Math. Soc.*, ser. 2, 45:161–228, 1939.

[44] A. Visser. The formalization of interpretability. *Studia Logica*, 50(1):81–106, 1991.

[45] A. Wilkie and J. Paris. On the scheme of induction for bounded arithmetic formulas. *Annals of Pure and Applied Logic*, 35:261–302, 1987.

Работы автора по теме диссертации

[46] Л.Д. Беклемишев. Независимые нумерации теорий и рекурсивных прогрессий. *Сибирский математический журнал*, 33(5):22–46, 1992.

[47] Л.Д. Беклемишев. Об ограниченном правиле индукции и итерированных схемах рефлексии над кальмаровской элементарной арифметикой. В сб. *Теоретические и прикладные аспекты математических исследований*, под ред. О.Б.Лупанова. Москва, МГУ, 1994, стр. 36–39.

[48] L.D. Beklemishev. On bimodal logics of provability. *Annals of Pure and Applied Logic*, 68:115–160, 1994.

[49] L.D. Beklemishev. Iterated local reflection versus iterated consistency. *Annals of Pure and Applied Logic*, 75:25–48, 1995.

[50] L.D. Beklemishev. Notes on local reflection principles. *Logic Group Preprint Series* 133, University of Utrecht, 1995, 8 p.

[51] L.D. Beklemishev. Remarks on Magari algebras of PA and $I\Delta_0 + \mathrm{EXP}$. In *Logic and Algebra*, P.Agliano, A.Ursini, eds., pages 317–325. Marcel Dekker, New York, 1996.

[52] L.D. Beklemishev. Induction rules, reflection principles, and provably recursive functions. *Annals of Pure and Applied Logic*, 85:193–242, 1997.

[53] L.D. Beklemishev. Parameter free induction and reflection. In G. Gottlob, A. Leitsch, and D. Mundici, editors, *Computational Logic and Proof Theory*. Lecture Notes in Computer Science 1289. Springer-Verlag, Berlin, 1997, pp. 103–113.

[54] L.D. Beklemishev. A proof-theoretic analysis of collection. *Archive for Mathematical Logic*, 34(4–5):216–238, 1998.