РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ имени В. А. СТЕКЛОВА

На правах рукописи
УДК 512.73

Кузнецов Александр Геннадьевич

ГОМОЛОГИЧЕСКАЯ ПРОЕКТИВНАЯ ДВОЙСТВЕННОСТЬ

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва — 2008

Работа выполнена в Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук,
профессор В.А. Исковских

доктор физико-математических наук,
профессор Д.И. Пионтковский

доктор физико-математических наук,
профессор Н.А. Тюрин

Ведущая организация:
Санкт-Петербургское Отделение Математического Института им. В.А. Стеклова РАН

Защита диссертации состоится 25 сентября в 14 $\underline{00}$ часов на заседании диссертационного совета Д.002.022.03 при Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН по адресу:
Москва 119991, ул. Губкина д.8, Математический институт им. В.А. Стеклова РАН.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Математического института им. В.А. Стеклова РАН.

Автореферат разослан 20 августа 2008 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д.002.022.03 при МИАН,
доктор физико-математических наук Н.П.Долбилин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. Основная цель настоящей работы — изучение производных категорий когерентных пучков на алгебраических многообразиях. В настоящее время эта задача стала весьма актуальной — во многом в связи с возникшим интересом со стороны физики. Здесь нельзя не упомянуть гипотезу о гомологической зеркальной симметрии, предложенную М.Концевичем[1], которая предсказывает эквивалентность производной категории когерентных пучков алгебраического многообразия и производной категории Фукаи зеркального симплектического многообразия.

Изначально, гипотеза зеркальной симметрии была сформулирована для многообразий Калаби–Яу, то есть для многообразий с тривиальным каноническим классом. Затем, было предложено ее обобщение на случай многообразий с обильным каноническим или антиканоническим классом. Для таких многообразий зеркальным многообразием является так называемая модель Ландау–Гинзбурга, то есть симплектическое многообразие с функцией (которая называется суперпотенциалом), гладкие множества уровня которой наследуют симплектическую структуру. Аналог категории Фукаи для модели Ландау–Гинзбурга, так называемая "направленная категория Фукаи", имеет блочно-верхне-треугольную структуру, блоки которой связаны с критическими значениями суперпотенциала. Таким образом, гомологическая зеркальная симметрия для многообразий Фано (многообразий с обильным антиканоническим классом) предсказывает наличие на их производных категориях блочно-верхне-треугольной структуры.

Структуры такого рода на производных категориях алгебраических многообразий и на более общих триангулированных категориях впервые были изучены в работах А.Бондала и Д.Орлова[2] и были названы полуортогональными

[1] Kontsevich M., *Homological algebra of mirror symmetry*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994), 120–139, Birkhäuser, Basel, 1995.

[2] Bondal A., Orlov D., *Semiorthogonal decomposition for algebraic varieties*, Max Planck Institut für Mathematik, Bonn, 1995, p.55; Bondal A., Orlov D., *Derived categories of coherent sheaves*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Beijing, 2002), 47–56, Higher Ed. Press, Beijing, 2002.

разложениями. По определению полуортогональное разложение триангулированной категории задается упорядоченным набором ее полных триангулированных подкатегорий (блоков или компонент), таких что нет никаких морфизмов из объектов в компоненте с большим номером в объекты в компоненте с меньшим номером (верхне-треугольная структура), и всякий объект обладает фильтрацией, присоединенные факторы которой содержатся в компонентах разложения.

Простейшие полуортогональные разложения (для них каждая компонента эквивалентна производной категории векторных пространств) получаются из исключительных наборов в производных категориях. Первый пример исключительного набора был получен А.Бейлинсоном[3] при изучении производной категории когерентных пучков на проективном пространстве. Набор на $\mathbb{P}^n$ состоит из линейных расслоений $\mathcal{O}, \mathcal{O}(1), \dots \mathcal{O}(n)$. Другие наборы на проективном пространстве, а также исключительные наборы на поверхностях дель Пеццо были построены участниками семинара Рудакова[4]. Другим направлением исследований стал поиск исключительных наборов на однородных многообразиях. Исключительные наборы на квадриках и грассманианах (и прочих однородных пространствах для группы SL_n) были построены М.Капрановым[5]. Наконец, изучались исключительные наборы на некоторых многомерных многообразиях Фано. На трехмерном многообразии V_5 исключительный набор был построен Д.Орловым[6], на трехмерном многообразии V_{22} — автором[7], на

[3]Бейлинсон А. А., *Когерентные пучки на* $\mathbb{P}^n$ *и проблемы линейной алгебры*, Функ. Анализ и его Прил., т. 12, N. 3 (1978) 68–69.

[4]Gorodentsev A., Rudakov A., *Exceptional vector bundles on projective spaces*, Duke Math. J. **54** (1987), no. 1, 115–130.; Кулешов С., Орлов Д., *Исключительные пучки на поверхностях дель Пеццо*, Изв. РАН. Сер. матем., 1994, 58:3, 53–87; Орлов Д., *Проективные расслоения, моноидальные преобразования и производные категории когерентных пучков*, Изв. РАН. Сер. матем., 1992, 56:4, 852–862.

[5]Kapranov M., *On the derived categories of coherent sheaves on some homogenious spaces*, Invent. Math., v. 92, N. 2 (1988) 479-508.

[6]Орлов Д., *Исключительный набор векторных расслоений на многообразии* V_5 , Вестник МГУ Сер. I Мат. Мех. 1991, N. 5, 69–71.

[7]Кузнецов А., *Исключительный набор векторных расслоений на многообразиях* V_{22} , Вестник МГУ Сер. I Мат. Мех. 1996, , N. 3, 41–44.

шестимерном однородном пространстве группы $\mathsf{Sp}(6)$ — А.Самохиным[8], и наконец на пятимерном однородном пространстве группы G_2 — М.Разиным.

Примеры полуортогональных разложений с более сложными компонентами возникают при проективизации векторных расслоений и раздутиях. Если X — проективизация расслоения ранга r на многообразии S, то производная категория когерентных пучков на X обладает полуортогональным разложением с r компонентами, каждая из которых эквивалентна производной категории многообразия S. Это полуортогональное разложение, являющееся аналогом исключительного набора Бейлинсона в относительной ситуации, было построено Д.Орловым[9]. Там же было построено полуортогональное разложение раздутия X гладкого многообразия Y в гладком подмногообразии Z, состоящее из $c = \dim Y - \dim Z$ компонент, одна из которых эквивалентна производной категории многообразия Y, а каждая из остальных $c-1$ компонент — производной категории многообразия Z. Наконец, совершенно замечательное полуортогональное разложение для трехмерного пересечения X двух квадрик было получено А.Бондалом и Д.Орловым[10]. Это разложение состоит из трех компонент. Две порождаются исключительными расслоениями (эквивалентны производным категориям векторных пространств), а третья эквивалентна производной категории кривой C рода 2, которая строится следующим образом. В пучке квадрик, проходящих через X ровно 6 квадрик особы. Кривая C является двулистным накрытием $\mathbb{P}^1$ (прямой, параметризующей квадрики, проходящие через X) с ветвлением в 6 точках, соответствующих особым квадрикам. Затем[11] А.Бондал и Д.Орлов предложили обобщение этой конструкции, описывающее производную категорию произвольного полного пересечения квадрик X, в котором нетривиальной компонентой (в случае пересечения

[8]Самохин А., *Производная категория когерентных пучков на* $LG_3^{\mathbf{C}}$, УМН, 2001, 56:3(339), 177–178.

[9]Орлов Д., *Проективные расслоения, моноидальные преобразования и производные категории когерентных пучков*, Изв. РАН. Сер. матем., 1992, 56:4, 852–862.

[10]Bondal A., Orlov D., *Semiorthogonal decomposition for algebraic varieties*, Max Planck Institut für Mathematik, Bonn, 1995, p.55.

[11]Bondal A., Orlov D., *Derived categories of coherent sheaves*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Beijing, 2002), 47–56, Higher Ed. Press, Beijing, 2002.

четномерных квадрик) является производная категория модулей над некоторым пучком алгебр на двулистном накрытии проективного пространства $\mathbb{P}^n$, параметризующего квадрики, проходящие через X и разветвленного в детерминантальной гиперповерхности особых квадрик. Как будет показано ниже, такое поведение не случайно, а является отражением феномена гомологической проективной двойственности.

Цель работы — изучение поведения полуортогональных разложений производных категорий когерентных пучков на линейных сечениях фиксированного многообразия в общем и частных случаях.

Методы исследования. В работе используются методы алгебраической геометрии и гомологической алгебры — теория когерентных пучков на многообразиях, теория производных категорий и производных функторов.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми. Разработаны методы исследования производных категорий когерентных пучков на линейных сечениях фиксированного многообразия и описания их полуортогональных разложений. Основные результаты диссертации кратко можно сформулировать следующим образом.

- Доказана теорема о гомологической проективной двойственности, описывающая полуортогональные разложения производных категорий фиксированного алгебраического многообразия в терминах его гомологически проективно двойственного многообразия.
- Описана связь гомологической и классической проективной двойственности.
- Построены гомологически проективно двойственные многообразия для линейно вложенных расслоений на проективные пространства.
- Построено гомологически проективно двойственное многообразие для двукратно вложенного по Веронезе проективного пространства.
- Построены гомологически проективно двойственные многообразия для следующих грассманианов $\mathsf{Gr}(2,5)$, $\mathsf{Gr}(2,6)$ и $\mathsf{Gr}(2,7)$ относительно плюккерова вложения.
- Построены гомологически проективно двойственные многообразия для однородных многообразий $\mathsf{OGr}_+(5,10)$, $\mathsf{SGr}(3,6)$ и $\mathsf{G}_2\mathsf{Gr}(2,7)$.

- Описаны возникающие из гомологической проективной двойственности полуортогональные разложения производных категорий трехмерной и четырехмерной кубики, а также трехмерных многообразий Фано V_{12}, V_{14}, V_{16} и V_{18}.

Научная значимость работы. Работа носит теоретический характер. Результаты и методы, представленные и используемые в работе, имеют широкий спектр применения: в алгебраической геометрии и гомологической алгебре, в математической физике, в частности, в теории струн при изучении зеркальной симметрии.

Апробация работы. Результаты диссертации многократно докладывались на семинаре по алгебраической геометрии в Математическом институте РАН им. В.А.Стеклова, на международных конференциях по алгебраической геометрии (Варвикский университет, Великобритания, 2004 г., Кембриджский университет, Великобритания, 2005 г., Математическом институте РАН им. В.А.Стеклова, 2005 г., Корейский институт передовых исследований, Корея, 2006 г., университет Сеговии, Испания, 2006 г., Институт передовых исследований, США, 2007 г., Лозаннская политехническая школа, Швейцария, 2007 г., институт математических исследований, Япония, 2007 г., университет Майами, США 2008 г.), на семинарах по алгебраической геометрии в институте высших научных исслеований (Бюр-сюр-Ивет, 2004 г.), в университете Майами, США 2006 г. в Чикагском университете (Чикаго, 2006 г.), в Массачусетском технологическом институте (Бостон, 2006 г.), в Пенсильванском университете (Пенсильвания, 2007 г.), в школе высших научных исследований (Триест, 2007 г.), в Токийском университете (Токио, 2007 г.).

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, шести глав и списка литературы из 30 наименований. Объем диссертации – 96 страницы.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8].

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы исследования, кратко рассмотрена история задач и их современное состояние, сформулированы основные результаты и описано содержание работы.

В первой главе вводятся основные понятия и формулируются факты, которые будут использоваться в диссертации.

В параграфе 1.1 вводятся основные используемые в работе обозначения и соглашения. В параграфе 1.2 определяются полуортогональные разложения. В параграфе 1.3 определяются исключительные наборы. В параграфе 1.4 приводятся простейшие примеры исключительных наборов и полуортогональных разложений — исключительные наборы на проективных пространствах и грассманианах, а также полуортогональные разложения проективизации векторного расслоения и относительного грассманиана. В параграфе 1.5 вводится понятие насыщенности и определяется функтор Серра. В параграфе 1.6 определяется когомологическая амплитуда функтора, в частности Tor и Ext-амплитуда объектов. В параграфе 1.7 рассматриваются ядерные функторы первого и второго рода. В параграфе 1.8 определяются точные декартовы квадраты и приводятся критерии точности. В параграфе 1.9 рассматриваются производные категории над базой, определяются понятия S-линейной подкатегории и S-линейного функтора. В параграфе 1.10 описывается поведение полуортогональных разложений при замене базы в простейших случаях. В параграфе 1.11 вводится понятие расщепляющего функтора и приводятся критерии того, что функтор является расщепляющим.

Во второй главе вводится понятие некоммутативного многообразия и разрабатывается техника замены базы для некоммутативных многообразий. Все основные определения содержатся в параграфе 2.7, но даже для того, чтобы их точно сформулировать, требуется предварительная работа, которая проделывается в предыдущих параграфах этой главы. Некоммутативным многообразием называется триангулированная категория $\mathcal{A}$, эквивалентная допустимой подкатегории в ограниченной производной категории $\mathcal{D}^b(X)$ когерентных пучков на алгебраическом многообразии X, функтор проекции на которую имеет конечную когомологическую амплитуду. Мы показываем, что всякой такой допустимой подкатегории $\mathcal{A}$ можно сопоставить допустимые подкатегории $\mathcal{A}^{\mathrm{perf}}$ в категории совершенных комплексов $\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(X)$, $\mathcal{A}^{-}$ в ограниченной сверху производной категории когерентных пучков $\mathcal{D}^{-}(X)$, а также $\mathcal{A}^{\mathrm{cc}}$ в неограниченной производной категории счетно-когерентных пучков $\mathcal{D}_{\mathrm{cc}}(X)$, заменяющей собой неограниченную производную категорию квазикогерентных пучков $\mathcal{D}_{\mathrm{qc}}(X)$. В параграфе 2.1 вводятся основные технические средства, применяемые в данной главе, а именно счетно-когерентные пучки и гомотопические копределы, а в параграфе 2.2 доказываются теоремы о расширении.

Предложение 2.2.1. *Пусть* $\mathcal{D}^b(X) = \langle \mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_m \rangle$ *— полуортогональное разложение. Тогда существует единственное полуортогональное разложение категории* $\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(X)$ *согласованное с естественным вложением* $\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(X) \to \mathcal{D}^b(X)$.

Предложение 2.2.2. *Предположим, что* $\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(X) = \langle \mathcal{A}_1^{\mathrm{perf}}, \dots, \mathcal{A}_m^{\mathrm{perf}} \rangle$ *— полуортогональное разложение. Тогда существует единственное полуортогональное разложение* $\mathcal{D}_{\mathrm{cc}}(X) = \langle \mathcal{A}_1^{\mathrm{cc}}, \dots, \mathcal{A}_m^{\mathrm{cc}} \rangle$ *согласованное с вложением* $\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(X) \to \mathcal{D}_{\mathrm{cc}}(X)$ *и замкнутыми относительно счетных прямых сумм компонентами. Функторы проекции* α_i^{cc} *этого разложения коммутируют со счетными прямыми суммами и гомотопическими копределами.*

Более того, если исходное разложение категории $\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(X)$ *индуцировано полуортогональным разложением* $\mathcal{D}^b(X) = \langle \mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_m \rangle$ *категории* $\mathcal{D}^b(X)$, *функторы проекции которого имеют конечную правую когомологическую амплитуду, то полученное разложение категории* $\mathcal{D}_{\mathrm{cc}}(X)$ *согласованно также и с вложением* $\mathcal{D}^b(X) \to \mathcal{D}_{\mathrm{cc}}(X)$, *а функторы проекции* α_i^{cc} *имеют ту же когомологическую амплитуду, что и* α_i.

Предложение 2.2.4. *Пусть* $\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(X) = \langle \mathcal{A}_1^{\mathrm{perf}}, \dots, \mathcal{A}_m^{\mathrm{perf}} \rangle$ *— полуортогональное разложение. Существует единственное полуортогональное разложение категории* $\mathcal{D}^{-}(X)$, *согласованное с указанным разложением категории* $\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(X)$, *а также с построенным в предложении* 2.2.2 *разложением категории* $\mathcal{D}_{\mathrm{cc}}(X)$ *относительно естественных вложений* $\mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(X) \to \mathcal{D}^{-}(X) \to$

$\mathcal{D}_{\mathrm{cc}}(X)$. *Его компоненты замкнуты относительно гомотопических копределов стабилизирующихся в конечных степенях прямых систем.*

Пусть теперь X — коммутативное многообразие над S , $f : X \to S$ — проекция, а $\mathcal{A}$ — S -линейная допустимая подкатегория в $\mathcal{D}^b(X)$, которую мы рассматриваем как некоммутативное многообразие над S . Для всякой строгой замены базы $\phi : T \to S$ в параграфе 2.3 мы определяем допустимую подкатегорию $\mathcal{A}_T$ в $D^b(X \times_S T)$, которую считаем производной категорией расслоенного произведения нашего некоммутативного многообразия и T над S , то есть результатом замены базы с S на T , примененной к нашему некоммутативному многообразию.

Теорема 2.3.6. *Пусть* $\mathcal{D}^b(X) = \langle \mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_m \rangle$ — S *-линейное полуортогональное разложение, функторы проекции которого имеют конечную когомологическую амплитуду, и предположим, что замена базы* ϕ *строга относительно* f . *Тогда подкатегории* $\mathcal{A}_{iT} \subset \mathcal{D}^b(X_T)$ *определенные равенствами*

$$\mathcal{A}_{iT} = \{F \in \mathcal{D}^b(X_T) \mid \phi_*(F \otimes f^*G) \in \mathsf{hocolim}\,\mathcal{A}_i \ \textit{для всех}\ \ G \in \mathcal{D}^{\mathrm{perf}}(T)\ \}$$

образуют полуортогональное разложение $\mathcal{D}^b(X_T) = \langle \mathcal{A}_{1T}, \dots, \mathcal{A}_{mT} \rangle$ *линейное над* T . *Функторы проекции этого полуортогонального разложения имеют ту же когомологическую амплитуду, что и функторы проекции исходного разложения. Наконец, функторы прямого и обратного образа* $\phi_* : \mathcal{D}^b(X_T) \to \mathcal{D}_{\mathrm{cc}}(X)$ *и* $\phi^* : \mathcal{D}^b(X) \to \mathcal{D}^-(X_T)$ *согласованы с полуортогональными разложениями категорий* $\mathcal{D}_{\mathrm{cc}}(X)$ *и* $\mathcal{D}^-(X_T)$.

При этом доказывается, что результаты расширения и замены базы не зависят от представления категории $\mathcal{A}$ в виде допустимой подкатегории. В этом состоят основные результаты параграфе 2.4.

Теорема 2.4.1. *Предположим, ядро* $\mathcal{E} \in \mathcal{D}^b(X \times Y)$ *имеет конечную* Tor *-амплитуду над* X , *конечную* Ext *-амплитуду над* Y , *а* $\mathsf{supp}\,\mathcal{E}$ *проективен и над* X *и над* Y . *Допустим также, что функтор* $\Phi_{\mathcal{E}} : \mathcal{D}^b(X) \to \mathcal{D}^b(Y)$ — *расщепляющий справа функтор, задающий эквивалентность допустимых подкатегорий* $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}^b(X)$ *и* $\mathcal{B} \subset \mathcal{D}^b(Y)$. *Тогда ограничения функтора* $\Phi_{\mathcal{E}}$ *на* $\mathcal{D}_{\mathrm{cc}}(X)$ *и* $\mathcal{D}^-(X)$ *являются расщепляющими справа функторами, задающими эквивалентности* $\mathcal{A}^{\mathrm{cc}} \cong \mathcal{B}^{\mathrm{cc}}$ *и* $\mathcal{A}^- \cong \mathcal{B}^-$.

Теорема 2.4.2. *Предположим, ядро* $\mathcal{E} \in \mathcal{D}^b(X \times_S Y)$ *имеет конечную* Tor *-амплитуду над* X *, конечную* Ext *-амплитуду над* Y *, а* $\mathsf{supp}\,\mathcal{E}$ *проективен и над* X *, и над* Y *. Допустим также, что* $\Phi_{\mathcal{E}} : \mathcal{D}^b(X) \to \mathcal{D}^b(Y)$ *— расщепляющий справа функтор, задающий эквивалентность* S *-линейных подкатегорий* $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}^b(X)$ *и* $\mathcal{B} \subset \mathcal{D}^b(Y)$ *, а* $\phi : T \to S$ *— замена базы, строгая для пары* (f, g) *. Тогда* $\Phi_{\mathcal{E}_T} : \mathcal{D}^b(X_T) \to \mathcal{D}^b(Y_T)$ *— расщепляющий справа функтор, задающий эквивалентность* $\mathcal{A}_T \cong \mathcal{B}_T$ *.*

В параграфе 2.5 мы применяем полученные результаты для построения внешних произведений допустимых подкатегорий. Если X и Y — многообразия над S , а $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}^b(X)$ и $\mathcal{B} \subset \mathcal{D}^b(Y)$ — допустимые S -линейные подкатегории, мы определяем допустимую подкатегорию $\mathcal{A} \boxtimes_S \mathcal{B}$, играющую в некоммутативной геометрии роль расслоенного произведения некоммутативных многообразий над общей коммутативной базой. Далее, в параграфе 2.6 мы определяем противоположную допустимую подкатегорию $\bar{\mathcal{A}} \subset \mathcal{D}^b(X)$ к допустимой подкатегории $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}^b(X)$, которая играет роль противоположного многообразия в том же смысле как противоположная алгебра в некоммутативной алгебре.

Наконец, в параграфе 2.7 мы формулируем основной результат главы — теорему о строгой замене базы, которая по существу является переформулировкой теоремы 2.3.6.

Теорема 2.7.5. *Пусть* $X, X_1, \dots, X_n$ *— некоммутативные многообразия над коммутативной схемой* S *,* $\mathcal{D}^b(X) = \langle \mathcal{D}^b(X_1), \dots, \mathcal{D}^b(X_n) \rangle$ *— полуортогональное разложение, а* $T \to S$ *— замена базы, строгая для* X *. Тогда* $\mathcal{D}^b(X_T) = \langle \mathcal{D}^b(X_{1T}), \dots, \mathcal{D}^b(X_{nT}) \rangle$ *— полуортогональное разложение.*

В третьей главе вводится и обсуждается очень важное понятие лефшецева разложения производной категории, которое является стартовой точкой для гомологической проективной двойственности. Пусть X — некоммутативное многообразие над коммутативной схемой S , а $F \mapsto F(1)$ — автоэквивалентность производной категории $\mathcal{D}^b(X)$, полученная подкруткой на линейное расслоение $\mathcal{O}_S(1)$, поднятое с S .

Определение 3.1.1. **Лефшецево разложение** производной категории $\mathcal{D}^b(X)$ — это полуортогональное разложение категории $\mathcal{D}^b(X)$ вида

$$\mathcal{D}^b(X) = \langle \mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1(1), \dots, \mathcal{A}_{\mathsf{i}-1}(\mathsf{i}-1) \rangle, \ 0 \subset \mathcal{A}_{\mathsf{i}-1} \subset \mathcal{A}_{\mathsf{i}-2} \subset \dots \subset \mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_0 \subset \mathcal{D}^b(X),$$

где $0 \subset \mathcal{A}_{\mathsf{i}-1} \subset \mathcal{A}_{\mathsf{i}-2} \subset \dots \subset \mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_0 \subset \mathcal{D}^b(X)$ — цепочка допустимых подкатегорий в $\mathcal{D}^b(X)$. Лефшецево разложение называется **прямоугольным**, если $\mathcal{A}_{\mathsf{i}-1} = \mathcal{A}_{\mathsf{i}-2} = \dots = \mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_0$.

Обозначим через $\mathfrak{a}_k$ правый ортогонал к $\mathcal{A}_{k+1}$ в $\mathcal{A}_k$. Триангулированные категории $\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_{\mathsf{i}-1}$ называются **примитивными** компонентами лефшецева разложения. По определению имеют место следующие полуортогональные разложения:

$$\mathcal{A}_k = \langle \mathfrak{a}_k, \mathfrak{a}_{k+1}, \dots, \mathfrak{a}_{\mathsf{i}-1} \rangle,$$

называемое **примитивным разложением** категории $\mathcal{A}_0$. Основной результат параграфа 3.1 — лемма о **двойственном примитивном разложении**.

Лемма 3.1.3. *Категория $\mathcal{A}_0$ обладает полуортогональным разложением*

$$\mathcal{A}_0 = \langle \alpha_0^*(\mathfrak{a}_0(1)), \alpha_0^*(\mathfrak{a}_1(2)), \dots, \alpha_0^*(\mathfrak{a}_{\mathsf{i}-1}(\mathsf{i})) \rangle,$$

где α_0^* — левый сопряженный функтор к вложению $\alpha_0 : \mathcal{A}_0 \to \mathcal{D}^b(X)$.

В параграфе 3.2 вводится понятие двойственного лефшецева разложения.

В четвертой главе формулируется основное понятие настоящей работы — понятие гомологической проективной двойственности. Здесь мы приводим основные определения и теоремы о гомологически проективно двойственных многообразиях, доказательствам которых посвящена пятая глава.

Пусть X — гладкое проективное некоммутативное многообразие над проективным пространством $\mathbb{P}(V)$. Предположим, нам дано лефшецево разложение его производной категории. В параграфе 4.1 рассматривается **универсальное гиперплоское сечение многообразия** X,

$$\mathcal{X}_1 = X \times_{\mathbb{P}(V)} Q,$$

где $Q \subset \mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(V^*)$ — квадрика инцидентности. Обозначим через $i : \mathcal{X}_1 \to X \times \mathbb{P}(V^*)$ — естественное вложение.

Лемма 4.1.4. *Для всех* $1 \le k \le \mathsf{i}-1$ *функтор* $\mathcal{A}_k(k) \boxtimes \mathcal{D}^b(\mathbb{P}(V^*)) \subset \mathcal{D}^b(X \times \mathbb{P}(V^*)) \xrightarrow{i^*} \mathcal{D}^b(\mathcal{X}_1)$ *строго полон, а набор подкатегорий*

$$(\mathcal{A}_1(1) \boxtimes \mathcal{D}^b(\mathbb{P}(V^*)), \dots, \mathcal{A}_{\mathsf{i}-1}(\mathsf{i}-1) \boxtimes \mathcal{D}^b(\mathbb{P}(V^*))) \subset \mathcal{D}^b(\mathcal{X}_1)$$

полуортогонален.

Пусть теперь Y — какое-то некоммутативное многообразие над двойственным проективным пространством $\mathbb{P}(V^*)$. Рассмотрим расслоенное произведение

$$\mathcal{X}_1 \times_{\mathbb{P}(V^*)} Y = (X \times_{\mathbb{P}(V)} Q) \times_{\mathbb{P}(V^*)} Y = (X \times Y) \times_{\mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(V^*)} Q =: Q(X, Y)$$

Определение 4.2.2. Некоммутативное многообразие Y с заданным проективным морфизмом $Y \to \mathbb{P}(V^*)$ называется **гомологически проективно двойственным** к некоммутативному многообразию X с заданным проективным морфизмом $X \to \mathbb{P}(V)$ относительно данного лефшецева разложения, если существует ядро $\mathcal{E} \in \mathcal{D}^b(\mathcal{X}_1 \times_{\mathbb{P}(V^*)} Y^{\mathsf{opp}})$, такое что соответствующий ядерный функтор $\Phi = \Phi_{\mathcal{E}} : \mathcal{D}^b(Y) \to \mathcal{D}^b(\mathcal{X}_1)$ строго полон и дополняет полуортогональный набор леммы 4.1.4 до полуортогонального разложения производной категории многообразия $\mathcal{X}_1$:

$$\mathcal{D}^b(\mathcal{X}_1) = \langle \Phi(\mathcal{D}^b(Y)), \mathcal{A}_1(1) \boxtimes \mathcal{D}^b(\mathbb{P}(V^*)), \dots, \mathcal{A}_{\mathsf{i}-1}(\mathsf{i}-1) \boxtimes \mathcal{D}^b(\mathbb{P}(V^*)) \rangle.$$

Основное свойство гомологически проективно двойственных многообразий — связь производных категорий их линейных сечений. Всякому векторному подпространству $L \subset V^*$ сопоставим соответствующие линейные сечения многообразий X и Y :

$$X_L = X \times_{\mathbb{P}(V)} \mathbb{P}(L^\perp), \qquad Y_L = Y \times_{\mathbb{P}(V^*)} \mathbb{P}(L),$$

где $L^\perp \subset V$ — ортогональное к $L \subset V^*$ подпространство.

Определение 4.2.3. Векторное подпространство $L \subset V^*$ называется **допустимым**, если замена базы $\mathbb{P}(L^\perp) \to \mathbb{P}(V)$ строга относительно морфизма $X \to \mathbb{P}(V)$, а замена базы $\mathbb{P}(L) \to \mathbb{P}(V^*)$ строга относительно морфизма $Y \to \mathbb{P}(V^*)$.

Для допустимого подпространства расслоенные произведения X_L и Y_L корректно определены. Главная теорема о гомологически проективно двойственных многообразиях формулируется в параграфе 4.2 следующим образом.

Теорема 4.2.4. *Если (некоммутативное) многообразие Y гомологически проективно двойственно к гладкому (некоммутативному) многообразию X, то*

(i) многообразие Y гладко, а его производная категория $\mathcal{D}^b(Y)$ обладает двойственным лефшецевым разложением

$$\mathcal{D}^b(Y) = \left\langle \mathcal{B}_{\mathsf{j}-1}(1-\mathsf{j}), \dots, \mathcal{B}_1(-1), \mathcal{B}_0 \right\rangle, \qquad 0 \subset \mathcal{B}_{\mathsf{j}-1} \subset \dots \subset \mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_0 \subset \mathcal{D}^b(Y)$$

с тем же набором примитивных подкатегорий: $\mathcal{B}_k = \langle \mathfrak{a}_0, \dots, \mathfrak{a}_{N-k-2} \rangle$;

(ii) для всякого допустимого подпространства $L \subset V^*$, $\dim L = r$, существует триангулированная категория $\mathcal{C}_L$ и полуортогональные разложения

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^b(X_L) &= \langle \mathcal{C}_L, \mathcal{A}_r(1), \dots, \mathcal{A}_{\mathsf{i}-1}(\mathsf{i}-r) \rangle, \\ \mathcal{D}^b(Y_L) &= \langle \mathcal{B}_{\mathsf{j}-1}(N-r-\mathsf{j}), \dots, \mathcal{B}_{N-r}(-1), \mathcal{C}_L \rangle. \end{aligned}$$

В параграфе 4.3 приводится несколько полезных обобщений определения гомологической проективной двойственности и основной теоремы. Во-первых, вместо отдельных линейных сечений многообразий X и Y можно рассматривать семейства. Пусть T — произвольное (коммутативное) многообразие, а $\mathcal{L} \subset V^* \otimes \mathcal{O}_T$ — векторное подрасслоение ранга r в тривиальном расслоении со слоем V^* на T . Определим подрасслоение $\mathcal{L}^\perp \subset V \otimes \mathcal{O}_T$ как ядро естественно морфизма $V \otimes \mathcal{O}_T \to \mathcal{L}^*$. Рассмотрим проективизации этих расслоений $\mathbb{P}_T(\mathcal{L})$ и $\mathbb{P}_T(\mathcal{L}^\perp)$. Вложения $\mathcal{L} \to V^* \otimes \mathcal{O}_T$ и $\mathcal{L}^\perp \to V \otimes \mathcal{O}_T$ индуцируют морфизмы $\mathbb{P}_T(\mathcal{L}) \to \mathbb{P}(V^*)$ и $\mathbb{P}_T(\mathcal{L}^\perp) \to \mathbb{P}(V)$. Заметим также, что образ морфизма $\mathbb{P}_T(\mathcal{L}^\perp) \times_T \mathbb{P}_T(\mathcal{L}) \to \mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(V^*)$ лежит в квадрике инцидентности $Q \subset \mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(V^*)$ (так как для любого подпространства $L \subset V^*$ имеем $\mathbb{P}(L^\perp) \times \mathbb{P}(L) \subset Q$).

Определение 4.3.1. Подрасслоение $\mathcal{L} \subset V^* \otimes \mathcal{O}_T$ называется **допустимым**, если замена базы $\mathbb{P}_T(\mathcal{L}^\perp) \to \mathbb{P}(V)$ строга относительно морфизма $X \to \mathbb{P}(V)$, замена базы $\mathbb{P}_T(\mathcal{L}) \to \mathbb{P}(V^*)$ строга относительно морфизма $Y \to \mathbb{P}(V^*)$, а замена базы $\mathbb{P}_T(\mathcal{L}^\perp) \times_T \mathbb{P}_T(\mathcal{L}) \to Q$ строга относительно морфизма $Q(X,Y) \to Q$.

В случае $T=\mathsf{Spec}\,\mathsf{k}$ определение 4.3.1 эквивалентно определению 4.2.3. Рассмотрим многообразия

$$\mathcal{X}_{\mathcal{L}} = X \times_{\mathbb{P}(V)} \mathbb{P}_T(\mathcal{L}^{\perp}), \qquad \mathcal{Y}_{\mathcal{L}} = Y \times_{\mathbb{P}(V^*)} \mathbb{P}_T(\mathcal{L}).$$

Если $\mathcal{L} \subset V^* \otimes \mathcal{O}_T$ — допустимое подрасслоение, то данные расслоенные произведения корректно определены.

Теорема 4.3.2. *Пусть некоммутативное многообразие Y гомологически проективно двойственно к некоммутативному многообразию X. Пусть T — коммутативное многообразие, а $\mathcal{L} \subset V^* \otimes \mathcal{O}_T$ — допустимое подрасслоение, $\mathsf{rank}\,\mathcal{L} = r$. Тогда существует триангулированная категория $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ и полуортогональные разложения*

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^b(\mathcal{X}_{\mathcal{L}}) &= \langle \mathcal{C}_{\mathcal{L}}, \mathcal{A}_r(1) \boxtimes \mathcal{D}^b(T), \dots, \mathcal{A}_{\mathsf{i}-1}(\mathsf{i}-r) \boxtimes \mathcal{D}^b(T) \rangle, \\
\mathcal{D}^b(\mathcal{Y}_{\mathcal{L}}) &= \langle \mathcal{B}_{\mathsf{j}-1}(N-r-\mathsf{j}) \boxtimes \mathcal{D}^b(T), \dots, \mathcal{B}_{N-r}(-1) \boxtimes \mathcal{D}^b(T), \mathcal{C}_{\mathcal{L}} \rangle.
\end{aligned}$$

Также бывает полезна относительная версия понятия гомологической проективной двойственности. Рассмотрим произвольную гладкую схему S и предположим, что X и Y — гладкие некоммутативные многообразия, проективные над S, для которых заданы проективные S-морфизмы $X \to \mathbb{P}_S(\mathcal{V})$ и $Y \to \mathbb{P}_S(\mathcal{V}^*)$, где $\mathcal{V}$ — фиксированное векторное расслоение ранга N на S. Предположим также, что заданное лефшецево разложение категории $\mathcal{D}^b(X)$ является S-линейным.

Определение 4.3.3. Некоммутативное многообразие Y **гомологически проективно двойственно над** S к некоммутативному многообразию X, если существует ядро $\mathcal{E} \in \mathcal{D}^b(\mathcal{X}_1 \times_{\mathbb{P}_S(\mathcal{V}^*)} Y^{\mathsf{opp}})$, такое что соответствующий ядерный функтор $\Phi = \Phi_{\mathcal{E}} : \mathcal{D}^b(Y) \to \mathcal{D}^b(\mathcal{X}_1)$ строго полон и дополняет полуортогональный набор леммы 4.1.4 до полуортогонального разложения.

Пусть теперь $\phi : T \to S$ — замена базы. Если $\mathcal{L} \subset \phi^*\mathcal{V}^*$ — векторное подрасслоение ранга r, определим подрасслоение $\mathcal{L}^{\perp} \subset \phi^*\mathcal{V}$ как ядро естественно морфизма $\phi^*\mathcal{V} \to \mathcal{L}^*$. Рассмотрим естественные морфизмы $\mathbb{P}_T(\mathcal{L}) \to \mathbb{P}_S(\mathcal{V}^*)$ и $\mathbb{P}_T(\mathcal{L}^{\perp}) \to \mathbb{P}_S(\mathcal{V})$.

Определение 4.3.4. Подрасслоение $\mathcal{L} \subset \phi^*\mathcal{V}^*$ называется **допустимым над** S, если замена базы $\mathbb{P}_T(\mathcal{L}^{\perp}) \to \mathbb{P}_S(\mathcal{V})$ строга относительно морфизма $X \to \mathbb{P}_S(\mathcal{V})$, замена базы $\mathbb{P}_T(\mathcal{L}) \to \mathbb{P}_S(\mathcal{V}^*)$ строга относительно морфизма $Y \to$

$\mathbb{P}_S(\mathcal{V}^*)$, а замена базы $\mathbb{P}_T(\mathcal{L}^\perp) \times_T \mathbb{P}_T(\mathcal{L}) \to Q_S$ строга относительно морфизма $Q_S(X,Y) \to Q_S$, где $Q_S \subset \mathbb{P}_S(\mathcal{V}) \times_S \mathbb{P}_S(\mathcal{V}^*)$ — послойная квадрика инцидентности.

Пусть $\mathcal{L} \subset \phi^*\mathcal{V}^*$ — допустимое над S подрасслоение. Рассмотрим многообразия

$$\mathcal{X}_\mathcal{L} = X \times_{\mathbb{P}_S(\mathcal{V})} \mathbb{P}_T(\mathcal{L}^\perp), \qquad \mathcal{Y}_\mathcal{L} = Y \times_{\mathbb{P}_S(\mathcal{V}^*)} \mathbb{P}_T(\mathcal{L}).$$

Теорема 4.3.5. *Если (некоммутативное) многообразие Y гомологически проективно двойственно над S к (некоммутативному) многообразию X , то*

(i) многообразие Y гладко, а его производная категория $\mathcal{D}^b(Y)$ обладает двойственным S -линейным лефшецевым разложением

$$\mathcal{D}^b(Y) = \big\langle \mathcal{B}_{\mathsf{j}-1}(1-\mathsf{j}), \dots, \mathcal{B}_1(-1), \mathcal{B}_0 \big\rangle, \qquad 0 \subset \mathcal{B}_{\mathsf{j}-1} \subset \dots \subset \mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_0 \subset \mathcal{D}^b(Y)$$

с тем же набором примитивных подкатегорий: $\mathcal{B}_k = \langle \mathfrak{a}_0, \dots, \mathfrak{a}_{N-k-2} \rangle$;

(ii) Пусть $\phi : T \to S$ — замена базы, а $\mathcal{L} \subset \phi^*\mathcal{V}^*$ — допустимое над S подрасслоение, $\operatorname{rank} \mathcal{L} = r$. Тогда существует триангулированная категория $\mathcal{C}_\mathcal{L}$ и полуортогональные S -линейные разложения

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^b(\mathcal{X}_\mathcal{L}) &= \langle \mathcal{C}_\mathcal{L}, \mathcal{A}_r(1) \boxtimes \mathcal{D}^b(T), \dots, \mathcal{A}_{\mathsf{i}-1}(\mathsf{i}-r) \boxtimes \mathcal{D}^b(T) \rangle, \\
\mathcal{D}^b(\mathcal{Y}_\mathcal{L}) &= \langle \mathcal{B}_{\mathsf{j}-1}(N-r-\mathsf{j}) \boxtimes \mathcal{D}^b(T), \dots, \mathcal{B}_{N-r}(-1) \boxtimes \mathcal{D}^b(T), \mathcal{C}_\mathcal{L} \rangle.
\end{aligned}$$

В параграфе 4.4 мы начинаем доказательство теоремы 4.2.4 построением двойственного лефшецева набора $\mathcal{C}_{\mathsf{j}-1}(1-\mathsf{j}), \dots, \mathcal{C}_1(-1), \mathcal{C}_0$ допустимых подкатегорий в категории

$$\mathcal{C} = \big\langle \mathcal{A}_1(1) \boxtimes \mathcal{D}^b(\mathbb{P}(V^*)), \dots, \mathcal{A}_{\mathsf{i}-1}(\mathsf{i}-1) \boxtimes \mathcal{D}^b(\mathbb{P}(V^*)) \big\rangle^\perp \subset \mathcal{D}^b(\mathcal{X}_1),$$

который при гомологической проективной двойственности становится двойственным лефшецевым разложением гомологически проективно двойственного многообразия. Там же мы формулируем весьма полезный критерий гомологической проективной двойственности. Обозначим через $\pi : \mathcal{X}_1 \to X$ естественную проекцию. Пусть Y — проективное некоммутативное многообразие над $\mathbb{P}(V^*)$, а $\mathcal{E} \in \mathcal{D}^b(\mathcal{X}_1 \times_{\mathbb{P}(V^*)} Y)$.

Теорема 4.4.7. *Предположим, что функтор $\Phi_\mathcal{E} : \mathcal{D}^b(Y) \to \mathcal{D}^b(\mathcal{X}_1)$ индуцирует строго полное вложение $\mathcal{D}^b(Y) \to \mathcal{C}$. Предположим также, что* *функтор* $\Phi_{\mathcal{E}}^* \circ \pi^* : \mathcal{D}^b(X) \to \mathcal{D}^b(Y)$ *строго полон на категории* $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{D}^b(X)$ *, и что категории*

$$\mathcal{B}_k = \Phi_{\mathcal{E}}^*(\mathcal{C}_k) \subset \mathcal{B}_0 = \Phi_{\mathcal{E}}^*(\mathcal{C}_0) \subset \mathcal{D}^b(Y),$$

образуют двойственный лефшецев набор

$$\langle \mathcal{B}_{\mathsf{j}-1}(1-\mathsf{j}), \dots, \mathcal{B}_1(-1), \mathcal{B}_0 \rangle \subset \mathcal{D}^b(Y).$$

Тогда функтор $\Phi_{\mathcal{E}} : \mathcal{D}^b(Y) \to \mathcal{C}$ *является эквивалентностью категорий, а приведенный выше лефшецев набор* $\langle \mathcal{B}_{\mathsf{j}-1}(1-\mathsf{j}), \dots, \mathcal{B}_1(-1), \mathcal{B}_0 \rangle$ *порождает категорию* $\mathcal{D}^b(Y)$ *. В частности, многообразие* Y *гомологически проективно двойственно к многообразию* X *.*

В пятой главе приводится доказательство основных результатов, сформулированных в предыдущей главе. Доказательство построено следующим образом. Мы принимаем условия теоремы 4.4.7 и строим полуортогональные разложения теоремы 4.3.2 в специальном случае — для универсальных семейств линейных сечений. Эти семейства определяются в параграфе 5.1. Пусть $\mathbf{P}_r = \mathsf{Gr}(r, V^*)$ — грассманиан, параметризующий линейные подпространства в V^* размерности r , а $\mathcal{L}_r \subset V^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_r}$ — тавтологическое подрасслоение. Легко показать, что тавтологическое подрасслоение допустимо, поэтому определены соответствующие семейства

$$\mathcal{X}_r = X \times_{\mathbb{P}(V)} \mathbb{P}_{\mathbf{P}_r}(\mathcal{L}_r^{\perp}), \qquad \mathcal{Y}_r = Y \times_{\mathbb{P}(V^*)} \mathbb{P}_{\mathbf{P}_r}(\mathcal{L}_r).$$

Наша цель — построить триангулированную категорию $\mathcal{C}_r$ и полуортогональные $\mathbf{P}_r$ -линейные разложения

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^b(\mathcal{X}_r) &= \langle \mathcal{C}_r, \mathcal{A}_r(1) \boxtimes \mathcal{D}^b(\mathbf{P}_r), \dots, \mathcal{A}_{\mathsf{i}-1}(\mathsf{i}-r) \boxtimes \mathcal{D}^b(\mathbf{P}_r) \rangle \\ \mathcal{D}^b(\mathcal{Y}_r) &= \langle \mathcal{B}_{\mathsf{j}-1}(N-r-\mathsf{j}) \boxtimes \mathcal{D}^b(\mathbf{P}_r), \dots, \mathcal{B}_{N-r}(-1) \boxtimes \mathcal{D}^b(\mathbf{P}_r), \mathcal{C}_r \rangle. \end{aligned}$$

В параграфе 5.2 содержатся подготовительные результаты. В частности, строятся функторы $\Phi_r : \mathcal{D}^b(\mathcal{X}_r) \to \mathcal{D}^b(\mathcal{Y}_r)$ (в дальнейшем доказывается, что они являются расщепляющими, а подкатегория $\mathcal{C}_r$ является образом Φ_r) и доказываются определенные соотношения между функторами Φ_r и Φ_{r-1} . В параграфе 5.3, пользуясь полученными соотношениями между функторами, мы по индукции доказываем, что функторы Φ_r расщепляющие при всех r , откуда следует существование полуортогональных наборов допустимых подкатегорий

$$\begin{array}{lcl}\langle \mathsf{Im}\,\Phi_r, \mathcal{A}_r(1) \boxtimes \mathcal{D}^b(\mathbf{P}_r), \dots, \mathcal{A}_{\mathsf{i}-1}(\mathsf{i}-r) \boxtimes \mathcal{D}^b(\mathbf{P}_r)\rangle & \subset & \mathcal{D}^b(\mathcal{X}_r) \\ \langle \mathcal{B}_{\mathsf{j}-1}(N-r-\mathsf{j}) \boxtimes \mathcal{D}^b(\mathbf{P}_r), \dots, \mathcal{B}_{N-r}(-1) \boxtimes \mathcal{D}^b(\mathbf{P}_r), \mathsf{Im}\,\Phi_r^*\rangle & \subset & \mathcal{D}^b(\mathcal{Y}_r).\end{array}$$

Затем проверяется полнота полученных наборов. Вначале проверяется полнота набора в категории $\mathcal{D}^b(\mathcal{Y}_r)$. Для этого используется индукция по r , база индукции легко следует из предположения о том, что $\Phi_{\mathcal{E}} : \mathcal{D}^b(Y) \to \mathcal{D}^b(\mathcal{X}_1)$ — строго полное вложение. Отметим, что при $r = N = \dim V$, построенное полуортогональное разложение показывает, что $\mathcal{D}^b(Y)$ порождается набором $\left\langle \mathcal{B}_{\mathsf{j}-1}(1-\mathsf{j}), \dots, \mathcal{B}_1(-1), \mathcal{B}_0 \right\rangle$. Затем доказывается равенство $\mathsf{Im}\,\Phi_{N-1} = \mathcal{D}^b(\mathcal{X}_{N-1})$, что обеспечивает базу индукции для доказательства полноты набора в категории $\mathcal{D}^b(\mathcal{X}_r)$. Основным моментом в доказательстве этого равенства является предположение о строгой полноте функтора $\Phi_{\mathcal{E}}^* \circ \pi^*$ на категории $\mathcal{A}_0$, откуда следует, что $\mathcal{A}_0 \subset \mathsf{Im}(\pi_* \circ \Phi_{\mathcal{E}})$. Завершается параграф доказательством полноты набора для $\mathcal{D}^b(\mathcal{X}_r)$. Здесь используется убывающая индукция по r .

В параграфе 5.4 полученные полуортогональные разложения производных категорий $\mathcal{D}^b(\mathcal{X}_r)$ и $\mathcal{D}^b(\mathcal{Y}_r)$ применяются для доказательства основных теорем. По существу, они легко следуют из теоремы о строгой замене базы 2.7.5.

Наконец, в параграфе 5.5 обсуждаются дальнейшие свойства гомологической проективной двойственности, а именно рефлексивность и связь с классической проективной двойственностью.

Теорема 5.5.1. *Если многообразие $g : Y \to \mathbb{P}(V^*)$ гомологически проективно двойственно к $f : X \to \mathbb{P}(V)$, то $f : X^{\mathsf{opp}} \to \mathbb{P}(V)$ гомологически проективно двойственно к $g : Y^{\mathsf{opp}} \to \mathbb{P}(V^*)$.*

Здесь X^{opp} и Y^{opp} — противоположные некоммутативные многообразия к X и Y соответственно.

Теорема 5.5.2. *Пусть $g : Y \to \mathbb{P}(V^*)$ — некоммутативное многообразие гомологически проективно двойственное к коммутативному многообразию $f : X \to \mathbb{P}(V)$. Тогда множество $\mathsf{sing}(g) := \{$критические значения $g\}$ совпадает с $X^\vee$ — классическим проективно двойственным многообразием к X .*

В заключительной шестой главе приводятся примеры гомологически проективно двойственных многообразий и полуортогональные разложения производных категорий многообразий Фано, получающихся применением теоремы 4.2.4.

В параграфе 6.1 описан случай, когда $X = \mathbb{P}_S(E)$ — проективизация векторного расслоения над базой S, с послойно линейным морфизмом $X \to \mathbb{P}(V)$. Оказывается. в этом случае гомологически проективно двойственным к X многообразием тоже является проективизация векторного расслоения на S. Положим $E^\perp = \mathsf{Ker}(V^* \otimes \mathcal{O}_S \to E^*)$.

Теорема 6.1.3. *Если расслоение E порождается пространством сечений $V^* \subset H^0(S, E)$, то многообразие $Y = \mathbb{P}_S(E^\perp)$ гомологически проективно двойственно над S к $X = \mathbb{P}_S(E)$.*

В параграфе 6.2 мы рассматриваем в качестве X проективное пространство $X = \mathbb{P}(W)$, но относительно двукратного вложения Веронезе $X \to \mathbb{P}(S^2W)$. В этом случае оказывается, что гомологически проективно двойственное многообразие задается пучком четных частей алгебр Клиффорда

$$\mathcal{R}_0 = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S^2W^*)} \oplus \Lambda^2 W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S^2W^*)}(-1) \oplus \Lambda^4 W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S^2W^*)}(-2) \oplus \dots$$

на двойственном проективном пространстве $\mathbb{P}(S^2W^*)$.

Теорема 6.2.1. *Некоммутативное многообразие $Y = (\mathbb{P}(S^2W^*), \mathcal{R}_0)$ гомологически проективно двойственно к двукратно вложенному проективному пространству $X = \mathbb{P}(W)$.*

Применяя теорему 4.2.4, мы получаем описание производных категорий полных пересечений квадрик. Таким образом, теорема А.Бондала и Д.Орлова о производных категориях полных пересечений квадрик является частным случаем гомологической проективной двойственности.

Теорема 6.2.2. *Для всякого подпространства $L \subset S^2W^*$, такого что соответствующее пересечение квадрик X_L в $\mathbb{P}(W)$ является полным пересечением, существует одно из полуортогональных разложений*

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^b(X_L) &= \langle \mathcal{D}^b(\mathbb{P}(L), \mathcal{R}_0), \mathcal{O}_{X_L}(1), \dots, \mathcal{O}_{X_L}(n-2r) \rangle, && \textit{если } r = \dim L \le n/2 \\ \mathcal{D}^b(\mathbb{P}(L), \mathcal{R}_0) &= \langle \mathcal{R}_{n-2r}, \dots, \mathcal{R}_{-2}, \mathcal{R}_{-1}, \mathcal{D}^b(X_L) \rangle, && \textit{если } r = \dim L \ge n/2 \end{aligned}$$

или эквивалентность

$$\mathcal{D}^b(X_L) \cong \mathcal{D}^b(\mathbb{P}(L), \mathcal{R}_0) \qquad \textit{если } \dim L = n/2,$$

где $\mathcal{D}^b(\mathbb{P}(L), \mathcal{R}_0)$ *— производная категория пучков* $\mathcal{R}_0$ *-модулей на* $\mathbb{P}(L)$ *.*

В параграфе 6.3 мы рассматриваем в качестве X грассманиан прямых $X = \mathsf{Gr}(2, W)$, $\dim W \le 7$, относительно плюккерова вложения $X \to \mathbb{P}(\Lambda^2 W)$. В этом случае оказывается, что гомологически проективно двойственное многообразие задается некоторым пучком алгебр $\mathcal{R}$ на пфаффовом многообразии

$$\mathsf{Pf}(W^*) = \{\omega \in \mathbb{P}(\Lambda^2 W^*) \mid \text{коранг } \omega \text{ больше или равен } 2\ \} \subset \mathbb{P}(\Lambda^2 W^*)$$

На гладкой части пфаффова многообразия $\mathcal{R}$ является матричной алгеброй, то есть эквивалентна по Морите структурному пучку. Таким образом, некоммутативное многообразие $Y = (\mathsf{Pf}(W^*), \mathcal{R})$ можно рассматривать как некоммутативное разрешение особенностей пфаффова многообразия.

Теорема 6.3.5. *Если* $\dim W = 6$ *или* $\dim W = 7$ *, то некоммутативное разрешение особенностей* $Y = (\mathsf{Pf}(W^*), \mathcal{R})$ *пфаффова многообразия* $\mathsf{Pf}(W^*)$ *гомологически проективно двойственно к грассманиану* $X = \mathsf{Gr}(2, W)$ *.*

В качестве следствия мы получаем описание производных категорий трехмерной кубики, многообразия V_{14} и четырехмерной пфаффовой кубики.

Следствие 6.3.6. *Существует биекция между множеством пар* (Y_5, E) *, где* Y_5 *— гладкая трехмерная кубика в* $\mathbb{P}^4$ *, а* E *— инстантонное расслоение с* $c_2(E) = 2$ *на* Y_5 *, и множеством классов изоморфизма трехмерных многообразий Фано* X_5 *типа* V_{14} *, так что существуют полуортогональные разложения*

$$\mathcal{D}^b(X_5) = \langle \mathcal{C}_5, \mathcal{U}, \mathcal{O} \rangle, \qquad \mathcal{D}^b(Y_5) = \langle \mathcal{O}(-1), \mathcal{O}, \mathcal{C}_5 \rangle,$$

в которые входит одна и та же категория $\mathcal{C}_5$ *, а* $\mathcal{U}$ *— исключительное расслоение ранга* 2 *.*

Следствие 6.3.7. *Существует биекция между множеством гладких четырехмерных пфаффовых кубик* $Y_6 \subset \mathbb{P}^5$ *, и множеством классов изоморфизма поляризованных* $K3$ *-поверхностей* X_6 *степени* 14 *, так что существует полуортогональное разложение*

$$\mathcal{D}^b(Y_6) = \langle \mathcal{O}(-2), \mathcal{O}(-1), \mathcal{O}, \mathcal{D}^b(X_6) \rangle.$$

Наконец, в параграфе 6.4 мы рассматриваем еще несколько примеров гомологической проективной двойственности. В качестве многообразий X мы рассматриваем следующие однородные пространства: грассманиан $X = \mathsf{Gr}(2,5)$, связную компоненту изотропного грассманиана ортогональной группы $X = \mathsf{OGr}_+(5,10)$, изотропный грассманиан симплектической группы $X = \mathsf{SGr}(3,6)$ и грассманиан $X = \mathsf{G}_2\mathsf{Gr}(2,7)$ группы G_2 . Для них гомологически проективно двойственными оказываются: грассманиан $Y = \mathsf{Gr}(2,5)$, другая связная компонента изотропного грассманиана $Y = \mathsf{OGr}_-(5,10)$, скрученное некоммутативное разрешение Y особенностей гиперповерхности D_4 степени 4 в $\mathbb{P}^{13}$ и скрученное некоммутативное разрешение Y особенностей двулистного накрытия $\mathbb{P}^{13}$, разветвленного в гиперповерхности D_6 степени 6 .

В качестве следствия мы получаем описание производных категорий трехмерных многообразий Фано многообразия V_{12} , V_{16} и V_{18} .

Следствие 6.4.4. *Пусть* X_7 *— трехмерное многообразие Фано индекса* 1 *типа* V_{12} *. Тогда категория* $D^b(X_7)$ *имеет полуортогональное разложение* $\mathcal{D}^b(X_7) = \left\langle \mathcal{D}^b(C_7), \mathcal{O}_X, \mathcal{U}^* \right\rangle$ *, где* $\mathcal{U}$ *— расслоение ранга* 5 *, а* C_7 *— кривая рода* 7 *.*

Следствие 6.4.5. *Пусть* X_3 *— трехмерное многообразие Фано индекса* 1 *типа* V_{16} *. Тогда категория* $D^b(X_3)$ *имеет полуортогональное разложение* $\mathcal{D}^b(X_3) = \left\langle \mathcal{D}^b(C_3), \mathcal{O}_X, \mathcal{U}^* \right\rangle$ *, где* $\mathcal{U}$ *— расслоение ранга* 3 *, а* C_3 *— кривая рода* 3 *.*

Следствие 6.4.6. *Пусть* X_2 *— трехмерное многообразие Фано индекса* 1 *типа* V_{18} *. Тогда категория* $D^b(X_2)$ *имеет полуортогональное разложение* $\mathcal{D}^b(X_2) = \left\langle \mathcal{D}^b(C_2), \mathcal{O}_X, \mathcal{U}^* \right\rangle$ *, где* $\mathcal{U}$ *— расслоение ранга* 2 *, а* C_2 *— кривая рода* 2 *.*

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8].

Публикации по теме диссертации

[1] Кузнецов А., *Исключительный набор векторных расслоений на многообразиях* V_{22} , Вестник МГУ Сер. I Мат. Мех. 1996, , N. 3, 41–44.

[2] Кузнецов А., *Производная категория трехмерной кубики и многообразия* V_{14} , Тр. МИАН, 2004, 246, 183–207.

[3] Кузнецов А., *Производные категории трехмерных многообразий Фано* V_{12} , Матем. заметки, 2005, 78:4, 579–594.

[4] Кузнецов А., *Гиперплоские сечения и производные категории*, Изв. РАН. Сер. матем., 2006, 70:3, 23–128.

[5] Kuznetsov A., *Homological projective duality*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. N. 105 (2007), 157–220.

[6] Kuznetsov A., *Derived Categories of Quadric Fibrations and Intersections of Quadrics*, Advances in Mathematics, V. 218 (2008), N. 5, 1340-1369.

[7] Kuznetsov A., *Exceptional collections for Grassmannians of isotropic lines*, Proceedings of the London Mathematical Society, V. 97 (2008), N. 1, 155-182.

[8] Kuznetsov A., *Lefschetz decompositions and Categorical resolutions of singularities*, Selecta Mathematica, V. 13 (2008), N. 4, 661-696.

[9] Kuznetsov A., *Homological projective duality for Grassmannians of lines*, preprint math.AG/0610957.

[10] Kuznetsov A., *Base change for semiorthogonal decompositions*, preprint math.AG/0711.1734.