p–Адическая математическая физика: основные конструкции, применения к сложным и наноскопическим системам

И.В.Волович, С.В.Козырев

1 апреля 2008 г.

Аннотация

Рассматриваются основные понятия и некоторые конструкции p–адической математической физики. Обсуждаются понятия ультраметрического пространства и p–адического числа, некоторые конструкции p–адического анализа, и приложения к теории всплесков (вейвлетов), к моделям p–адической квантовой механики, а также к моделям сложных и наноскопических систем.

Рассматриваются приложения к спиновым стёклам (p–адическая параметризация матрицы Паризи), p–адические модели генетического кода, и p–адические модели динамики белков.

Содержание

1 Введение

В настоящем тексте обсуждаются методы p–адического анализа, включая методы теории псевдодифференциальных операторов и теории всплесков, и применения к моделям p–адической квантовой механики и к сложным наноскопическим системам. Рассматривается три примера применений к сложным системам: к теории спиновых стёкол, к описанию генетического кода и к исследованию динамики белков.

По поводу мотивировок, истории вопроса и других аспектов p–адической математической физики см. [1], [2], [3], [4]. Некоторые материалы, отражающие современное состояние области (в том числе презентации докладов), можно найти на веб–странице [5].

2 p–Адические числа

В настоящем разделе вводятся поля p–адических чисел и обсуждаются свойства ультраметрических пространств.

Напомним, что кольцом R называется (см. например [6]) множество, на котором определены операции сложения и умножения, причём выполнены следующие свойства:

1) Сложение определяет на R структуру коммутативной группы;

2) Умножение ассоциативно

$$a(bc) = (ab)c, \qquad \forall a, b, c \in R$$

и согласовано со сложением по закону дистрибутивности

$$a(b + c) = ab + ac; \qquad (a + b)c = ac + bc, \qquad \forall a, b, c \in R,$$

в частности, $a0 = 0a = 0$, $\forall a \in R$.

Если умножение коммутативно (то есть $ab = ba$, $\forall a, b \in R$), то кольцо называется коммутативным. Если существует такой элемент $1 \in R$, что $1a = a1 = a$, $\forall a \in R$, то такой элемент называется единицей, а кольцо называется кольцом с единицей.

Коммутативное кольцо с единицей, на котором определена операция взятия обратного элемента, причём

$$aa^{-1} = a^{-1}a = 1, \qquad \forall a \in R$$

называется полем.

Поле имеет характеристику p, если p есть наименьшее такое натуральное число, что выполнено

$$pa = 0, \qquad \forall a \in R.$$

Если такого натурального p не существует, то поле будет иметь характеристику нуль.

Примеры полей:

1) Поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$;

2) Поле вещественных чисел $\mathbb{R}$;

3) Поле комплексных чисел $\mathbb{C}$;

4) Поле вычетов $\mathbb{F}_p$ по простому модулю p. В качестве элементов такого поля можно рассматривать числа $0, 1, \dots, p-1$ со сложением и умножением по модулю p;

5) Поле $K(x)$ рациональных функций над числовым полем K (например, $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$). Элементами такого поля являются рациональные функции над полем K, то есть дроби вида

$$\frac{P[x]}{Q[x]},$$

где P и Q суть многочлены над полем K и Q не равен нулю.

Поле вычетов имеет характеристику p, остальные перечисленные выше поля имеют характеристику нуль.

2.1 Вещественные числа

Вещественной нормой рационального числа x называется его модуль $|x|$. Вещественная норма рационального числа есть число рациональное. Полем вещественных чисел называется пополнение поля рациональных чисел по вещественной норме, см например [7].

Таким образом, элементами поля вещественных чисел являются классы эквивалентности фундаментальных последовательностей рациональных чисел. Последовательность называется фундаментальной, если элементы последовательности с достаточно большими номерами становятся как угодно близкими (в вещественной норме). Две фундаментальные последовательности эквивалентны, если элементы этих двух последовательностей с достаточно большими номерами как угодно близки.

Выбирая представителей в упомянутых классах эквивалентности фундаментальных последовательностей, можно получить представление вещественных чисел в виде бесконечной десятичной дроби (ряда по степеням 10):

$$x = \pm x_\gamma x_{\gamma-1} \dots, x_0, x_{-1} \dots = \pm \sum_{i=-\gamma} x_{-i} 10^{-i}, \qquad x_i = 0, 1, \dots, 9.$$

Такое представление не единственно, в частности,

$$1 = 1,000 \dots = 0,999 \dots .$$

Аналогичные представления можно получить, раскладывая вещественные числа по степеням любых натуральных чисел, больших единицы.

2.2 p–Адические числа

Любое рациональное число x можно единственным образом представить в виде несократимой дроби

$$x = p^\gamma \frac{m}{n},$$

где p есть простое число, γ есть целое число, m целое, n натуральное, p, m, n взаимно просты.

Определение 1 *p–Адической нормой вышеприведенного рационального числа x называется число*

$$|x|_p = p^{-\gamma}.$$

Таким образом, p–адическая норма измеряет, на какую степень p делится рациональное число, и норма тем меньше, чем больше эта степень, то есть последовательность $\{p^\gamma\}$, $\gamma \to +\infty$, будет стремиться к нулю в p–адической норме.

Пример

$$|2|_2 = \frac{1}{2}, \qquad |2|_3 = 1.$$

Упражнение 1 Функция $d(x,y) = |x-y|_p$ удовлетворяет сильному неравенству треугольника

$$|x+y|_p \leq \max(|x|_p, |y|_p).$$

Упражнение 2 p–Адическая норма удовлетворяет свойству мультипликативности:

$$|xy|_p = |x|_p |y|_p.$$

Упражнение 3 Докажите адельную формулу: для любого ненулевого рационального числа x:

$$\prod_p |x|_p = 1.$$

Здесь произведение берётся по всем простым p и $p = \infty$, отвечающему вещественной норме.

Имеет место теорема Островского, которая утверждает, что любая норма на поле рациональных чисел эквивалентна либо вещественной норме, либо одной из p–адических норм. Таким образом, адельная формула содержит произведение по всем нормированиям поля рациональных чисел.

Определение 2 *Полем $\mathbb{Q}_p$ p–адических чисел называется пополнение поля $\mathbb{Q}$ рациональных числе по p–адической норме.*

Данное определение есть точный аналог конструкции вещественного числа путем пополнения поля рациональных чисел по норме, определяемой вещественным расстоянием.

Упражнение 4 Рациональные числа вида

$$x = \sum_{i=\gamma}^{\beta} x_i p^i, \qquad x_i = 0, \ldots, p-1 \tag{1}$$

где $\gamma \leq \beta$ целые, плотны по p–адической норме в поле рациональных чисел (и, следовательно, в поле p–адических чисел).

Плотность означает, что в окрестности любого радиуса (по p–адической норме) любого рационального числа найдется число вида (1).

Упражнение 5 p–Адические числа находятся во взаимно однозначном соответствии со сходящимися в p–адической норме рядами вида

$$x = \sum_{i=\gamma}^{\infty} x_i p^i, \qquad x_i = 0, \ldots, p-1 \tag{2}$$

γ целое.

Формула (2) есть аналог разложения вещественного числа в бесконечную десятичную дробь.

p–Адические числа с нормой не более 1, или аналогично, числа вида

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} x_i p^i, \qquad x_i = 0, \ldots, p-1 \tag{3}$$

образуют кольцо $\mathbb{Z}_p$ целых p–адических чисел (то есть сумма, разность и произведение таких чисел также лежит в $\mathbb{Z}_p$).

Группа $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ (факторгруппа поля p–адических чисел по кольцу целых p–адических чисел) может быть отождествлена с множеством дробей вида

$$x = \sum_{i=\gamma}^{-1} x_i p^i, \qquad x_i = 0, \ldots, p-1 \tag{4}$$

$\gamma < 0$ целое. Сложение в $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ есть сложение таких дробей по модулю 1.

2.3 Ультраметрические пространства

Поле p–адических чисел является важнейшим примером ультраметрического пространства. Обсудим определение и основные свойства ультраметрических пространств.

Определение 3 *Ультраметрическое пространство есть метрическое пространство с ультраметрикой $d(x,y)$ (где $d(x,y)$ называется расстоянием между x и y), то есть функцией двух переменных, удовлетворяющей свойствам положительности и невырожденности*

$$d(x,y) \geq 0, \qquad d(x,y) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = y;$$

симметричности

$$d(x,y) = d(y,x);$$

и сильному неравенству треугольника

$$d(x,y) \leq \max(d(x,z), d(y,z)), \qquad \forall z.$$

Сильное неравенство треугольника является чрезвычайно сильным свойством, налагающим существенные ограничения на свойства ультраметрических пространств.

Упражнение 6 Покажите, что в любом ультраметрическом пространстве все треугольники равнобедренны, то есть для любого треугольника длины двух из сторон равны. Покажите, что длина третьей стороны не превосходит длин этих двух равных сторон.

Упражнение 7 Пользуясь предыдущим упражнением, покажите, что любые два шара в ультраметрическом пространстве либо не пересекаются, либо один содержится в другом.

Напомним, что шар радиуса R с центром в x_0 есть множество точек, удаленных на расстояние не более R от точки x_0.

Данные упражнения показывает, что ультраметрические пространства являются естественной моделью для систем с иерархией: шары дробятся на подшары иерархическим образом, и расстояние от точки вне шара до точки внутри шара не зависит от точки внутри шара, но определяется только шаром (то есть иерархически зависит от шаров).

Упражнение 8 Покажите, что любая точка ультраметрического шара является его центром.

Определение 4 *Последовательность точек* $a = x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = b$ *в метрическом пространстве называется* ε*–цепью, соединяющей если* $d(x_k, x_{k+1}) \leq \varepsilon$ *для всех* $0 \leq k < n$*. Если существует* ε*–цепь, соединяющая* a *и* b*, то говорят, что* a *и* b ε*–связываемы.*

Упражнение 9 Докажите свойство неархимедовости: для ультраметрического пространства любые две точки a и b не ε–связываемы для $\varepsilon < d(a, b)$.

Свойство нерхимедовости означает, что в ультраметрическом пространстве нельзя уйти от точки x_0 на расстояние, большее R, делая шаги длины не более R. Такое поведение резко противоречит интуиции, наработанной для вещественной геометрии.

3 p–Адический анализ

3.1 Преобразование Фурье, оператор Владимирова

Рассмотрим некоторые примеры из p–адического анализа. Введем некоторые функции на поле p–адических чисел и введем интеграл по мере Хаара. Напомним, что мера Хаара на коммутативной топологической группе определена как мера, определённая на всех компактных подмножествах, не равная тождественно нулю и инвариантная относительно сдвигов.

Меру Хаара μ на $\mathbb{Q}_p$ можно определить следующим условием (аналогично с определением меры Лебега на вещественной прямой): мера любого шара равна его диаметру.

Упражнение 10 Для меры Хаара на $\mathbb{Q}_p$ выполнены свойства трансляционной инвариантности

$$d\mu(x+a) = d\mu(x), \qquad a \in \mathbb{Q}_p,$$

и преобразования при растяжениях

$$d\mu(ax) = |a|_p^{-1} d\mu(x), \qquad a \in \mathbb{Q}_p, a \neq 0.$$

Функция $\Omega(x)$ есть характеристическая функция отрезка $[0,1]$, откуда для характеристической функции p–адического шара радиуса 1 с центром в нуле получаем

$$\Omega(|x|_p) = \begin{cases} 1, & |x|_p \leq 1 \ , \\ 0, & |x|_p > 1 \ . \end{cases}$$

Упражнение 11 Имеют место следующие интегралы

$$\int_{\mathbb{Q}_p} \Omega(|x|_p) d\mu(x) = \int_{|x|_p \leq 1} d\mu(x) = 1,$$

$$\int_{|x|_p \leq p^\gamma} d\mu(x) = p^\gamma,$$

$$\int_{|x|_p = p^\gamma} d\mu(x) = \left(1 - p^{-1}\right) p^\gamma.$$

Определение 5 *Функция f из $\mathbb{Q}_p$ в множество M называется локально постоянной, если для любого $x \in \mathbb{Q}_p$ существует $r > 0$: для любого x', удовлетворяющего $|x - x'|_p \leq r$ имеет место $f(x') = f(x)$.*

Упражнение 12 Если M есть топологическое пространство, то локально постоянная функция на $\mathbb{Q}_p$ со значениями в M непрерывна.

Упражнение 13 Характеристическая функция шара в $\mathbb{Q}_p$ локально постоянна.

Определение 6 *Пространство $D(\mathbb{Q}_p)$ p–адических основных функций определяется как пространство локально постоянных функций с компактным носителем.*

Любая основная функция есть конечная линейная комбинация характеристических функций шаров.

Мы также будем использовать пространство $D_0(\mathbb{Q}_p)$ основных функций с нулевым средним. Мы обозначаем $L^2(\mathbb{Q}_p)$ пространство квадратично интегрируемых комплекснозначных функций p–адического аргумента.

Комплекснозначный характер $\chi(x)$ p–адического аргумента для x, заданного (2), определен как

$$\chi(x) = \exp\left(2\pi i \sum_{j=\gamma}^{-1} x_j p^j\right).$$

Упражнение 14 Имеет место свойство характера

$$\chi(x+y) = \chi(x)\chi(y).$$

p–Адическое преобразование Фурье функции $f(x)$ определено как

$$F[f](k) = \int \chi(kx) f(x) d\mu(x).$$

Обратное преобразование Фурье имеет вид

$$F^{-1}[f](x) = \int \chi(-kx) f(k) d\mu(k).$$

Упражнение 15 Покажите, что p–адическое преобразование Фурье переводит пространство $D(\mathbb{Q}_p)$ в себя. В частности, характеристическая функция единичного шара с центром в нуле переходит в себя:

$$F[\Omega(|\cdot|_p)](k) = \Omega(|k|_p).$$

Формулу обращения преобразования Фурье можно проверить для $f \in D(\mathbb{Q}_p)$. Также для $f \in D(\mathbb{Q}_p)$ проверяется, что преобразование Фурье есть изометрия относительно метрики в $L^2(\mathbb{Q}_p)$.

На пространстве $L^2(\mathbb{Q}_p)$ преобразование Фурье вводится как предел

$$F[f](k) = \lim_{\gamma\to\infty} \int_{|x|_p \le p^\gamma} \chi(kx) f(x) d\mu(x).$$

Обратное преобразование Фурье

$$F^{-1}[f](x) = \lim_{\gamma\to\infty} \int_{|x|_p \le p^\gamma} \chi(-kx) f(k) d\mu(k).$$

Преобразование Фурье есть унитарный оператор в $L^2(\mathbb{Q}_p)$. Подробное обсуждение можно найти в [1].

Оператор Владимирова p–адического дробного дифференцирования определяется следующим образом

$$D^\alpha f(x) = F^{-1} \circ |k|_p^\alpha \circ F[f](x).$$

Таким образом, этот оператор диагонализуется p–адическим преобразованием Фурье F.

Для $\alpha > 0$ имеет место интегральное представление

$$D^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma_p(-\alpha)} \int_{\mathbb{Q}_p} \frac{f(x) - f(y)}{|x - y|_p^{1+\alpha}} d\mu(y), \tag{5}$$

где

$$\Gamma_p(-\alpha) = \frac{p^{\alpha} - 1}{1 - p^{-1-\alpha}}$$

есть постоянная.

Задача 1 Покажите, что два определения оператора Владимирова эквивалентны. Укажите плотную в $L^2(\mathbb{Q}_p)$ область определения оператора Владимирова.

Доказательство можно найти в [1]. Легко убедиться, что оператор Владимирова не переводит пространство $D(\mathbb{Q}_p)$ в себя.

Упражнение 16 Покажите, что оператор Владимирова переводит пространство $D_0(\mathbb{Q}_p)$ в себя.

3.2 p–Адические всплески

Теория всплесков есть важный раздел современной теории функций и имеет многочисленные применения, в частности, применения к сжатию и анализу сигналов. Изложение вещественной теории всплесков можно найти в [8], [9], [10]. В настоящем и следующем разделах мы приводим результаты работы [11], в которой был введён p–адический базис всплесков.

Введем p–адический всплеск как произведение характеристической функции диска на характер p–адического аргумента.

Лемма 7 *p–Адический всплеск*

$$\psi(x) = \chi(p^{-1}x)\Omega\left(|x|_p\right) \tag{6}$$

является собственным вектором оператора Владимирова:

$$D^{\alpha}\psi(x) = p^{\alpha}\psi(x).$$

Упражнение 17 Докажите эту лемму.

Доказательство можно найти в [11].

Замечание Собственное значение для $\psi(x)$ совпадает с собственным значением для характера $\chi(p^{-1}x)$:

$$D^{\alpha}\chi(p^{-1}x) = p^{\alpha}\chi(p^{-1}x),$$

то есть оператор Владимирова "не чувствует" в данном случае умножения характера на характеристическую функцию.

Сдвиги и растяжения p–адического всплеска образуют базис всплесков в $L^2(\mathbb{Q}_p)$.

Теорема 8 *Набор функций* $\{\psi_{\gamma nj}\}$*:*

$$\psi_{\gamma nj}(x) = p^{-\frac{\gamma}{2}}\chi(p^{\gamma-1}j(x-p^{-\gamma}n))\Omega(|p^{\gamma}x-n|_p),$$
$$\gamma\in\mathbb{Z},\quad n\in\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p,\quad j=1,\dots,p-1 \tag{7}$$

есть ортонормированный базис в $L^2(\mathbb{Q}_p)$ *из собственных векторов оператора Владимирова* D^{α}*:*

$$D^{\alpha}\psi_{\gamma nj} = p^{\alpha(1-\gamma)}\psi_{\gamma nj}. \tag{8}$$

Здесь группа $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ *в (7) параметризована как*

$$n=\sum_{l=\delta}^{-1} n_l p^l,\qquad n_l=0,\dots,p-1.$$

Функции $\psi_{\gamma nj}(x)$ в дальнейшем мы будем называть p–адическими всплесками. Это локально постоянные функции с радиусом локального постоянства $p^{\gamma-1}$, то есть

$$\psi_{\gamma nj}(x+z)=\psi_{\gamma nj}(x),\qquad |z|_p\le p^{\gamma-1}$$

и с носителем, являющимся шаром радиуса p^{γ} с центром в $p^{-\gamma}n$.

Вышеприведенная теорема показывает, что оператор Владимирова p–адического дробного дифференцирования обладает базисом из собственных векторов с компактными носителями, что резко отличается от случая вещественного оператора (дробного) дифференцирования, где собственные вектора с компактным носителем отсутствовали. Более того, построенный в этой теореме базис p–адических всплесков связан с широко известным базисом всплесков Хаара на вещественной прямой.

3.3 Связь вещественного, p–адического и фрактального анализа

Обсудим связь построенного базиса $\{\psi_{\gamma nj}\}$ p–адических всплесков в $L^2(\mathbb{Q}_p)$ с базисом всплесков в пространстве квадратично интегрируемых функций $L^2(\mathbb{R}_+)$ на положительной полупрямой. Базис всплесков (или вейвлетов) есть базис, состоящий из сдвигов и растяжений "mother wavelet function". Простейший пример такой функции есть всплеск Хаара

$$\Psi(x)=\chi_{[0,\frac{1}{2}]}(x)-\chi_{[\frac{1}{2},1]}(x) \tag{9}$$

(разность двух характеристических функций отрезков).

Базис всплесков в $L^2(\mathbb{R})$ (или базис из кратномасштабных всплесков, "multiresolution wavelets") есть базис

$$\Psi_{\gamma n}(x)=2^{-\frac{\gamma}{2}}\Psi(2^{-\gamma}x-n),\quad \gamma\in\mathbb{Z},\quad n\in\mathbb{Z}. \tag{10}$$

Нас будет интересовать базис всплесков на положительной полупрямой, который получается из вышеприведенного (10) ограничением на неотрицательные n.

Мы будем рассматривать также обобщение базиса (10), отвечающее произвольному p. Этот базис в $L^2(\mathbb{R}_+)$, состоит из векторов, имеющих вид

$$\Psi^{(p)}_{\gamma nj}(x) = p^{-\frac{\gamma}{2}}\Psi^{(p)}_j(p^{-\gamma}x - n), \quad \gamma \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{11}$$

$$\Psi^{(p)}_j(x) = \sum_{l=0}^{p-1} e^{2\pi i j l p^{-1}}\chi_{[lp^{-1},(l+1)p^{-1}]}(x), \quad j = 1, \ldots, p-1. \tag{12}$$

Базис (10) получается из (11) при $p = 2$.

Назовем p–адической заменой переменной следующее сюрьективное отображение

$$\rho : \mathbb{Q}_p \to \mathbb{R}_+,$$

$$\rho : \sum_{i=\gamma}^{\infty} x_i p^i \mapsto \sum_{i=\gamma}^{\infty} x_i p^{-i-1}, \quad x_i = 0, \ldots, p-1, \quad \gamma \in \mathbb{Z}. \tag{13}$$

Задача 2 Докажите, что отображение ρ взаимно однозначно почти всюду, сохраняет меру (то есть переводит p–адическую меру Хаара в меру Лебега на полупрямой), непрерывно и гёльдерово с показателем 1.

Доказательство можно найти в [11].

Теорема 9 *Отображение ρ отображает ортонормированный базис всплесков (11) на $L^2(\mathbb{R}_+)$ на базис (7) в $L^2(\mathbb{Q}_p)$ из собственных векторов для оператора Владимирова:*

$$\Psi_{\gamma\rho(n)j}(\rho(x)) = \psi_{\gamma nj}(x). \tag{14}$$

Следовательно, после p–адической замены переменных (13) анализ всплесков становится p–адическим спектральным анализом (разложением функций по собственным векторам оператора Владимирова p–адического дробного дифференцирования).

Замечание Используя отображение ρ, можно перенести действие оператора Владимирова в $L^2(\mathbb{R}_+)$, определив оператор

$$\partial_p^\alpha f(x) = \frac{p^\alpha - 1}{1 - p^{-1-\alpha}} \int_0^\infty \frac{f(x) - f(y)}{|\rho^{-1}(x) - \rho^{-1}(y)|_p^{1+\alpha}} dy, \tag{15}$$

где ρ^{-1} есть обратное отображение к ρ. Поскольку ρ не есть взаимно однозначное отображение, отображение ρ^{-1}, вообще говоря, многозначно, но многозначность сосредоточена на множестве нулевой меры, что делает определение (15) корректным.

Отображение ρ можно обобщить и рассматривать семейство отображений ρ^α с параметром $\alpha \geq 1$, $\rho^1 = \rho$:

$$\rho^\alpha : \mathbb{Q}_p \to \mathbb{R}_+,$$

$$\rho^{\alpha} : \sum_{i=\gamma}^{\infty} x_i p^i \mapsto \sum_{i=\gamma}^{\infty} x_i p^{\alpha(-i-1)}, \quad x_i = 0, \dots, p-1, \quad \gamma \in \mathbb{Z}. \tag{16}$$

Такие отображения для $\alpha > 1$ являются вложениями (то есть у каждой точки образа ровно один прообраз), они непрерывны и гёльдеровы, и образом является фрактальное подмножество в $\mathbb{R}_+$. В частности, так можно получить канторово множество. Фракталы, строящиеся при помощи естественной регулярной процедуры, как правило, связаны (через аналог указанного выше отображения) с p–адическими числами либо другой локально компактной абелевой группой с естественной ультраметрикой.

Опишем процедуру построения канторова множества.

1) На первом шаге процедуры зафиксируем отрезок $[0,1]$.

2) Выкинем из этого отрезка открытый интервал $(1/3, 2/3)$, составляющий среднюю треть отрезка.

3) Проделаем аналогичную процедуру с двумя оставшимися отрезками $[0,1/3]$, $[2/3,1]$.

4) Повторим процедуру счётное число раз.

В результате на каждом шаге длина отрезка уменьшается на $1/3$ (от оставшейся длины), таким образом, оставшееся после выкидывания множество имеет меру нуль. Это множество называется канторовым.

Упражнение 18 Показать, что канторово множество состоит из всевозможных рядов

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j 3^{-j}, \qquad x_j = 0, 2.$$

Рассмотрим некоторое подмножество X в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим конечное либо счётное покрытие $\{B_i\}$ этого множества шарами с радиусом, не превосходящим r.

Мы будем говорить, что хаусдорфова внешняя мера размерности s подмножества X есть предел от нижней грани по покрытиям

$$H^s(X) = \lim_{r \to 0} \inf \sum_i \left[\mathrm{radius}(B_i)\right]^s .$$

Здесь нижняя грань берется по всевозможным покрытиям множества X шарами с радиусом, не превосходящим r.

Хаусдорфова размерность (см. например [12]) множества X определяется как нижняя грань показателей s, для которых внешняя хаусдорфова мера равна нулю:

$$\dim X = \inf \{s : H^s(X) = 0\}.$$

Упражнение 19 Покажите, что хаусдорфова размерность канторова множества равна $\ln 2 / \ln 3$.

Задача 3 1) Доказать, что канторово множество есть образ 2–адического шара относительно отображения (16) для некоторого показателя α. Вычислить показатель α для канторова множества.

2) Вычислить хаусдорфову размерность образа отображения ρ^α.

3) Показать, что индуцированная (с вещественного отрезка) топология канторова множества совпадает с топологией 2–адического шара.

4) Показать, что имеет место также следующее утверждение: индуцированная с вещественного отрезка метрика на канторовом множестве эквивалентна 2–адической метрике.

Здесь мы имеем в виду следующее определение эквивалентности метрик: две метрики d и d' на множестве X эквивалентны, если $\forall x, x' \in X$:

$$Ad(x,x') \leq d'(x,x') \leq Bd(x,x')$$

для некоторых $A, B > 0$.

4 p–Адическая квантовая механика

В настоящем разделе будут рассмотрены модели p–адической квантовой механики. В первых двух подразделах мы рассматриваем модели p–адической классической и квантовой механики с p–адическим временем [1]. В третьем и четвёртом подразделах мы рассматриваем модели с p–адическим пространством и вещественным временем и показываем существование локализованных в пространстве решений для p–адического уравнения Шрёдингера для свободной частицы и строим явные решения для нелинейного p–адического уравнения Шрёдингера [4].

4.1 p–Адическая классическая механика

Рассмотрим p–адическую классическую механику, описываемую p–адическими аналогами гамильтоновых уравнений

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \qquad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}.$$

Здесь время t, координата $q = q(t)$, импульс $p = p(t)$, гамильтониан $H = H(p,q)$ принимают значения в Q_p. Мы рассматриваем только аналитические функции, производные понимаются как производные степенных рядов:

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1}.$$

Рассмотрим следующие примеры.

Свободная частица. Гамильтониан свободной частицы имеет вид

$$H = \frac{1}{2m}p^2,$$

$m \in Q_p$, $m \neq 0$. Уравнения Гамильтона

$$\dot p = 0, \quad \dot q = \frac{1}{m}p; \qquad p(0) = p, \quad q(0) = q,$$

имеют единственное решение в классе аналитических функций для всех $t \in Q_p$ вида

$$p(t) = p, \qquad q(t) = q + \frac{p}{m}t.$$

Гармонический осциллятор. Гамильтониан гармонического осциллятора имеет вид

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{m\omega^2}{2}q^2,$$

$m, \omega \in Q_p$, $m, \omega \neq 0$. Уравнения Гамильтона

$$\dot p = -m\omega^2 q, \quad \dot q = \frac{1}{m}p; \qquad p(0) = p, \quad q(0) = q,$$

имеют решение вида (как и в вещественном случае)

$$\left(\begin{array}{c} q(t) \\ p(t) \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} q\cos\omega t + \frac{1}{m\omega}p\sin\omega t \\ p\cos\omega t - m\omega q\sin\omega t \end{array} \right) = T_t \left(\begin{array}{c} q \\ p \end{array} \right),$$

где

$$T_t = \left(\begin{array}{cc} \cos\omega t & \frac{1}{m\omega}\sin\omega t \\ -m\omega\sin\omega t & \cos\omega t \end{array} \right).$$

Здесь p–адические синус и косинус задаются степенными рядами (такими же, как и в вещественном случае). Ряды, задающие $\sin x$ и $\cos x$, сходятся при $|x|_p \leq p^{-1}$ для $p \neq 2$, и при $|x|_p \leq 1/4$ для $p = 2$.

Описанная область сходимости рядов является группой по сложению: если t, t' лежат в области, то $t + t'$ также лежит в области. При таких t, t' имеет место соотношение

$$T_t T_{t'} = T_{t+t'}.$$

Рассмотрим p–адическое фазовое пространство $V = \mathbb{Q}_p^2 = \{(q,p)\}$. На этом пространстве зададим кососимметрическую билинейную форму

$$B(z, z') = p'q - pq', \qquad z = (q,p), \quad z' = (q', p').$$

Пара (V, B) образует p–адическое симплектическое пространство.

В общем случае, p–адическая гамильтонова динамика есть однопараметрическая группа симплектических автоморфизмов пространства (V, B), удовлетворяющая уравнениям Гамильтона для некоторого гамильтониана. Примерами такой динамики являются описанные выше p–адическая свободная частица и p–адический гармонический осциллятор.

4.2 p–Адическая квантовая механика

В p–адическом случае модели квантовой механики строятся на основе вейлевского представления коммутационных соотношений. А именно, в $L^2(Q_p)$ рассматриваются операторы сдвига и умножения на характер

$$U(q) : \psi(x) \mapsto \psi(x+q), \qquad V(p) : \psi(x) \mapsto \chi(2px)\psi(x), \qquad x, q, p \in \mathbb{Q}.$$

Эти операторы являются аналогами операторов сдвига на вещественной прямой и умножения на экспоненту, которые являются элементами вещественной группы Гайзенберга–Вейля, отвечающими операторам импульса и координаты из алгебры Гайзенберга:

$$e^{iq\hat{p}} : \psi(x) \mapsto \psi(x+q), \qquad e^{ip\hat{q}} : \psi(x) \mapsto e^{ipx}\psi(x), \qquad x, q, p \in \mathbb{R}.$$

Семейство операторов

$$W(z) = \chi(-qp)U(q)V(p), \qquad z = (q,p) \in V.$$

удовлетворяет соотношению Вейля

$$W(z)W(z') = \chi(B(z,z'))W(z+z').$$

Оператор $W(z)$ действует как

$$W(z)\psi(x) = \chi(2px + pq)\psi(x+q).$$

Семейство операторов $W(z)$ задаёт представление p–адической группы Гайзенберга–Вейля, состоящей из элементов (z, α), $z \in V$, $\alpha \in \mathbb{Q}_p$, с операцией

$$(z, \alpha) \cdot (z', \alpha') = (z + z', \alpha + \alpha' + B(z, z')).$$

Представление p–адической группы Гайзенберга–Вейля задаётся следующей формулой:

$$(z, \alpha) \mapsto \chi(\alpha)W(z).$$

Определим динамику p–адической квантовой системы следующим образом. Мы будем говорить, что динамика p–адической квантовой частицы задаётся тройкой $(L^2(\mathbb{Q}_p), W(z), U(t))$, где $W(z)$ есть рассмотренное выше представление группы Гайзенберга–Вейля, $U(t)$ есть группа унитарных операторов эволюции, причём

$$U(t)W(z)U^{-1}(t) = W(z(t)),$$

где $z(t) = (q(t), p(t))$ есть эволюция соответствующей классической p–адической системы.

Рассмотрим следующие примеры.

Свободная частица. Зададим оператор эволюции в импульсном представлении как

$$\widetilde{U}(t)\widetilde{\psi}(k) = \chi\left(\frac{k^2}{4m}t\right)\widetilde{\psi}(k), \qquad t \in \mathbb{Q}_p.$$

В координатном представлении оператор примет вид

$$U(t) = F^{-1}\widetilde{U}(t)F.$$

Такие операторы образуют группу. Оператор $U(t)$ можно представить [1] в виде интегрального оператора

$$U(t)\psi(x) = \int_{\mathbb{Q}_p} K(t, x-y)\psi(y)d\mu(y),$$

где ядро имеет вид

$$K(t,x) = \lambda_p\left(\frac{t}{m}\right)\left|\frac{m}{t}\right|^{\frac{1}{2}}\chi\left(-\frac{m}{t}x^2\right), \qquad t \neq 0, \qquad K(0,x) = \delta(x).$$

Здесь

$$\lambda_p(a) = |a|_p^{\frac{1}{2}}\int_{\mathbb{Q}_p}\chi(ax^2)d\mu(x).$$

Гармонический осциллятор. Оператор $U(t)$ можно представить в виде интегрального оператора

$$U(t)\psi(x) = \int_{\mathbb{Q}_p} K(t,x,y)\psi(y)d\mu(y),$$

где ядро имеет вид (для $m = \omega = 1$)

$$K(t,x,y) = \lambda_p(t)|t|_p^{-\frac{1}{2}}\chi\left(-\frac{x^2+y^2}{\operatorname{tg} t} + \frac{2xy}{\sin t}\right), \qquad t \neq 0, \qquad K(0,x,y) = \delta(x-y).$$

Здесь t принадлежит описанной выше области сходимости для синуса и косинуса.

4.3 Локализация волновых пакетов

Существуют различные подходы к построению моделей p–адической квантовой механики. Один из подходов состоит в рассмотрении модели квантовой частицы с p–адической координатой x и вещественным временем t. Динамика такой частицы описывается p–адическим уравнением Шрёдингера

$$i\partial_t\psi(x,t) = D_x^{\alpha}\psi(x,t) + U(x)\psi(x,t).$$

Здесь $\psi(x,t) \in L^2(\mathbb{Q}_p)$ для любого вещественного t. Таким образом, отличие от вещественного уравнения Шрёдингера состоит в замене минус оператора Лапласа на оператор Владимирова.

В частности, для квантовой свободной частицы потенциал U равен тождественно нулю. Явное отличие от вещественного случая состоит в том, что уравнение Шрёдингера для p–адической свободной частицы имеет решения с компактным носителем (то есть имеет место локализация волновых пакетов для свободной частицы).

Построим пример локализованного решения: выберем

$$\psi(x,t)=e^{-i\omega t}\psi_{\gamma nj}(x),$$

где $\psi_{\gamma nj}$ есть p–адический всплеск. Тогда, при условии равенства частоты ω собственному значению оператора Владимирова для всплеска $\psi_{\gamma nj}$:

$$\omega=\lambda_\gamma=p^{\alpha(1-\gamma)},$$

вышеуказанная функция $\psi(x,t)$ будет являться решением p–адического уравнения Шрёдингера для свободной частицы

$$i\partial_t\psi(x,t)=D_x^\alpha\psi(x,t).$$

4.4 p–Адический солитон

Как известно, нелинейное уравнение Шрёдингера имеет вид уравнения в частных производных

$$i\partial_t\psi=-\partial_x^2\psi+\kappa|\psi|^2\psi$$

для комплекснозначной функции $\psi=\psi(x,t)$. Это уравнение имеет явные решения, называемые солитонами.

Исследуем p–адический аналог нелинейного уравнения Шрёдингера — p–адическое псевдодифференциальное уравнение с кубической нелинейностью вида

$$i\partial_t\psi=D_x^\alpha\psi+\kappa|\psi|^2\psi. \tag{17}$$

Будем, как и в предыдущем разделе, искать решение в виде

$$\psi(x,t)=Ce^{-i\omega t}\psi_{\gamma nj}(x),$$

где C есть комплексная константа.

Легко видеть, что для любого всплеска $\psi_{\gamma nj}$ квадрат модуля всплеска пропорционален характеристической функции шара, являющегося носителем всплеска, и кубическая комбинация $|\psi_{\gamma nj}|^2\psi_{\gamma nj}$ пропорциональна самому всплеску:

$$|\psi_{\gamma nj}|^2\psi_{\gamma nj}=p^{-\gamma}\psi_{\gamma nj}.$$

Подставляя это выражение в уравнение (17), мы получим:

$$\omega=p^{\alpha(1-\gamma)}+\kappa|C|^2p^{-\gamma}.$$

Мы получаем [4] однопараметрическое семейство решений уравнения (17):

$$\psi(x,t)=Ce^{-it\left(p^{\alpha(1-\gamma)}+\kappa|C|^2p^{-\gamma}\right)}\psi_{\gamma nj}(x). \tag{18}$$

Построенное решение есть p–адический аналог солитона. Отметим, что частота ω зависит от амплитуды C.

5 p–Адическая параметризация матрицы Паризи

Важным разделом современной статистической физики является статистическая физика неупорядоченных систем, то есть таких систем, гамильтонианы которых зависят от набора случайных параметров [13]. Такие системы включают спиновые стёкла, неупорядоченные полимеры и сложные макромолекулы (основной физический объект в молекулярной биологии), кластеры и т.д. Одним из подходов к описанию неупорядоченных систем является метод реплик. В этом подходе фазовый переход в неупорядоченных системах связан с нарушением репличной симметрии, которое описывается семейством репличных матриц (играющим роль параметра порядка фазового перехода). Основным примером таких матриц служит матрица Паризи.

Матрица Паризи есть $n \times n$ матрица $Q = (Q_{ab})$, матричный элемент матрицы которой определяется как

$$Q_{aa} = 0, \quad Q_{ab} = q_i, \qquad \left[\frac{a}{m_i}\right] \neq \left[\frac{b}{m_i}\right]; \quad \left[\frac{a}{m_{i+1}}\right] = \left[\frac{b}{m_{i+1}}\right]. \tag{19}$$

где m_i суть $N+1$ натуральных чисел, таких, что $p_i = m_i/m_{i-1}$ натуральные,

$$1 = m_0 < m_1 < \cdots < m_k < m_N = n$$

и функция $[x]$ принимает значения в целых числах по следующему правилу: $[x] - 1 \leq x \leq [x]$, где $[x]$ целое, то есть $[x]$ есть наименьшее целое число, большее или равное x (целая часть справа), q_i есть неотрицательные вещественные параметры. Пример матрицы такого вида для $p_i = 2$ для всех i есть

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & q_1 & q_2 & q_2 & q_3 & q_3 & q_3 & q_3 & \dots \\ q_1 & 0 & q_2 & q_2 & q_3 & q_3 & q_3 & q_3 & \dots \\ q_2 & q_2 & 0 & q_1 & q_3 & q_3 & q_3 & q_3 & \dots \\ q_2 & q_2 & q_1 & 0 & q_3 & q_3 & q_3 & q_3 & \dots \\ q_3 & q_3 & q_3 & q_3 & 0 & q_1 & q_2 & q_2 & \dots \\ q_3 & q_3 & q_3 & q_3 & q_1 & 0 & q_2 & q_2 & \dots \\ q_3 & q_3 & q_3 & q_3 & q_2 & q_2 & 0 & q_1 & \dots \\ q_3 & q_3 & q_3 & q_3 & q_2 & q_2 & q_1 & 0 & \dots \\ \dots \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Рассмотрим случай, когда $m_i = p^i$ (то есть все $p_i = p$). Тогда формула (19) принимает вид

$$Q_{aa} = 0, \quad Q_{ab} = q_i, \qquad \left[\frac{a}{p^{i-1}}\right] \neq \left[\frac{b}{p^{i-1}}\right], \quad \left[\frac{a}{p^i}\right] = \left[\frac{b}{p^i}\right]. \tag{21}$$

Мы будем рассматривать репличную матрицу $Q = (Q_{ab})$ как оператор в пространстве функций на конечном множестве из p^N точек со структурой группы $p^{-N}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$. Группа $p^{-N}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ может быть описана как множество с элементами

$$x = \sum_{j=-N}^{-1} x_j p^j, \qquad x_j = 0, \dots, p-1$$

с естественной операцией сложения по модулю 1. Рассмотрим p–адическую норму на этой группе (соответственно, расстояние может принимать значения $0, p, \dots, p^N$). Введем взаимно однозначное соответствие

$$l : 1, \dots, p^N \to p^{-N}\mathbb{Z}/\mathbb{Z},$$

$$l^{-1} : \sum_{j=-N}^{-1} x_j p^j \mapsto 1 + p^{-1} \sum_{j=-N}^{-1} x_j p^{-j}.$$

Таким образом, данное отображение (меняющее знак степеней в разложении числа по степеням p) является прямым аналогом p–адической замены переменных, рассмотренной ранее. Имеет место следующая теорема.

Теорема 10 *Матричный элемент Q_{ab}, определенный формулой (21), зависит только от p–адического расстояния между $l(a)$ и $l(b)$:*

$$Q_{ab} = q(|l(a) - l(b)|_p),$$

где $q(p^k) = q_k$, $q(0) = 0$, $k = 1, \dots, N$.

Иными словами, после соответствующей перенумеровки индексов матрицы Паризи её матричные элементы выражаются как $Q_{ab} = q(|a - b|_p)$. Следовательно, определение данного семейства матриц Паризи связано с простейшим примером ультраметрического пространства — полем p–адических чисел.

Задача 4 Доказать эту теорему.

Доказательство можно найти в [14], [15].

6 p–Адическая модель генетического кода

Материалы настоящего раздела можно найти в [16]. Близкий подход впервые был развит в [17].

6.1 Генетический код

Основные молекулы, использующиеся в живых системах, представляют из себя линейные полимеры, такие как белок (последовательность аминокислот), и нуклеиновые кислоты — ДНК и РНК (последовательности нуклеотидов).

Генетическая информация хранится в ДНК и в РНК в виде последовательности нуклеотидов. Нуклеотиды (в ДНК) бывают четырёх сортов и обозначаются C, A, T, G (цитозин, аденин, тимин, гуанин). В РНК тимин T заменяется на урацил, обозначаемый U. В двойной спирали ДНК одна из нитей ДНК комплементарна другой, комплементарные пары нуклеотидов суть A и T, G и C. РНК строится по ДНК в процессе транскрипции по принципу комплементарности (с заменой T на U).

Белок строится по РНК в процессе трансляции. При этом для кодирования аминокислоты используется кодон — тройка стоящих рядом в РНК нуклеотидов $C_1C_2C_3$, суммарно мы имеем 64 кодона. Генетический код есть отображение, которое переводит кодоны в РНК в аминокислоты.

В биологии (кроме некоторых исключительных случаев) используется 20 аминокислот: аланин, треонин, глицин, пролин, серин, аспарагиновая кислота, аспарагин, глутаминовая кислота, глутамин, лизин, гистидин, аргинин, триптофан, тирозин, фенилаланин, лейцин, метионин, изолейцин, валин, цистеин, обозначаемых соответственно Ala, Thr, Gly, Pro, Ser, Asp, Asn, Glu, Gln, Lys, His, Arg, Trp, Tyr, Phe, Leu, Met, Ile, Val, Cys, также мы имеем стоп–кодон Ter (символ остановки транскрипции). Генетический код ставит в соответствие кодону $C_1C_2C_3$ аминокислоту либо стоп–кодон Ter.

Существует несколько вариантов генетического кода. Различные варианты в основном совпадают, но могут различаться на нескольких кодонах. Следующая таблица описывает митохондриальный код позвоночных.

AAA Lys AAU Asn AAG Lys AAC Asn	UAA Ter UAU Tyr UAG Ter UAC Tyr	GAA Glu GAU Asp GAG Glu GAC Asp	CAA Gln CAU His CAG Gln CAC His
AUA Met AUU Ile AUG Met AUC Ile	UUA Leu UUU Phe UUG Leu UUC Phe	GUA Val GUU Val GUG Val GUC Val	CUA Leu CUU Leu CUG Leu CUC Leu
AGA Ter AGU Ser AGG Ter AGC Ser	UGA Trp UGU Cys UGG Trp UGC Cys	GGA Gly GGU Gly GGG Gly GGC Gly	CGA Arg CGU Arg CGG Arg CGC Arg
ACA Thr ACU Thr ACG Thr ACC Thr	UCA Ser UCU Ser UCG Ser UCC Ser	GCA Ala GCU Ala GCG Ala GCC Ala	CCA Pro CCU Pro CCG Pro CCC Pro

Таблица 1 : митохондриальный код позвоночных

6.2 Параметризация пространства кодонов

Первый шаг конструкции — параметризация множества нуклеотидов парами нулей и единиц (x, y): 00, 01, 10, 11. Эта параметризация описывается следующей таблицей 2×2:

$$\begin{array}{|c|c|}\hline A & G \\ \hline U & C \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline 00 & 01 \\ \hline 10 & 11 \\ \hline \end{array} \tag{22}$$

Второй шаг нашей конструкции — найти параметризацию пространства кодонов, используя введённую параметризацию множества нуклеотидов. Для этого примем во внимание важность нуклеотидов в кодоне, описываемую следующим правилом

$$2 > 1 > 3. \tag{23}$$

Это означает, что наиболее важен второй нуклеотид в кодоне, и наименее важен третий нуклеотид в кодоне.

Основная идея рассматриваемой конструкции — совместить параметризацию нуклеотидов таблицей 2×2 и вышеприведенный порядок нуклеотидов в кодоне и получить параметризацию пространства кодонов таблицей 8×8 (двоичной плоскостью).

Мы называем двоичной плоскостью квадратную таблицу 8×8, имеющую структуру группы $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ (прямой суммы двух групп вычетов по модулю 8). Элементы такой группы мы обозначаем (x, y):

$$x = (x_0 x_1 x_2) = x_0 + 2x_1 + 4x_2, \quad y = (y_0 y_1 y_2) = y_0 + 2y_1 + 4y_2, \quad x_i, y_i = 0, 1.$$

Можно сказать, что x и y в этой формуле есть целые числа от 0 до 7 в двоичном представлении.

Построим отображение ρ пространства кодонов на двоичную плоскость. Используя правило (23), поставим в соответствие наиболее важному (второму) нуклеотиду в кодоне наибольший масштаб в двоичной плоскости 8×8 — пару (x_0, y_0), первому нуклеотиду в кодоне мы сопоставляем пару (x_1, y_1), и третьему нуклеотиду мы ставим в соответствие пару (x_2, y_2). При этом нуклеотиды определяют соответствующе пары (x_i, y_i) по правилу (22). Мы получаем для кодона $C_1C_2C_3$ следующее представление парой троек из 0 и 1 (элементов двоичной плоскости):

$$\rho : C_1C_2C_3 \mapsto (x, y) = (x_0 x_1 x_2, y_0 y_1 y_2)$$

Далее, мы перенумеруем номера строк и столбцов двоичной плоскости следующим образом (подобно тому, как проводилась перенумерация строк и столбцов матрицы Паризи):

$$\eta : x \mapsto \widetilde{x}, \qquad y \mapsto \widetilde{y};$$

$$\eta : x_0 + 2x_1 + 4x_2 \mapsto 1 + 4x_0 + 2x_1 + x_2;$$

$$\eta : y_0 + 2y_1 + 4y_2 \mapsto 1 + 4y_0 + 2y_1 + y_2.$$

Таким образом, мы рассматриваем взаимно однозначное соответствие номеров строк (или столбцов) на двоичной плоскости:

$$\eta : 0, 4, 2, 6, 1, 5, 3, 7 \mapsto 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.$$

После перенумеровки η таблица кодонов 8×8 на двоичной плоскости примет вид:

AAA	*AAG*	*GAA*	*GAG*	*AGA*	*AGG*	*GGA*	*GGG*
AAU	*AAC*	*GAU*	*GAC*	*AGU*	*AGC*	*GGU*	*GGC*
UAA	*UAG*	*CAA*	*CAG*	*UGA*	*UGG*	*CGA*	*CGG*
UAU	*UAC*	*CAU*	*CAC*	*UGU*	*UGC*	*CGU*	*CGC*
AUA	*AUG*	*GUA*	*GUG*	*ACA*	*ACG*	*GCA*	*GCG*
AUU	*AUC*	*GUU*	*GUC*	*ACU*	*ACC*	*GCU*	*GCC*
UUA	*UUG*	*CUA*	*CUG*	*UCA*	*UCG*	*CCA*	*CCG*
UUU	*UUC*	*CUU*	*CUC*	*UCU*	*UCC*	*CCU*	*CCC*

Таблица A

Двоичная плоскость (и, соответственно, пространство кодонов) допускает 2–мерную 2–адическую ультраметрику, отвечающую правилам (22), (23):

$$d(C_1C_2C_3, C_1'C_2'C_3') = \max(|x-x'|_2, |y-y'|_2) \tag{24}$$

$$(x,y) = \rho(C_1C_2C_3), \quad (x',y') = \rho(C_1'C_2'C_3')$$

Такая 2–адическая норма может принимать значения 1, 1/2, 1/4.

6.3 Генетический код на двоичной плоскости

Отображение генетического кода сопоставляет элементам двоичной плоскости аминокислоты (и стоп–кодон Ter). Мы получим для митохондриального генетического кода следующую таблицу аминокислот на двоичной плоскости:

$\frac{\text{Lys}}{\text{Asn}}$	$\frac{\text{Glu}}{\text{Asp}}$	$\frac{\text{Ter}}{\text{Ser}}$	Gly
$\frac{\text{Ter}}{\text{Tyr}}$	$\frac{\text{Gln}}{\text{His}}$	$\frac{\text{Trp}}{\text{Cys}}$	Arg
$\frac{\text{Met}}{\text{Ile}}$	Val	Thr	Ala
$\frac{\text{Leu}}{\text{Phe}}$	Leu	Ser	Pro

Таблица B

Каждый маленький квадрат этой таблицы является образом (относительно отображения генетического кода) квадрата 2×2 из таблицы кодонов (2–адического шара диаметра 1/4). Например, мы имеем следующее соответствие

$$\begin{array}{|c|c|}\hline AAA & AAG \\ \hline AAU & AAC \\ \hline \end{array} \to \begin{array}{|c|}\hline \text{Lys} \\ \hline \text{Asn} \\ \hline \end{array}, \qquad \begin{array}{|c|c|}\hline CCA & CCG \\ \hline CCU & CCC \\ \hline \end{array} \to \boxed{\text{Pro}}$$

Таким образом, кодоны, отображающиеся на одинаковые аминокислоты, расположены рядом в двоичной плоскости (точнее, близки в 2–адической метрике).

Некоторые из квадратов 2×2 из таблицы кодонов отображаются на одну аминокислоту (что даёт вырождение 4 для генетического кода). Некоторые из квадратов 2×2 отображаются на две аминокислоты: первая строка квадрата 2×2 отображается на одну аминокислоту, вторая строка отображается на другую аминокислоту, что даёт вырождение 2 для генетического кода. Мы также имеем три случая дополнительного вырождения. Например, второй квадрат в последней строке таблицы и верхняя половина первого квадрата в последней строке отображаются на аминокислоту лейцин (Leu).

Предложение 11 *Применение отображения митохондриального генетического кода к Таблице A кодонов на двоичной плоскости даёт Таблицу B аминокислот на двоичной плоскости. При этом большая часть вырождения отображения генетического кода будет описываться локальным постоянством отображения на двоичной плоскости по одной либо по двум координатам.*

7 Приложения к динамике белков

В настоящем разделе мы обсуждаем применения p–адического анализа к описанию иерархической динамики на сложных ландшафтах энергии в применении к описанию динамики белков [14], [18]. Для обсуждения физики белков см. [19], [20].

7.1 Свойства белков

Белок есть линейный полимер (последовательность аминокислот, называемая первичной структурой белка), уложенный (без образования узлов) в достаточно плотно упакованную трехмерную глобулу. Трёхмерная структура упаковки (третичная структура) разных белков может заметно различаться, но, как правило, третичная структура обладает определённой регулярностью. В частности, третичная структура в основном собрана из элементов вторичной структуры — стандартных конструкций, α–спиралей и β–листов.

Белки обладают набором замечательных и не полностью объяснённых к настоящему времени свойств. Перечислим некоторые из этих свойств.

1) Белок, как правило, способен сам собираться в свою третичную структуру (называемую также нативным состоянием белка) из состояния развёрнутой нити.

Белковая нить гибкая, каждое основание (аминокислота) в этой нити по отношению к соседнему может поворачиваться, эти повороты для каждого основания описываются парой углов. В белке от нескольких десятков до нескольких сотен аминокислот. Таким образом, пространство состояний белка есть подмножество тора с размерностью несколько сотен (весь тор не может быть пространством состояний из за пространственных ограничений — нить может цепляться сама за себя).

Таким образом, белок осуществляет поиск нативного состояния по огромному пространству состояний. При этом энергии разных состояний (пространственных конформаций) белка отличаются не очень сильно.

Проблема фолдинга (самосворачивания) белка называется парадоксом Левинталя.

2) Белок в своей нативной структуре не является замороженным, его пространственная конформация может флуктуировать и даже испытывать значительные перестройки, причём эти перестройки могут быть критичными для функции белка. В частности, присоединение субстрата к ферменту может вызывать такие перестройки конформации. При этом нативное состояние является стабильным (белок возвращается в нативное состояние после достаточно небольших возмущений).

Таким образом, представление о белке как о "апериодическом кристалле" (Шрёдингер) является неверным.

3) Белки могут катализировать с очень высокой эффективностью и чрезвычайно высокой избирательностью большое число химических реакций (почти все реакции, протекающие в клетках). При этом белки функционируют как молекулярные машины.

Следует отметить, что случайный сополимер аминокислот не обладает вышеперечисленными свойствами — у случайного сополимера нативного состояния нет (значит, нет явления фолдинга), глобула случайного сополимера является расплавленной.

В отличие от случайного сополимера, белок является наномашиной, собирающейся и функционирующей на основе самоорганизации.

7.2 Динамика на сложных ландшафтах и межбассейновая кинетика

Динамика широкого класса физически важных сложных наноскопических систем (стёкла, кластеры, полимеры) описывается случайным блужданием на сложном энергетическом ландшафте. Ландшафтом называется вещественнозначная функция (энергия) на области в $\mathbb{R}^N$. Выражение "сложный ландшафт" означает, что такая функция имеет много локальных минимумов. В частности, такие модели важны для описания функционирования белков в рамках релаксационной концепции динамики белка [19]. В связи с этим большой интерес представляет приближённое описание динамики на сложных ландшафтах.

Динамика на энергетическом ландшафте используется для описания химических реакций, идущих по активационному механизму. В этом подходе химическая реакция описывается переходом между двумя энергетическими минимумами через энергетический барьер (на самом деле обсуждается динамика на ландшафте свободной энергии, но мы сейчас не будем это уточнять). Имеет место приближённая формула Аррениуса — константа скорости реакции пропорциональна больцмановскому фактору от высоты энергетического барьера

$$A \sim e^{-\beta \Delta E}$$

где ΔE есть величина барьера активации (разность между энергиями переходного и начального состояний), $\beta = \frac{1}{kT}$ есть обратная температура.

Для случая сложных ландшафтов, когда локальных минимумов много, имеет место важное наблюдение — для функции энергии общего положения энергетические барьеры между локальными минимумами будут устроены иерархически. Причём чем выше размерность пространства, тем иерархия будет более выраженной. Такие соображения использовались в теории спиновых стёкол при введении матрицы Паризи. В рассматриваемом случае матрица Паризи будет соответствовать матрице аррениусовских вероятностей переходов между разными энергетическими минимумами.

Такие соображения приводят к введению метода межбассейновой кинетики (interbasin kinetics) — способа приближённого исследования случайного блуждания на сложных ландшафтах, основанного на описании кинетики, порождённой переходами между группами состояний (бассейнами). Минимальные бассейны соответствуют локальным минимумам энергии, большие бассейны (супербассейны, объединения бассейнов) устроены иерархически.

Постулаты такого приближения:

(1) Пространство состояний разделено на бассейны, бассейны разбиваются на подбассейны иерархическим образом (образуя направленное дерево бассейнов).

(2) Энергетический барьер между двумя состояниями зависит только от бассейнов, в которых находятся эти состояния, но не зависит от выбора состояний в таких бассейнах.

Постулаты межбассейновой кинетики естественным образом переписываются в следующем виде:

(1) = пространство состояний ультраметрично
(2) = вероятность перехода локально постоянна

В простейшем случае система уравнений межбассейновой кинетики принимает вид [14], [18] p–адического уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x,t) + D_x^{\alpha} f(x,t) = 0. \tag{25}$$

Первоначально это уравнение было введено в [1] из чисто математических соображений. Здесь $f(x,t)$ есть зависящая от времени t функция распределения, D_x^{α} есть оператор Владимирова p–адического дробного дифференцирования, действующий по переменной x. Эта переменная описывает дерево бассейнов для сложного энергетического ландшафта. Показатель α пропорционален обратной температуре $\beta = \frac{1}{kT}$.

Подробнее применение p–адического уравнения теплопроводности в качестве уравнения межбассейновой кинетики можно пояснить следующим образом.

Система кинетических уравнений, описывающих переходы между конечным набором состояний, нумеруемых индексами a, выглядит следующим образом:

$$\frac{d}{dt}f(a,t)=\sum_{b}\left(Q_{ab}f(b,t)-Q_{ba}f(a,t)\right).$$

Здесь Q_{ab} есть матрица вероятностей переходов (в единицу времени) между состояниями.

Рассмотрим модель межбассейновой кинетики, когда Q_{ab} есть матрица Паризи. Тогда, применяя p–адическую параметризацию матрицы Паризи, мы можем переписать систему кинетических уравнений в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}f(a,t)=\int_{p^M\mathbb{Z}_p/p^N\mathbb{Z}_p}q(|a-b|_p)(f(a,t)-f(b,t))d\mu(b),\qquad M<N,$$

где интегрирование (суммирование) идёт по мере Хаара на дискретной группе $p^M\mathbb{Z}_p/p^N\mathbb{Z}_p$.

Применяя формальный предел $M\to-\infty$, $N\to\infty$, мы получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}f(x,t)=\int_{\mathbb{Q}_p}q(|x-y|_p)(f(x,t)-f(y,t))d\mu(y).$$

В частном случае, когда

$$q(|x|_p)=\Gamma_p^{-1}(-\alpha)|x|_p^{-1-\alpha},$$

мы получаем p–адическое уравнение теплопроводности (25). В этом случае мы имеем степенную асимптотику для фундаментального решения: для фундаментального решения $f(x,t)$ p–адического уравнения теплопроводности, $f(x,0)=\delta(x)$, для больших времен имеет место асимптотика

$$\int_{|x|_p\le 1}f(x,t)d\mu(x)\sim t^{-\frac{1}{\alpha}}.$$

Для рассматриваемой модели показатель $1/\alpha$ пропорционален температуре T.

Ультраметрический подход к системам уравнений межбассейновой кинетики общего вида обсуждается в [21].

7.3 Модель связывания Миоглобин–CO

В настоящем разделе мы покажем, что уравнение (25), рассматриваемое как уравнение конформационной динамики белка, подтверждается экспериментами. В этом случае переменная x будет описывать пространственную конформацию белка.

А именно, рассмотрим задачу описания связывания CO (угарного газа) миоглобином (Mb). Эта модель — одна из базовых моделей биофизики, её поэтому называют "моделью атома водорода биофизики" [22].

Миоглобин — белок из 153 аминокислот, функция которого состоит в обратимом связывании и переносе молекулы кислорода. Миоглобин может связываться (сильнее, чем с кислородом) с молекулами CO и другими субстратами, например, с CN. На этом основано токсическое действие угарного газа.

Миоглобин связывает кислород при помощи иона железа, расположенного внутри глобулы миоглобина. Чтобы связаться с ионом железа, молекула субстрата должна пройти внутрь глобулы через щель, которая может открываться или закрываться в зависимости от пространственной конформации миоглобина. Диффузия кислорода (или CO) происходит гораздо быстрее, чем пространственные перестройки белка, поэтому кинетика реакции будет описываться моделью конформационной динамики белка (реакция будет конформационно контролируемой).

Чтобы построить такую модель конформационной динамики, мы должны к рассмотренному в предыдущем разделе уравнению релаксации белка (25) добавить член, описывающий химическую реакцию связывания Mb–CO. Мы записываем соответствующее уравнение в виде уравнения диффузии со стоком

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + D_x^{\alpha} + c\Omega(|x|_p)\right) f(x,t) = 0. \tag{26}$$

Здесь $c > 0$ есть константа скорости реакции (зависящая от концентрации CO), $\Omega(|x|_p)$ есть характеристическая функция единичного шара, $f(x,t)$ есть зависящая от времени функция распределения по конформациям для молекул миоглобина, не связанных с CO.

Смысл члена $\Omega(|x|_p)$ в том, что единичный шар описывает ту часть конформационного пространства, где щель в молекуле миоглобина открыта и может идти связывание.

Оказывается, что рассмотренная модель находится в хорошем соответствии с результатами экспериментов по спектроскопии связывания Mb–CO. В частности, построенная модель воспроизводит экспериментально наблюдаемые неэкспоненциальную релаксацию и аномальный ход температурной зависимости для скорости реакции (эксперименты H.Frauenfelder [23] и В.И.Гольданского [24]).

Более подробное изложение материала данного раздела и других p–адических моделей динамики белков можно найти в [18], [25].

Благодарности Работа была частично поддержана грантом РФФИ 08-01-00727-а, грантом президента Российской Федерации на поддержку научных школ НШ-3224.2008.1 и программой Отделения математики РАН "Современные проблемы теоретической математики".

Список литературы

[1] *В.С.Владимиров, И.В.Волович, Е.И.Зеленов* p–Адический анализ и математическая физика. Москва: Наука, 1994; *V.S.Vladimirov, I.V.Volovich, Ye.I.Zelenov* p–Adic Analysis and Mathematical Physics. Singapore: World Scientific, 1994.

[2] *А.Ю.Хренников* Неархимедов анализ и его приложения. Москва: Физматлит, 2003.

[3] *A.N.Kochubei* Pseudodifferential equations and stochastics over non–archimedean fields. New York: Marcel Dekker, 2001.

[4] *С.В.Козырев* Методы и приложения ультраметрического и p–адического анализа: от теории всплесков до биофизики. Современные проблемы математики. МИАН, Москва, в печати, 2008.

[5] Адрес страницы Третьей международной конференции по p–адической математической физике: от физики планковских масштабов до сложных систем и биологии "p-ADIC MATHPHYS.2007"

http://p-adicmathphys2007.mi.ras.ru/

Презентации некоторых докладов

http://p-adicmathphys2007.mi.ras.ru/talks.html

[6] *А.И.Кострикин, Ю.И.Манин* Линейная алгебра и геометрия. Москва. Наука. 1980.

[7] *С.М.Никольский* Курс математического анализа. Москва. Наука. 1983.

[8] *И. Добеши* Десять лекций по вейвлетам. Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2001; *Daubechies I.* Ten Lectures on Wavelets, CBMS Lecture Notes Series. SIAM, Philadelphia, 1992.

[9] *Б.С.Кашин, А.А.Саакян* Ортогональные ряды. Изд-е 2, дополненное. М.: Изд-во АФЦ, 1999.

[10] *И.Я.Новиков, В.Ю.Протасов, М.А.Скопина* Теория всплесков. М.: Физматлит, 2005.

[11] *С.В.Козырев* Анализ всплесков как p–адический спектральный анализ // Известия РАН Серия Мат. 2002. Т.66. N.2. С.149 –158, http://arxiv.org/abs/math-ph/0012019

[12] *Е.Федер* Фракталы. Москва, Мир, 1991.

[13] *M.Mezard, G.Parisi, M.Virasoro* Spin-Glass Theory and Beyond. Singapore: World Scientific, 1987.

[14] *V.A.Avetisov, A.H.Bikulov, S.V.Kozyrev* Application of p–adic analysis to models of spontaneous breaking of replica symmetry, // J. Phys. A: Math. Gen. 1999. V.32. N.50. P.8785–8791, http://arxiv.org/abs/cond-mat/9904360

[15] *G.Parisi, N.Sourlas* p–Adic numbers and replica symmetry breaking // European Phys. J. B. 2000. V.14. P.535–542. http://arxiv.org/abs/cond-mat/9906095

[16] *A.Yu. Khrennikov, S.V. Kozyrev* Genetic code on the dyadic plane // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2007. V.381. P.265-272. http://arxiv.org/abs/q-bio.QM/0701007

[17] *B.Dragovich, A.Dragovich* A p-Adic Model of DNA Sequence and Genetic Code, http://arxiv.org/abs/q-bio.GN/0607018

[18] *V.A.Avetisov, A.H.Bikulov, S.V.Kozyrev, V.A.Osipov* p–Adic Models of Ultrametric Diffusion Constrained by Hierarchical Energy Landscapes // J. Phys. A: Math. Gen. 2002. V.35. N.2. P.177–189, http://arxiv.org/abs/cond-mat/0106506

[19] *Л.А. Блюменфельд* Проблемы биологической физики. Наука, ГИ физ.-мат.лит.: Москва, 1977.

[20] *А.В.Финкельштейн, О.Б.Птицын* Физика белка. Книжный дом Университет: Москва, 2002.

[21] *С.В.Козырев* Ультраметрическая динамика как модель межбассейновой кинетики // Известия НАН Армении. Математика. 2006. Т.41. N.5. С.28-38. http://arxiv.org/abs/0711.1453

[22] *H. Frauenfelder, B.H.McMahon, P.W.Fenimore* Myoglobin: the hydrogen atom of biology and paradigm of complexity // PNAS. 2003. V.100. N.15. P.8615-8617.

[23] *A. Ansari, J. Berendzen, S. F. Bowne, H. Frauenfelder, I. E. T. Iben, T. B. Sauke, E. Shyamsunder, R. D. Young* Protein States and Proteinquakes // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 1985. V.82. P.5000-5004.

[24] *В.И.Гольданский, Ю.Ф.Крупянский, К.В.Шайтан, А.Б.Рубин* Исследование динамики белков методами мессбауэровской спектроскопии // Биофизика. 1987. Т.3. С.761-774.

[25] http://p-adicmathphys2007.mi.ras.ru/Avetisov-presentation.ppt