Суммы Клоостермана: метод Бургейна

Суммы Клоостермана – это тригонометрические суммы вида

$$S = \sum_{n=N+1}^{N+M} \exp\left(2\pi i \, \frac{an^* + bn}{q}\right).$$

Здесь q, N, M, a, b – целые числа, $2 \leqslant M \leqslant q$, $1 \leqslant (a, q) < q$, а символом n^* для целого n, взаимно простого с модулем q, т.е. решение сравнения

$$n^* n \equiv 1 (\mathrm{mod}\, q).$$

Такие суммы впервые возникли в работе голландского математика Хендрика Дауве Клоостермана (1900 – 1968) при исследовании представимости натуральных чисел квадратичной формой вида

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dt^2,$$

и с тех пор заняли почётное место в арсенале самых "рабочих" теоретико-числовых инструментов.

Изучению сумм Клоостермана и их многочисленных приложений посвятили свои работы сотни математиков, в числе которых – И.М. Виноградов, Т. Эстерман, Г. Дэвенпорт, А. Вейль, А. Сельберг, А.А. Карацуба и многие другие.

В 2005 г. Ж. Бургейн доказал очень глубокую и красивую теорему об оценке т.н. "полилинейной" суммы, т.е. суммы вида

$$\sum_{x_1 \in A_1} \cdots \sum_{x_n \in A_n} \alpha_1(x_1) \ldots \alpha_n(x_n) \exp\left(2\pi i \, \frac{x_1 \ldots x_n}{q}\right),$$

где A_j – произвольные подмножества системы вычетов по простому модулю q, а комплекснозначные функции $\alpha_j(x)$ удовлетворяют некоторым весьма общим условиям. Эта оценка нашла многочисленные применения в самых разных разделах теории чисел и в том числе в задачах, связанных с оценками сумм Клоостермана.

В курсе предполагается рассмотреть следующие темы:

– **Элементарные методы получения оценок сумм Клоостермана**;

– **Простейшие приложения сумм Клоостермана**;

– **Подробный разбор доказательства теоремы Бургейна с привлечением необходимых сведений из аддитивной комбинаторики**.

Изложение планируется сделать максимально независимым, а сами лекции – доступные студентам 2 и последующего курсов, знакомым с основными понятиями теории чисел.

Занятия будут проходить по четвергам в ауд. 430 МИАН с $18^{\underline{00}}$. Начало занятий – 22 сентября 2016 г.